

УДК 519.7

С.М. Онищенко

**ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА
В НЕУСТОЙЧИВОМ ПОЛОЖЕНИИ РАВНОВЕСИЯ**

Введение. В многочисленных публикациях [1–6] последовательно излагались результаты предложенного в 90-х годах прошлого столетия одного из четырех достаточно конструктивных направлений синтеза нелинейных стабилизированных систем, именуемого методами жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации (ЖС НСС).

Особенностью методов ЖС НСС, базирующихся на прямом методе Ляпунова, является жесткая ограниченность структур матриц $D(t)$, $Q(x, t)$ коэффициентов положительно определенных квадратичных форм — функций Ляпунова

$$V(x, t) = x^T D(t) x, \quad W(x, t) = x^T Q(x, t) x \quad (1)$$

мультипликативной параметризацией произвольными неособенными квазитреугольными матрицами D_* , Q_* в виде

$$D = D_* D_*^T, \quad Q = Q_* Q_*^T, \quad (2)$$

причем структура (2) не только гарантирует симметричность и положительную определенность матриц D , Q , но и позволяет использовать в процедуре синтеза нелинейных нестационарных систем стабилизации стационарные матрицы D .

Первоначально эти методы предполагалось реализовывать шестью алгоритмами [2], но в результате проведенных исследований было выделено лишь три конструктивных: первый, второй и шестой [5].

Первый, метод прямого жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации (ПЖС НСС) [3], реализуется рекуррентной процедурой на χ этапах, если размерность системы n не кратна размерности управления m , или на $\chi - 1$ этапе, когда n кратно m , причем каждый этап сопровождается соответствующим условием стабилизируемости.

Особенностью второго, метод простого жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации (ПрЖС НСС), и шестого алгоритма, метод ускоренного жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации (УЖС НСС), является реализация каждого из них на одном этапе с одним матричным условием стабилизируемости.

Математический маятник в верхнем положении равновесия. В качестве примера, который показывает возможности и особенности реализации различных методов ЖС НСС, рассмотрим нелинейную задачу стабилизации математического маятника в верхнем (неустойчивом) положении равновесия с интегрирующим управляющим органом [7].

© С.М. ОНИЩЕНКО, 2015

*Международный научно-технический журнал
«Проблемы управления и информатики», 2015, № 3*

В уравнении

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0 \quad (3)$$

свободных колебаний математического маятника [8] (где ϕ — угол отклонения маятника от вертикали в нижнем (устойчивом) положении равновесия, l — длина маятника, g — ускорение силы земного тяготения, точкой обозначена операция дифференцирования по времени t) примем $g = l$, $\phi = \pi + x_1$. В результате из (3) получим следующее уравнение свободных колебаний математического маятника в верхнем положении равновесия, которое замкнем интегрирующим управлением u :

$$\ddot{x}_1 - \sin x_1 = \int_{t_0}^t u(x_1, \dot{x}_1) dt. \quad (4)$$

Уравнение (4) запишем в форме Коши

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \sin x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (5)$$

Если затем к уравнению (5) применить процедуру из [2, 9], то в результате оно примет квазилинейную форму

$$\dot{x} = (A - bc^T)x, \quad x(t_0) = x_0. \quad (6)$$

Здесь

$$A(x) = \begin{bmatrix} A_{11}(x) & a_{12} \\ a_{21}^T & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{21}^T = [0, 0], \quad a_{22} = 0, \quad x = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = 1, \quad (7a)$$

$$u = -c^T x, \quad c^T = [c_{12}^T, c_3], \quad (7b)$$

так что

$$A - bc^T = \begin{bmatrix} A_{11} & a_{12} \\ -c_{12}^T & -c_3 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Рассматриваемый пример математического маятника удобен тем, что представляет собой нелинейную систему третьего порядка, которая позиционирует его как достаточно нетривиальный и в то же время позволяет проиллюстрировать аналитические подходы к реализации методов ЖС НСС.

