УДК 517.977

Р.О. Масталиев

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОДНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМОЙ*

Введение. Многие процессы практически имеют сложную структуру, будучи ступенчатыми процессами. Они считаются подклассом гибридных систем и встречаются в следующих задачах: управления химико-технологическими процессами, автоматизированными производственными системами конвейерного типа, оценки качества состояния воды в бассейне реки в зависимости от выбросов промышленными предприятиями загрязняющих веществ, в литейном производстве и др. (см., например, [1–3]).

В работах [4–8] изучены задачи оптимального управления, описываемые интегральными и разностными уравнениями типа Вольтерра, доказаны необходимые условия оптимальности, найдены условия управляемости и др.

Заметим, что задача оптимального управления, описываемая системой линейных разностных уравнений Вольтерра с квадратичным критерием качества, изучена в [9, 10].

В [11] рассмотрена ступенчатая задача оптимального управления, описываемая системой разностных уравнений типа Вольтерра. Доказано необходимое условие оптимальности в форме дискретного принципа максимума Понтрягина и исследован особый (в смысле принципа максимума Понтрягина) случай.

В настоящей работе рассматривается одна из ступенчатых задач оптимального управления, описываемая разностными и интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u, v) = \varphi(x(t_1)) + \phi(y(T)) \tag{1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{\tau=t_0}^{t} f(t, \tau, x(\tau), u(\tau)), \ \ t \in T_1 = \{t_0, t_0+1, t_0+2, ..., t_1-1\}, \\ x(t_0) = x_0, \\ \dot{y}(t) = \int_{t_1}^{t} g(t, \tau, y(\tau), v(\tau))\, d\tau, \quad t \in T_2 = [t_1, T], \\ y(t_1) = G(x(t_1)). \end{cases} \tag{2}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития науки при Президенте Азербайджанской Республики. Грант № EIF/GAM-2-2013-2(8)-25/06/1.

Здесь t_0, t_1, T, x_0 заданы, причем разность $t_1 - t_0$ — натуральное число, $\varphi(x)$, $\phi(y)$ — заданные, дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции, $f(t, \tau, x, u)$, $(g(t, \tau, y, v))$ — заданная n (m)-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (x, u) (y, v) до второго порядка включительно, $G(x)$ — заданная, дважды непрерывно дифференцируемая m-мерная вектор-функция, $u(t)$ — r-мерный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и открытого множества U, $v(t)$ — r-мерный кусочно-непрерывный на T_2 вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и открытого множества (V), т.е.

$$\begin{gathered} u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T_1, \\ v(t) \in V \subset R^q, \quad t \in T_2. \end{gathered} \tag{3}$$

Пару $(u(t), v(t))$ с приведенными выше свойствами назовем допустимым управлением, а соответствующий процесс $(u(t), v(t), x(t), y(t))$ — допустимым процессом.

Цель публикации — вывод необходимых условий оптимальности первого и второго порядка в рассматриваемой задаче.

2. Первая и вторая вариации функционала качества

Считая $(u^o(t), v^o(t), x^o(t), y^o(t))$ оптимальным процессом, обозначим $((\bar{u}(t) = u^o(t) + \Delta u(t), \quad \bar{v}(t) = v^o(t) + \Delta v(t), \bar{x}(t) = x^o(t) + \Delta x(t), \bar{y}(t) = y^o(t) + \Delta x(t))$ произвольный допустимый процесс и запишем формулу приращения функционала

$$\Delta S(u^o, v^o) = S(\bar{u}, \bar{v}) - S(u^o, v^o) = \varphi(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x^o(t_1)) + \phi(\bar{y}(T)) - \phi(y^o(T)). \tag{4}$$

Ясно, что приращение $(\Delta x(t), \Delta y(t))$ траектории $(x^o(t), y^o(t))$ будет удовлетворять системе

$$\Delta x(t+1) = \sum_{\tau=t_0}^{t} [f(t, \tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) - f(t, \tau, x(\tau), u(\tau))], \tag{5}$$

$$\Delta x(t_0) = 0, \quad t \in T_1, \tag{6}$$

$$\Delta \dot{y}(t) = \int_{t_0}^{t} [g(t, \tau, \bar{y}(\tau), \bar{v}(\tau)) - g(t, \tau, y(\tau), v(\tau))] d\tau, \quad t \in T_2, \tag{7}$$

$$\Delta y(t_1) = G(\bar{x}(t_1)) - G(x^o(t_1)). \tag{8}$$

Пусть $(\psi(t), p(t))$ — неизвестная $(n+m)$-мерная вектор-функция.