Стабилизация математического маятника методом ПЖС НСС. Чтобы далее воспользоваться методом ПЖС НСС [3], выберем для уравнения (6) две функции Ляпунова (1) с жесткой параметризацией их матриц коэффициентов нижними блочнотреугольными неособыми матрицами D_* , Q_* в виде (2), где

$$D_* = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ d_{12}^T D_1 & d_2 \end{bmatrix}, \quad Q_* = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ d_{12}^T Q_1 & \sqrt{2} d_2 q_2 \end{bmatrix}, \quad \det D_i \neq 0, \quad \det Q_i \neq 0, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Тогда матрицы D и Q в соответствии с (2), (9) будут определяться выражениями

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{11} d_{12} \\ d_{12}^T D_{11} & d_{12}^T D_{11} d_{12} + d_{22}^2 \end{bmatrix} = \text{const}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{11} d_{12} \\ d_{12}^T Q_{11} & d_{12}^T Q_{11} d_{12} + 2d_{22}^2 q_{22}^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

и обеспечат квадратичным формам (1) положительную определенность по построению.

Согласно второму методу Ляпунова, для асимптотической устойчивости (стабилизации) системы (6) достаточно, чтобы полная производная положительно определенной функции Ляпунова V из (1), вычисляемая на любой траектории замкнутой системы (6), была отрицательно определенной квадратичной формой: $\dot{V} = -W < 0$, что эквивалентно матричному уравнению Ляпунова

$$D(A - bc^T) + (A - bc^T)^T D = -Q. \quad (11)$$

Чтобы упростить дальнейшие выкладки, подвергнем его E -преобразованию

$$E_3^T D E_3 E_3^{-1} (A - bc^T) E_3 + E_3^T (A - bc^T)^T E_3^{-T} E_3^T D E_3 = -E_3^T Q E_3 \quad (12)$$

неособенной матрицей

$$E_3 = \begin{bmatrix} E_2 & -d_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3^T = \begin{bmatrix} E_2^T & 0 \\ -d_{12}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3^{-1} = \begin{bmatrix} E_2^{-1} & E_2^{-1} d_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

третьего порядка с блоком E_2 второго порядка, который имеет структуру, аналогичную (13). Смысл этого преобразования — приведение матриц (10) к диагональному виду (упрощение их структуры) при соответствующем усложнении структуры матрицы (8).

Поскольку в системе (6) n кратно m ($n = 3, m = 1$) и $\chi = 3$, решение нелинейной задачи стабилизации математического маятника методом ПЖС НСС реализуется на двух этапах с двумя условиями стабилизации.

На первом этапе из уравнения (12) с учетом обозначений (8), (10) получаем условия устойчивости системы (6) в виде

$$E_2^T D_{11} E_2 E_2^{-1} (A_{11} - d_{12} c_{12}^T) E_2 + E_2^T (A_{11} - d_{12} c_{12}^T)^T E_2^{-T} E_2^T D_{11} E_2 = -E_2^T Q_{11} E_2, \quad (14)$$

$$2d_{22}^2 (c_{12}^T d_{12} - c_3) = -2d_{22}^2 q_{22}^2, \quad (14a)$$

$$D_{11} [a_{12} - d_{12} c_3 - (A_{11} - d_{12} c_{12}^T) d_{12}] - c_{12} d_{22}^2 = 0. \quad (14б)$$

Из (14a) нетрудно определить

$$c_3 = q_{22}^2 + c_{12}^T d_{12}, \quad (15)$$

затем выражение (14б) перепишем следующим образом:

$$a_{12} - A_{11} d_{12} - d_{22}^2 D_{11}^{-1} c_{12} - d_{12} q_{22}^2 = 0. \quad (16)$$

Данное выражение представляет собой векторно-матричное соотношение второго порядка и является первым условием стабилизируемости рассматриваемой задачи.

На втором этапе необходимо из уравнения (14), аналогичного исходному (12), но уже второго порядка, идентифицировать компоненту c_{12}^T матрицы c^T из (7б).