Умножив обе части соотношений (5), (7) соответственно на $\psi(t)$, $p(t)$ скалярно, а затем просуммировав и проинтегрировав полученные тождества по T_1 и T_2, будем иметь

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t) \Delta x(t+1) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{\tau=t}^{t_1-1} \psi'(\tau) [f(\tau, t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(\tau, t, x(t), u(t))], \tag{9}$$

 ISSN 0572-2691

$$\int_{t_1}^{T} p'(t)\,\Delta\dot{y}(t)\,dt = \int_{t_1}^{T}\int_{t}^{T} p'(\tau)[g(\tau, t, \overline{y}(t), \overline{v}(t)) - g(\tau, t, y(t), v(t))]\,d\tau\,dt. \qquad (10)$$

Ясно, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t)\,\Delta x(t+1) = \psi'(t_1-1)\,\Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1)\,\Delta x(t),$$

$$\int_{t_1}^{T} p'(t)\,\Delta\dot{y}(t)\,dt = p'(T)\,\Delta y(T) - p'(t_1)\,\Delta y(t_1) - \int_{t_1}^{T} \dot{p}'(t)\,\Delta y(t)\,dt.$$

Отсюда с учетом (8) имеем

$$\int_{t_1}^{T} p'(t)\,\Delta\dot{y}(t)\,dt = p'(T)\,\Delta y(T) - p'(t_1)(G(\overline{x}(t_1)) - G(x^o(t_1))) - \int_{t_1}^{T} \dot{p}'(t)\,\Delta y(t)\,dt.$$

Принимая во внимание эти тождества, формулу приращения (1) запишем в виде

$$\Delta S(u^o,\ v^o) = \varphi(\overline{x}(t_1)) - \varphi(x(t_1)) + \phi(\overline{y}(T)) - \phi(y(T)) + \psi'(t_1-1)\,\Delta x(t_1) +$$
$$+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1)\,\Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{\tau=t}^{t_1-1} \psi'(\tau)[f(\tau, t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)) - f(\tau, t, x(t), u(t))] +$$
$$+ p'(t_2)\,\Delta y(T) - p'(t_1)(G(\overline{x}(t_1)) - G(x^o(t_1))) - \int_{t_1}^{T} \dot{p}'(t)\,\Delta y(t)\,dt -$$
$$- \int_{t_1}^{T}\int_{t}^{T} p'(\tau)[g(\tau, t, \overline{y}(t), \overline{v}(t)) - g(\tau, t, y^o(t), v^o(t))]\,d\tau\,dt. \qquad (11)$$

Введем следующие обозначения:

$$H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = \sum_{\tau=t}^{t_1-1} \psi'(\tau)\, f(\tau,t,x,u),$$

$$M(t, y(t), v(t), p(t)) = \int_{t}^{T} p'(\tau)\, g(\tau,t,y,v)\,d\tau\,,$$

$$N(x) = p'(t_1-1)\,G(x),$$

$$H_x[t] = H_x(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)),\ H_u[t] = H_u(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)),$$

$$H_{xx}[t] = H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)),\ H_{xu}[t] = H_{xu}(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)),$$

$$M_y[t] = M_y(t, y^o(t), v^o(t), p(t)),\ M_v[t] = M_v(t, y^o(t), v^o(t), p(t)),$$

$$M_{yy}[t] = M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p(t)),\ M_{vv}[t] = M_{vv}(t, y^o(t), v^o(t), p(t)),$$

$$f_x[t, \tau] = f_x(t, \tau, x^o(\tau), u^o(\tau)),\ f_u[t, \tau] = f_u(t, \tau, x^o(\tau), u^o(\tau)),$$

$$g_y[t, \tau] = g_y(t, \tau, y^o(\tau), v^o(\tau)),\ g_v[t, \tau] = g_v(t, \tau, y^o(\tau), v^o(\tau)).$$

Формулу приращения (11) представим в виде

$$\Delta S(u^o,\ v^o) = \varphi(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x(t_1)) + \phi(\bar{y}(T)) - \phi(y(T)) + \psi'(t_1-1)\,\Delta x(t_1) +$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t-1)\,\Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1}[H(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\psi(t)) - H(t,x^o(t),u^o(t),\psi(t))] +$$

$$+\,p'(T)\,\Delta y(T) - (N(\bar{x}(t_1)) - N(x(t_1))) - \int_{t_1}^{T}\dot{p}'(t)\,\Delta y(t)\,dt -$$

$$-\int_{t_1}^{T}[M(t,\bar{y}(t),\bar{v}(t),p(t)) - M(t,y^o(t),v^o(t),p(t))]\,dt. \qquad (12)$$