В уравнении (14)

$$A_{11}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a(x) & 0 \end{bmatrix}, \quad a_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_{12}^T = [c_1, c_2], \quad (17)$$

причем для удобства

$$a(x) = \frac{\sin x_1}{x_1}, \quad (18)$$

а также принято по аналогии с (10)

$$D_{11} = \begin{bmatrix} d_{11}^2 & d_{11}^2 d_3 \\ d_{11}^2 d_3 & d_{11}^2 d_3^2 + d_4^2 \end{bmatrix}, \quad Q_{11} = 2 \begin{bmatrix} d_{11}^2 q_{11}^2 & d_{11}^2 q_{11}^2 d_3 \\ d_{11}^2 q_{11}^2 d_3 & d_{11}^2 q_{11}^2 d_3^2 + d_4^2 q_2^2 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$d_{12} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & -d_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (19a)$$

После соответствующих преобразований с учетом выражений (17), (19) из (14) для замкнутой подсистемы $\dot{x}_* = (A_{11} - d_{12}c_{12}^T)x_*$, $x_* = [x_1, x_2]^T$ второго порядка, получим следующие условия устойчивости:

$$2d_{11}^2(d_3a - d_2pc_1) = -2d_{11}^2q_{11}^2, \quad (20)$$

$$2d_4^2[d_3(d_2c_1 - a) - d_2c_2] = -2d_4^2q_2^2, \quad (20a)$$

$$d_{11}^2[1 - d_3^2a + d_3d_2pc_1 - (d_1 + d_2)c_2] + d_4^2(a - d_2c_1) = 0, \quad (20б)$$

в которых

$$p = d_* + d_3, \quad d_* = d_1d_2^{-1}, \quad d_2 \neq 0. \quad (21)$$

Из скалярного уравнения Ляпунова (20), записанного для замкнутой скалярной подсистемы $\dot{x}_1 = (d_3a - d_2pc_1)x_1$, квадратичной формы $V = d_{11}^2x_1^2$ и ее производной $\dot{V} = -d_{11}^2q_{11}^2x_1^2$, легко определяется искомая компонента c_1 матрицы управления

$$c^T = [c_1, c_2, c_3]. \quad (22)$$

В результате имеем

$$c_1 = \frac{q_{11}^2 + d_3a}{d_2p}. \quad (23)$$

Анализ выражения (23) объясняет ситуацию с использованием матрицы D в структурном обеспечении условия $d_2 \neq 0$ в (21) и

$$p \neq 0, \quad (24)$$

необходимых, чтобы управление (23) было конечным. Для этого в D достаточно предусмотреть согласно (19a), (21), (24)

$$d_1 \neq -d_2d_3, \quad d_2 \neq 0, \quad (25)$$

но при этом числовые значения параметров d_j , $j = \overline{1, 3}$, матрицы D остаются произвольными (они идентифицируются в процессе обеспечения условий стабилизируемости).

С учетом (23), (25) из (20a) следует

$$c_2 = \frac{d_3q_{11}^2 + pq_2^2 - d_*d_3a}{d_2p}, \quad (26)$$

а соотношение (20б) после исключения в нем управления с помощью выражений (23) и (26) превращается во второе условие стабилизируемости рассматриваемой задачи и приобретает вид

$$pd_{11}^2 + (d_{11}^2d_3p + d_4^2)d_*a - d_4^2q_{11}^2 - d_{11}^2p^2q_2^2 = 0. \quad (27)$$

Что касается управления (15) и условия стабилизируемости (16), то, учитывая (17), (19а), (23), (26), в конечном варианте получим

$$c_3 = q_{11}^2 + q_2^2 + q_{22}^2 \quad (28)$$

и соответственно

$$-d_{11}^2 d_2^2 p d_4^2 - d_{22}^2 d_3 (d_{11}^2 d_3 p + d_4^2) a = d_{22}^2 d_4^2 q_{11}^2 - d_{11}^2 d_{22}^2 p d_3 d_2^2 + d_{11}^2 d_1 d_2 p d_4^2 q_{22}^2, \quad (29)$$

$$d_2 d_4^2 + (d_{22}^2 d_3 - d_1 d_2 d_4^2) a = d_{22}^2 q_2^2 + d_2^2 d_4^2 q_{22}^2. \quad (29a)$$

Чтобы условие стабилизируемости (16) представить в скалярной форме, поскольку $m = 1$, можно уравнение (29) умножить на d_1 и сложить с уравнением (29а), предварительно умноженным на d_2 . Вместе с делением полученного равенства на величину $d_{12}^T d_{12} = d_1^2 + d_2^2$ это эквивалентно умножению слева соотношения (16) на псевдообратную матрицу $d_{12}^T / d_{12}^T d_{12}$. В результате получим

$$d_2(1-d_1) + \left[\frac{d_{22}^2 d_3}{d_4^2} (1-d_* d_3) - d_1 d_2 - \frac{d_{22}^2 d_* d_3}{d_{11}^2 p} \right] a - \frac{d_{22}^2 d_*}{d_{11}^2 p} q_{11}^2 - \frac{d_{22}^2}{d_4^2} (1-d_* d_3) q_2^2 - (d_1^2 + d_2^2) q_{22}^2 = 0. \quad (30)$$

Если далее в (30) исключить q_2^2 с помощью соотношения (27) и потом в (27), (30) ввести обозначения

$$\theta_j(x, \mathbf{G}) = f_j(d, q_{11}^2) + r_j(d) a(x), \quad j = 1, 2, \quad (31)$$

где

$$f_1(d, q_{11}^2) = \frac{d_4^2 p d_2 (1-d_1) - d_{22}^2 (1-d_* d_3)}{d_4^2 p (d_1^2 + d_2^2)} + \frac{d_{22}^2 (1-d_* d_3 - d_* p)}{d_{11}^2 p^2 (d_1^2 + d_2^2)} q_{11}^2, \\ r_1(d) = \frac{d_{11}^2 p d_{22}^2 d_3^2 [1 + d_*^2 (1-d_* d_3) - d_{11}^2 p^2 d_4^2 d_1 d_2 - d_{22}^2 d_4^2 d_* (1+d_3^2)]}{d_{11}^2 p^2 d_4^2 (d_1^2 + d_2^2)}, \quad (32)$$

$$f_2(d, q_{11}^2) = \frac{1}{p} - \frac{d_4^2}{d_{11}^2 p^2} q_{11}^2, \quad r_2(d) = \frac{d_{11}^2 p d_3 + d_4^2}{d_{11}^2 p^2} d_*,$$

то оказывается возможным переписать их в виде $\theta_1(x, \mathbf{G}) = q_{22}^2 > 0$, $\theta_2(x, \mathbf{G}) = q_2^2 > 0$ и прийти к условиям

$$f_j(d, q_{11}^2) + r_j(d) a(x) > \gamma_j > 0, \quad j = 1, 2, \quad (33)$$

с некоторыми заданными $\gamma_j = \text{const} \in \mathbf{R}_1^+$.

В соотношениях (33) присутствуют составляющие f_j , определенные согласно (32) на множестве $\mathbf{G} : \{d, q_{11}^2 / d : d_{jj}, d_s; j = 1, 2; s = \overline{1, 4}\}$ постоянных свобод-

ных компонент матрицы D и произвольной положительной функции $q_{11}^2(x) > 0 \forall x \in \Omega \subset \mathbf{R}_3$. Несмотря на наличие в них нелинейной знакопеременной функции (18), ограниченной диапазоном

$$-0,21 < a(x) \leq 1 \forall x \in [0, \infty), \quad (34)$$

неравенствам (33) с учетом (31) всегда можно удовлетворить нелинейной схемой компромиссов [10], минимизируя нелинейную скалярную функцию

$$J(x, \mathbf{G}) = \sum_{j=1}^2 \frac{\gamma_j}{\theta_j(x, \mathbf{G}) - \gamma_j} \rightarrow \min_{\mathbf{G}} \quad (35)$$

на множестве параметров \mathbf{G} , например, симплекс-методом Нелдера–Мида [11]. При этом функция $q_{11}^2(x)$ предварительно или идентифицируется таким образом, чтобы упростить выражения (31), или же полагается

$$q_{11}^2 = \text{const} > 0, \quad (36)$$

и тогда минимизационная задача (35) решается на множестве произвольных постоянных параметров $\mathbf{G}^* = \{d, q_{11}^2\} = \text{const}$.