Используя формулу Тейлора из (12), после некоторых преобразований получим

$$\Delta S(u^o,\ v^o) = \varphi_x(x^o(t_1))\,\Delta x(t_1) + \frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\,\varphi_{xx}(x^o(t_1))\,\Delta x(t_1) + \phi'_y(y^o(t))\,\Delta y(T) +$$

$$+\frac{1}{2}\Delta y'(T)\,\phi(y^o(T))\,\Delta y(T) + \sum_{t=t_o}^{t_1-1}\psi'(t-1)\,\Delta x(t) - \sum_{t=t_o}^{t_1-1}H'_x[t]\,\Delta x(t) - \sum_{t=t_o}^{t_1-1}H'_u[t]\,\Delta u(t) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_o}^{t_1-1}\Delta x'(t)\,H_{xx}[t]\,\Delta x(t) - \frac{1}{2}\sum_{t=t_o}^{t_1-1}\Delta u'(t)\,H_{uu}[t]\,\Delta u(t) - \sum_{t=t_o}^{t_1-1}\Delta x'(t)\,H_{xu}[x]\,\Delta u(t) +$$

$$+\,p'(T)\,\Delta y(T) - N'_x(x^o(t_1))\,\Delta x(t_1) - \frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\,N_{xx}(x^o(t_1))\,\Delta x(t_1) - \int_{t_1}^{T}\dot{p}'(t)\,\Delta y(t)\,dt -$$

$$-\int_{t_1}^{T}M'_y[t]\,\Delta y[t]\,dt - \int_{t_1}^{T}M'_v[t]\,\Delta v(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{T}\Delta y'(t)\,M_{yy}[t]\,\Delta y(t)\,dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{T}\Delta v'(t)\,M_{vv}[t]\,\Delta v(t)\,dt - \int_{t_1}^{T}\Delta y'(t)\,M_{yv}[t]\,\Delta v(t)\,dt + \eta(\Delta u,\,\Delta v). \qquad (13)$$

Здесь по определению

$$\eta(\Delta u,\,\Delta v) = o_1(\|\Delta x(t_1)\|^2) + o_2(\|\Delta y(T)\|^2) - o_3(\|\Delta x(t_1)\|^2) -$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}o_4(\|\Delta z(t)\|^2) - \int_{t_1}^{T}o_5(\|\Delta k(t)\|^2)\,dt, \qquad (14)$$

где $\Delta z(t) = (\Delta x,\,\Delta u)'$, $\Delta k(t) = (\Delta y,\,\Delta v)'$.

Кроме того, величины $o_i(\cdot)$, $i = \overline{1,5}$, определяются соответственно из разложений

$$\varphi(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x^o(t_1)) = \varphi_x(x^o(t_1))\,\Delta x(t_1) + \frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\,\varphi_{xx}(x(t_1))\,\Delta x(t_1) + o_1(\|\Delta x(t_1)\|^2),$$

$$\phi(\bar{y}(T)) - \phi(y^o(T)) = \phi'_y(y^o(T))\,\Delta y(T) + \frac{1}{2}\Delta y'(T)\,\phi_{yy}(y^o(T))\,\Delta y(T) + o_2(\|\Delta y(T)\|^2),$$

ISSN 0572-2691

$$N(\bar{x}(t_1)) - N(x^o(t_1)) = N_x(x^o(t_1))\,\Delta x(t_1) + \frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\,N_{xx}(x(t_1))\,\Delta x(t_1) + o_3(\|\Delta x(t_1)\|^2),$$

$$H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)) = H_x[t]\,\Delta x(t) + H_u[t]\,\Delta u(t) +$$

$$+\frac{1}{2}\Delta x'(t)\,H_{xx}[t]\,\Delta x(t) + \frac{1}{2}\Delta u'(t)\,H_{uu}[t]\,\Delta u(t) + \Delta x'(t) H_{xu}[t]\,\Delta u(t) + o_4(\|\Delta z(t)\|^2),$$

$$M(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t), p(t)) - M(t, y^o(t), v^o(t), p(t)) = M_y[t]\,\Delta y(t) + M_v[t]\,\Delta v(t) +$$

$$+\frac{1}{2}\Delta y'(t)\,M_{yy}[t]\,\Delta y(t) + \Delta y(t)\,M_{yv}[t]\,\Delta v(t) + o_5(\|\Delta k(t)\|^2).$$

Если предположить, что вектор-функция $(\psi(t), p(t))$ является решением задачи

$$\begin{gathered} \psi(t-1) = H_x[t], \\ \psi(t_1 - 1) = -\varphi_x(x^o(t_1)) + N_x(x^o(t_1)), \\ \dot{p}(t) = M_y[t], \\ p(T) = -\phi_y(y^o(T)), \end{gathered} \tag{15}$$