Для двух пар значений γ_1, γ_2 в случае (36) из (35) получены следующие результаты для компонент множества \mathbf{G}^* , приведенные в таблице.

Таблица

γ_1	γ_2	d_1	d_2	d_3	d_4	d_{11}	d_{22}	q_{11}^2
0,8	0,1	-0,01	0,1	0,2	0,09	0,1	0,001	5,0
2,0	0,2	-0,2	0,4	0,8	0,4	0,4	0,06	1,25

При этом для функций q оказались справедливыми оценки вида

$$0,1 < q_{11}^2 < 5,1; 1,2 < q_2^2 < 5,0; 1,0 < q_{22}^2 < 5,3$$

(с возрастанием величин γ_1, γ_2 значения параметров d и функций q увеличиваются).

Аналитическая реализация условий стабилизируемости математического маятника методом ПЖС НСС. Отметим, что рассматриваемая задача идентификации параметров $d, q_{11}^2 \in \mathbf{G}$ из условий стабилизируемости (27), (30) допускает аналитическое решение.

Чтобы получить его, рассмотрим соотношения (27), (30) в качестве системы двух неоднородных алгебраических уравнений относительно двух неизвестных q_2^2, q_{22}^2 , например, при следующих значениях параметров $d \in \mathbf{G}$ [12]:

$$d_{11} = 1, d_1 = -d_2^2, d_3 = 2d_2, d_4 = d_2, d_{22} = d_2^2, d^* = -d_2, p = d_2. \quad (37)$$

В результате они примут вид

$$d_2(1 + 2d_2^2)q_2^2 + d_2(1 + d_2^2)q_{22}^2 = 1 + d_2^2 + d_2^3q_{11}^2 + 3d_2^2(1 + 2d_2^2)a(x), \quad (38)$$

$$d_2q_2^2 = 1 - d_2q_{11}^2 - 3d_2^2a(x)$$

и станут зависимыми лишь от двух параметров: произвольных констант d_2, q_{11}^2 или от константы d_2 и функции $q_{11}^2(x) > 0$.

Решая систему (38), получим выражения

$$\begin{aligned} q_2^2 &= \frac{1}{d_2} - q_{11}^2(x) - 3d_2 a(x) > 0, \\ q_{22}^2 &= -\frac{d_2}{1+d_2^2} + \frac{1+3d_2^2}{1+d_2^2} q_{11}^2(x) + 6d_2 \frac{1+2d_2^2}{1+d_2^2} a(x) > 0, \end{aligned} \quad (39)$$

после чего для компонент матрицы управления (22) согласно (23), (26), (28) и с учетом (37) будем иметь

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{q_{11}^2 + 2d_2 a}{d_2^2}, \quad c_2 = \frac{1 + d_2 q_{11}^2 - d_2^2 a}{d_2^2}, \\ c_3 &= \frac{1}{1+d_2^2} \left[\frac{1}{d_2} + (1+3d_2^2) q_{11}^2 + 3d_2(1+d_2^2) a \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

Далее можно рассмотреть два варианта.

Во-первых, можно выбрать функцию $q_{11}^2(x)$ таким образом, чтобы упростить выражения (39).

Например, примем

$$q_{11}^2(x) = \frac{1}{2d_2} - 3d_2 a(x) > 0. \quad (41)$$

Тогда из (39) имеем

$$q_2^2 = \frac{1}{2d_2} = \text{const} > 0, \quad q_{22}^2(x) = \frac{1}{2d_2} + 3d_2 a(x) > 0, \quad (42)$$

и в результате возникает проблема удовлетворения трем неравенствам (41), (42), два из которых включают в себя знакопеременную нелинейную функцию $a(x)$, с помощью единого параметра $d_2 = \text{const}$.