то формула приращения (13) примет вид

$$S(u^o, v^o) = -\left[\sum_{t=t_o}^{t_1-1} H_u[t]\Delta u(t) + \int_{t_1}^{T} M[t]\Delta v(t)\,dt\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\Bigg[\Delta x'(t_1)[\varphi_{xx}(x^o(t_1)) - N(x^o(t_1))]\Delta x(t_1) + \Delta y'(T)\,\phi_{yy}(y^o(T))\,\Delta y(t) -$$

$$-\sum_{t=t_o}^{t_1-1}\Delta x'(t)\,H_{xx}[t]\,\Delta x(t) - \sum_{t=t_o}^{t_1-1}\Delta u'(t)\,H_{uu}[t]\,\Delta u(t) - 2\sum_{t=t_o}^{t_1-1}\Delta x'(t)\,H_{xu}[t]\,\Delta u(t) -$$

$$-\int_{t_1}^{T}\Delta y'(t) M_{yy}[t]\,\Delta y(t)\,dt - \int_{t_1}^{T}\Delta v'(t) M_{vv}[t]\,\Delta v(t)\,dt - 2\int_{t_1}^{T}\Delta y'(t) M_{yv}[t]\,\Delta v(t)\,dt\Bigg] +$$

$$+\eta(\Delta u, \Delta v). \tag{16}$$

Уравнения (15) назовем сопряженной системой в рассматриваемой задаче управления. Специальное приращение оптимального управления $(u^o(t), v^o(t))$ в силу открытости областей управления U, V можно определить по формуле

$$\begin{gathered} \Delta u(t; \varepsilon) = \varepsilon\delta u(t),\ t \in T_1, \\ \Delta v(t; \varepsilon) = \varepsilon\delta v(t),\ t \in T_2. \end{gathered} \tag{17}$$

Здесь $\delta u(t),\ t \in T,$ — произвольная r-мерная вектор-функция со значениями из R^r, $\delta v(t), t \in T,$ — произвольная кусочно-непрерывная вектор-функция со значениями из R^q, а ε — достаточно малое по абсолютной величине число.

Пусть $(\Delta x(t;\varepsilon), \Delta y(t;\varepsilon))$ — специальное приращение оптимальной траектории $(x^o(t), y^o(t))$, отвечающее приращению $(\Delta u(t;\varepsilon), v(t;\varepsilon))$ управления $(u^o(t), v^o(t))$.

Из (5)–(8), используя формулу Тейлора и лемму Гроноулла–Беллмана, по схеме [5, с. 15–21; 12, с. 22–25; 14, с. 33–38] доказывается справедливость оценок:

$$\left\|\Delta x(t)\right\| \le L \sum_{t=t_0}^{t_1} \left\|\Delta u(t)\right\|,$$
$$\left\|\Delta y(t)\right\| \le L\left[\sum_{t=t_0}^{t_1} \left\|\Delta u(t)\right\| + \int_{t_1}^{T} \left\|\Delta v(t)\right\| dt\right], \tag{18}$$
$$L = \text{const} > 0.$$

Из (18) с учетом (17) сразу следует, что $\left\|\Delta x(t;\varepsilon\right\|, \left\|\Delta y(t;\varepsilon\right\|$ имеют порядок малости ε и, кроме того, для $\Delta x(t;\varepsilon)$ и $\Delta y(t;\varepsilon)$ справедливо утверждение.

Лемма. Для специального приращения $(\Delta x(t;\varepsilon), \Delta y(t;\varepsilon))$ управления траектории $(u^{\text{o}}(t), v^{\text{o}}(t))$ справедливо разложение

$$\Delta x(t;\varepsilon) = \varepsilon\delta x(t) + o_1(\varepsilon;t),$$
$$\Delta y(t;\varepsilon) = \varepsilon\delta y(t) + o_2(\varepsilon;t). \tag{19}$$

Здесь $(\delta x(t), \delta y(t))$ — вариация траектории, $(x^o(t), y^o(t))$ — решение следующей системы линейных неоднородных разностных и интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра:

$$\delta x(t+1) = \sum_{\tau=t_0}^{t} [f_x[t,\tau]\delta x(\tau) + f_u[t,\tau]\delta u(\tau)],$$
$$\delta x(t_0) = 0, \tag{20}$$

$$\delta\dot{y}(t) = \int_{t_1}^{t} [g_y[t,\tau]\delta y(\tau) + g_v[t,\tau]\delta v(\tau)]]d\tau, \tag{21}$$
$$\delta y(t_1) = G_z(x^o(t_1))\delta x(t_1).$$

Следуя, например, [13], (20)–(21) назовем уравнением в вариациях для рассматриваемой задачи.

Принимая во внимание (14), (17)–(19) в (16), покажем справедливость разложения

$$S(u^o + \varepsilon\delta u, v^o + \varepsilon\delta v) - S(u^o, v^o) = -\varepsilon\left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_u[t]\Delta u(t) + \int_{t_1}^{T} M_v[t]\Delta v(t)\,dt\right] +$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left[\delta x'(t_1)[\varphi_{xx}(x^o(t_1)) - N_{xx}(x^o(t_1))]\delta x(t_1) + \delta y'(T)\,\phi_{yy}(y^o(T))\,\delta y(t) -\right.$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\delta x'(t)H_{xx}[t]\delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\delta u'(t)H_{uu}[t]\delta u(t) - 2\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\delta x'(t)\,H_{xu}[t]\delta u(t) -$$

 ISSN 0572-2691

$$-\int_{t_1}^{T}\delta y'(t)M_{yy}[t]\delta y(t)\,dt-\int_{t_1}^{T}\delta v'(t)M_{vv}[t]\delta v(t)\,dt-2\int_{t_1}^{T}\delta y'(t)M_{yv}[t]\delta v(t)\,dt\Bigg]+o(\varepsilon^2). \quad (22)$$

Из (22) следует, что первая и вторая вариации функционала (1) (в классическом смысле) имеют соответственно следующий вид:

$$\delta^1 S(u^o, v^o; \delta u, \delta v) = -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_u[t]\Delta u(t) - \int_{t_1}^{T} M_v[t]\Delta v(t)\,dt, \quad (23)$$

$$\delta^2 S(u^o, v^o; \delta u, \delta v) = \delta x'(t_1)(\varphi_{xx}(x^o(t_1)) - N_{xx}(x^o(t_1)))\delta x(t_1) +$$
$$+\delta y'(T)\,\phi_{yy}(y^o(T))\,\delta y(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\delta x'(t)H_{xx}[t]\delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\delta u'(t)H_{uu}[t]\delta u(t) -$$
$$-2\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\delta x'(t)H_{xu}[t]\delta u(t) - \int_{t_1}^{T}\delta y'(t)M_{yy}[t]\delta y(t)\,dt -$$
$$-\int_{t_1}^{T}\delta v'(t)\,M_{vv}[t]\delta v(t)\,dt - 2\int_{t_1}^{T}\delta y'(t)M_{yv}[t]\delta v(t)\,dt. \quad (24)$$

3. Необходимые условия оптимальности

Известно (см., например, [13, с. 51–53]), что вдоль оптимального процесса первая вариация функционала качества равна нулю, а вторая вариация неотрицательна, т.е.

$$\delta^1 S(u^o, v^o; \delta u, \delta v) = 0, \quad (25)$$

$$\delta^2 S(u^o, v^o; \delta u, \delta v) \geq 0 \quad (26)$$

для всех $\delta u(t) \in R^r,\ t \in T_1,\ \delta v(t) \in R^r,\ t \in T_2$.

Из тождества (25) с учетом (23) в силу произвольности и независимости вариаций $\delta u(t),\ \delta v(t)$ управляющих воздействий получаем, что

$$\begin{aligned} H_u[\theta] = 0,\ \theta \in T_1, \\ M_v[\theta] = 0,\ \theta \in T_2, \end{aligned} \quad (27)$$

— произвольная точка непрерывности управления $v(t)$.

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1 (аналог уравнения Эйлера). Для оптимальности допустимого управления $(u^o(t), v^o(t))$ в задаче (1), (2) необходимо, чтобы выполнялись соотношения (27).

Аналог уравнения Эйлера является необходимым условием оптимальности первого порядка. Используя неравенство (26), удается получить необходимые условия оптимальности второго порядка, непосредственно выраженные параметрами задачи (1), (2).

Поскольку (20) и (21) — соответственно линейные неоднородные разностные и интегральные уравнения типа Вольтерра относительно $\delta x(t),\ \delta y(t)$, то их решения (см., например, [15–18]) можно представить в виде

$$\delta x(t) = \sum_{s=t_0}^{t-1} F_1(t, s)\,\delta u(s), \tag{28}$$

$$\delta y(t) = \int_{t_1}^{t} F_2(t, s)\,\delta v(s)\,ds + Q(t, t_1)\,G_x(x^o(t_1))\,\delta x(t_1). \tag{29}$$

Здесь по определению

$$F_1(t, s) = \sum_{\tau=s}^{t-1} R(t-1, \tau)\, f_u[\tau, s],$$

$$F_2(t, s) = \int_{s}^{t} Q(t, \tau)\, g_v[\tau, s]\,d\tau,$$

где $R(t, \tau)$ и $Q(t, \tau)$ — матричные функции соответствующих размерностей, являющихся решениями задач

$$\begin{cases} R(t, s-1) = \sum\limits_{\tau=s}^{t} R(t, \tau)\, f_x[\tau, s], \\ R(t, t) = E_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{Q}_s(t, \tau) = -\int\limits_{s}^{t} Q(t, \tau)\, g_v[\tau, s]\,\delta y(s)\,d\tau, \\ Q(t, t) = E_2, \end{cases}$$

где E_1 и E_2 — единичные матрицы соответствующих размерностей.

Далее формулу (29) с учетом (28) запишем

$$\delta y(t) = \int_{t_1}^{t} F_2(t, s)\,\delta v(s)\,ds + Q(t, t_1)\,G_x(x^o(t_1)) \sum_{s=t_0}^{t_1-1} F_1(t_1, s)\,\delta u(s). \tag{30}$$

С помощью выражений (28), (30) получим необходимые условия оптимальности второго порядка.

Из (24), (26) следует, что вдоль оптимального управления $(u^o(t), v^o(t))$ выполняются соотношения

$$\delta^2 S(u, v; \delta u, 0) = \delta x'(t_1)(\varphi_{xx}(x^o(t_1)) - N_{xx}(x^o(t_1)))\,\delta x(t_1) +$$

$$+\,\delta y'(T)\,\Phi_{yy}(y^o(T))\,\delta y(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta x'(t)\,H_{xx}[t]\,\delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta u'(t)\,H_{uu}[t]\,\delta u(t) -$$

$$-\,2\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta x'(t)\,H_{xu}[t]\,\delta u(t) - \int_{t_1}^{T} \delta y'(t) M_{yy}[t]\,\delta y(t)\,dt \ge 0 \tag{31}$$

для всех $\delta u(t) \in R^r$, $t \in Q_1$;

$$\delta^2 S(u, v; 0, \delta v) = \delta y'(T)\,\Phi_{yy}(y^o(T))\,\delta y(t) - \int_{t_1}^{T} \delta y'(t)\,M_{yy}[t]\,\delta y(t)\,dt -$$

$$-\int_{t_1}^{T}\delta v'(t)M_{vv}[t]\delta v(t)\,dt-2\int_{t_1}^{T}\delta y'(t)M_{yv}[t]\delta v(t)\,dt\ge 0 \qquad (32)$$

для всех $\delta v(t)\in R^q,\ \ t\in T_2$.

В случае, когда $\delta v(t)\equiv 0,\ \ t\in T_1$, (29) принимает вид

$$\delta y(t)=Q(t,t_1)\,G_x(x^o(t_1))\sum_{s=t_0}^{t_1-1}F_1(t_1,s)\,\delta u(s). \qquad (33)$$

С помощью (28), (33) убеждаемся в справедливости следующих тождеств:

$$\delta x'(t_1)(\varphi_{xx}(x^o(t_1))-N_{xx}(x^o(t_1)))\,\delta x(t_1)=$$

$$=\sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1}\sum_{\beta=t_0}^{t_1-1}\delta u'(t)\,F_1'(t_1,\alpha)(\varphi_{xx}(x^o(t_1))-N_{xx}(x^o(t_1)))\,F_1(t_1,\beta)\,\delta u(\beta), \qquad (34)$$

$$\delta y'(T)\,\Phi_{yy}(y^o(T))\,\delta y(t)=\sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1}\sum_{\beta=t_0}^{t_1-1}\delta u'(\alpha)\,Q'(T,t_1)\,G_x'(x^o(t_1))\times$$

$$\times F_1'(t_1,\alpha)\,\Phi_{yy}(y^o(T))\,Q(T,t_1)\,G_x(x^o(t_1))\,F_1(t_1,\beta)\,\delta u(\beta), \qquad (35)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\delta x'(t)H_{xx}[t]\delta x(t)=\sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1}\sum_{\beta=t_0}^{t_1-1}\delta u'(\alpha)\left[\sum_{t=\max(\alpha,\beta)}^{t_1-1}F_1(t,\alpha)\,H_{xx}[t]\,F_1(t,\beta)\right]\delta u(\beta), \qquad (36)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\delta x'(t)\,H_{xu}[t]\delta u(t)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}\delta u'(\alpha)\,H_{xu}[t]\,F_1(t,s)\,\delta u(s), \qquad (37)$$

$$\int_{t_1}^{T}\delta y'(t)\,M_{yy}[t]\,\delta y(t)\,dt=$$

$$=\int_{t_1}^{T}\sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1}\sum_{\beta=t_0}^{t_1-1}\delta u'(\alpha)\,Q'(t,t_1)\,G_x'(x^o(t_1))\,F_1(t,\alpha)\,M_{yy}[t]\,F_2(t,\beta)\,Q(t,t_1)\,G_x(x^o(t_1))\,\delta u(\beta)\,dt. \qquad (38)$$

Полагая

$$K_1(\alpha,\beta)=-F_1(t_1,\alpha)(\varphi_{xx}(x^o(t_1))-N_{xx}(x^o(t_1)))\,F_1(t_1,\beta)-$$

$$-Q'(T,t_1)\,G_x'(x^o(t_1))\,F_1'(t_1,\alpha)\,\Phi_{yy}(y^o(T))\,Q(T,t_1)\,G_x(x^o(t_1))\,F_1(t_1,\beta)+$$

$$+\sum_{t=\max(\alpha,\beta)}^{t_1-1}F_1(t,\alpha)\,H_{xx}[t]\,F_1(t,\beta)+$$

$$+\int_{t_1}^{T}Q'(t,t_1)\,G_x'(x^o(t_1))\,F_1(t,\alpha)\,M_{yy}[t]\,F_2(t,\beta)\,Q(t,t_1)\,G_x(x^o(t_1))\,dt$$

и принимая во внимание тождества (34)–(38), неравенство (31) приведем к виду

$$\sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1}\sum_{\beta=t_0}^{t_1-1}\delta u'(\alpha)\,K(\alpha,\beta)\,\delta u(\beta)+2\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}\delta u'(t)\,H_{xu}[t]\,F_1(t,s)\,\delta u(s)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\delta u'(t)\,H_{uu}[t]\,\delta u(t)\le 0. \tag{39}$$

Теперь предположим, что $\delta u(t)\equiv 0,\ \ t\in T_1$, а $\delta v(t)\ne 0,\ \ t\in T_2$. Тогда из (28), (32) следует, что

$$\delta x(t)=0,\ \ t\in T_1,$$

$$\delta y(t)=\int_{t_1}^{t}F_2(t,s)\,\delta v(s)\,ds,\ \ t\in T_2. \tag{40}$$

Далее, используя (40), получаем следующие выражения:

$$\delta y'(T)\,\Phi_{yy}(y^o(T))\,\delta y(t)=\int_{t_1}^{T}\int_{t_1}^{T}\delta v'(\alpha)\,F_2'(T,\alpha)\,\Phi_{yy}(y^o(T))\,F_2(T,\beta)\,\delta v(\beta)\,d\alpha\,d\beta, \tag{41}$$

$$\int_{t_1}^{T}\delta y'(t)\,M_{yy}[t]\,\delta y(t)\,dt=$$

$$=\int_{t_1}^{T}\int_{t_1}^{T}\delta v'(\alpha)\left[\int_{\max(\alpha,\beta)}^{T}F_2'(t,\alpha)\,M_{yy}[t]\,F_2(t,\beta)\,dt\right]\delta v(\beta)\,d\alpha\,d\beta, \tag{42}$$

$$\int_{t_1}^{T}\delta y'(t)\,M_{yv}[t]\,\delta y(t)\,dt=\int_{t_1}^{t}\int_{t_1}^{t}\delta v'(\alpha)\,F_2(t,\alpha)\,M_{yv}[t]\,\delta v(t)\,d\alpha\,dt. \tag{43}$$

Положим

$$K_2(\alpha,\beta)=-F_2'(T,\alpha)\,\Phi_{yy}(y^o(T))\,F_2(T,\beta)+\int_{\max(\alpha,\beta)}^{T}F_2'(t,\alpha)\,M_{yy}[t]\,F_2(t,\beta)\,dt. \tag{44}$$

Учитывая (44), с помощью (41)–(43) неравенство (32) приведем к виду

$$\int_{t_1}^{T}\int_{t_1}^{T}\delta u'(\alpha)\,K_2(\alpha,\beta)\,\delta u(\beta)\,d\alpha\,dt+\int_{t_1}^{T}\delta v'(t)\,M_{vv}[t]\,\delta v(t)\,dt+$$

$$+\int_{t_1}^{T}\left[\int_{t_1}^{t}\delta v'(\alpha)\,F_2(t,\alpha)\,M_{yv}[t]\,\delta v(t)\,d\alpha\right]dt\le 0. \tag{45}$$

Проанализируем полученный результат.

Теорема 2. Для оптимальности допустимого управления $(u^o(t),v^o(t))$ в задаче (1), (2) необходимо, чтобы неравенства (39) и (45) выполнялись для всех $\delta u(t),\ \ t\in T_1,\ \ \delta v(t)\in R^q,\ \ t\in T_2$, соответственно.

Учитывая довольно общий характер теоремы 3 и используя различные специальные вариации управления, можно получить ряд легко проверяемых необходимых условий оптимальности, в частности аналог условия Лежандра–Клебша.

Аналог условия оптимальности Лежандра–Клебша [13, 20] для рассматриваемой задачи вытекает из полученного критерия оптимальности (теорема 2).

Следствие (аналог условия Лежандра–Клебша). Вдоль оптимального управления $(u^o(t), v^o(t))$ выполняются соотношения

$$u'H_{uu}[\theta]u \le 0 \text{ для всех } u \in R^r \text{ и } \theta \in T,$$

$$v'M_{vv}[\theta]v \le 0 \text{ для всех } v \in R^q \text{ и } \theta \in T_2 \setminus T.$$

Для доказательства следствия достаточно в неравенствах (38) и (45) вариацию $\delta u(t)$, $\delta v(t)$ определить соответственно по формуле

$$\delta u_\delta(t) = \begin{cases} u, & t = \theta \in T_1, \\ 0, & t \ne \theta \in T_1, \end{cases} \quad \delta v_\delta(t) = \begin{cases} v, & t \in [\theta, \theta + \delta) = T_\delta, \\ 0, & t \in T \setminus T_\delta. \end{cases}$$

Здесь δ — достаточно малое произвольное число, $\theta \in T_1$ $(\theta \in T_2)$ — произвольная точка непрерывности управления $v(t)$, а u, v — произвольный вектор.

Заключение. С помощью модификации метода приращений вычислены первая и вторая вариации терминального функционала в ступенчатых задачах оптимального управления, описываемые системой разностных и интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.

Доказано необходимое условие оптимальности первого порядка в форме аналога уравнения Эйлера. С помощью второй вариации получено условие оптимальности второго порядка.

Наконец, определены необходимые условия оптимальности второго порядка в форме условия оптимальности типа Лежандра–Клебша.

Р.О. Масталієв

НЕОБХІДНІ УМОВИ ОПТИМАЛЬНОСТІ ПЕРШОГО І ДРУГОГО ПОРЯДКУ В ОДНІЙ СТУПІНЧАСТІЙ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ З ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНОЮ СИСТЕМОЮ

Розглянуто задачу керування зі ступінчастою структурою, що описана системою різницевих та інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерра. За припущенням відкритості області керування отримано необхідні умови оптимальності першого і другого порядку.

R.O. Mastaliyev

NECESSARY FIRST AND SECOND ORDER OPTIMALITY CONDITIONS IN ONE OPTIMAL CONTROL STEPWISE PROBLEM WITH DISCRETE-CONTINUOUS SYSTEM

The control problem with stepwise structure, which is described by the system of difference and integro-differential equations of the Volterra type is considered. Under assumption of the control domain openness the necessary optimality conditions of the first and the second orders are obtained.

1. *Батурин В.А., Лемперт А.А.* Многоэтапные процессы и методы улучшения в задачах оптимального управления // Вычислительные технологии. — 2003. — **8**. — С. 103–108.
2. *Лемперт А.А., Урбанович Д.Е.* Оптимизация сбросов загрязняющих веществ в бассейне реки при экологических ограничениях // География и природные ресурсы. Спец. выпуск. — 2004. — С. 212–215.
3. *Монастырский М.А.* Оптимальное управление системами, описываемыми интегральными уравнениями Вольтерра // Автоматика и телемеханика. — 1975. — № 1. — С. 29–36.
4. *Мансимов К.Б., Абдуллаев А.А.* Исследование особых управлений в одной задаче управления двумерными интегральными уравнениями типа Вольтерра // Автоматика и вычислительная техника. — 2006. — № 4. — С. 72–81.
5. *Абдуллаев А.А., Мансимов К.Б.* Необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых системой интегральных уравнений типа Вольтерра. — Баку : Элм, 2013. — 224 с.
6. *Абдуллаев А.А.* Об одной задаче управления, описываемой системой интегральных уравнений типа Вольтерра // Изв. АН Азербайджана. Сер.физ.-техн. и мат. наук. — 1995. — № 5-6. — С. 46–49.
7. *Mansimov K.B., Mastaliyev R.O.* Necessary first and second order optimality conditions in problems of control described by a system of Volterra difference equations // Journal Automatic Control and Computer Sciences. — 2008. — **42**, N 2. — P. 71–76.
8. *Мансимов К.Б., Масталиев Р.О.* Об оптимальности квазиособых управлений в задаче управления описываемых системой разностных уравнений Вольтерра // Доклады АН Азербайджана. — 2007. — № 5. — С. 42–46.
9. *Дымков М.П.* Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления: Автореф. дис… д-ра физ.-мат. наук. — Минск, 1997. — 40 с.
10. *Дымков М.П.* Оптимальное управление дискретной системой Вольтерра по квадратичному функционалу // Докл. АН Беларуси. — 1997. — **41**, № 3. — С. 10–16.
11. *Масталиев Р.О.* Об одной ступенчатой задаче оптимального управления дискретными системами // Вестник Бакинского ун-та. Сер. физ.-мат. наук. — 2010. — № 1. — С. 33–39.
12. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. — Минск : Наука и техника, 1974. — 274 с.
13. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. — М. : Наука, 1973. — 256 с.
14. *Мансимов К.Б.* Дискретные системы. — Баку : Изд-во БГУ, 2002. — 114 с.
15. *Колмановский В.Б.* Об асимптотических свойствах решений некоторых нелинейных систем Вольтерра // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 4. — С. 42–51.
16. *Колмановский В.Б.* Об асимптотической эквивалентности решений некоторых разностных уравнений // Там же. — 2001. — № 4. — С. 47–55.
17. *Васильева А.Б., Тихонов А.Н.* Интегральные уравнения. — М. : Изд-во МГУ, 1989. — 550 с.
18. *Цалюк З.Б.* Интегральные уравнения Вольтерра // Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. — 1977. — **15**. — С. 131–198.
19. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. — М. : Наука, 1979. — 432 с.
20. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. — М. : Факториал, 2001. — 824 с.

Получено 26.09.2014