Учитывая величину интервала (34) изменения функции $a(x)$, нетрудно получить следующие условия, которым должен подчиняться параметр d_2 , чтобы выполнялись неравенства (41), (42): $0 < d_2 < \min(\sqrt{\pi}/2; 1/\sqrt{6})$. Они задают границы области возможных значений параметра d_2 в виде (с точностью двух знаков после запятой)

$$0 < d_2 < 0,41. \quad (43)$$

Отметим, что величина диапазона (43) отвечает принятым условиям (37) и при замене их другими также изменится.

Учитывая выражения (40)–(42), можно получить для условий (37) закон управления

$$c^T = \left[\frac{1}{d_2} \left(\frac{1}{2d_2^2} - a(x) \right), \frac{3}{2d_2^2} - 4a(x), \frac{3}{2d_2} \right], \quad (44)$$

обеспечивающий стабилизацию в нуле замкнутой системы

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sin x_1}{x_1} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2d_2^3} + \frac{\sin x_1}{x_1 d_2} & -\frac{3}{2d_2^2} + 4\frac{\sin x_1}{x_1} & -\frac{3}{2d_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad (45)$$

описывающей конечные движения математического маятника около верхнего положения равновесия при интегральном управлении.

Для матриц D и Q при этом оказываются справедливыми выражения

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2d_2 & d_2^2 \\ 2d_2 & 5d_2^2 & 3d_2^3 \\ d_2^2 & 3d_2^3 & 3d_2^4 \end{bmatrix} = \text{const}, \quad (46)$$

$$Q(x) = 2 \begin{bmatrix} d_2^{-1} & 2q_6(x) & d_2q_6(x) \\ 2q_6(x) & d_2q_5(x) & 3d_2^2q_4(x) \\ d_2q_6(x) & 3d_2^2q_4(x) & 3d_2^3 \end{bmatrix}, \quad (46a)$$

где для удобства

$$q_4(x) = 1 - 4d_2^2a(x), \quad q_5(x) = 5 - 24d_2^2a(x), \quad q_6(x) = 1 - 6d_2^2a(x),$$

при значениях d_2 из диапазона (43).

Во-вторых, в соотношениях (39) можно использовать условия (36), (37) и для реализации в (35) представить их в виде

$$d_2 > 0,$$

$$1 - d_2q_{11}^2 - 3d_2^2a(x) > \gamma_3 > 0, \quad (47)$$

$$(1 + 3d_2^2)q_{11}^2 - d_2 + 6d_2(1 + 2d_2^2)a(x) > \gamma_4 > 0,$$

соответствующем (31). В результате из неравенств (47) с учетом (34) устанавливаются следующие границы возможных диапазонов выбора постоянных параметров d_2, q_{11}^2 в зависимости от задаваемых величин $\gamma_i, i = 3, 4$:

$$0 < \frac{\gamma_4 + 2d_2(1 + 1,2d_2^2)}{1 + 3d_2^2} < q_{11}^2 < \frac{1 - 3d_2^2 - \gamma_3}{d_2}, \quad (48)$$

$$0 < d_2 < \sqrt{\frac{1 - \gamma_3}{3}}, \quad 0 < \gamma_3 < 1.$$

Приняв, например, $\gamma_3 = 0,2, \gamma_4 = 2$, неравенствам (47) удалось удовлетворить значениями параметров $d_2 = 0,2, q_{11}^2 = 2,5$.

В рассматриваемом случае матрица управления c^T вместо (44) принимает более громоздкий вид

$$c^T = d_2^{-2} [q_{11}^2 + 2d_2a(x), 1 + d_2q_{11}^2 - d_2^2a(x), \\ d_2(1 + d_2^2)^{-1} \{1 + d_2(1 + 3d_2^2)(q_{11}^2 + 3d_2^2a(x))\}], \quad (49)$$

но оказывается зависимой от произвольного параметра q_{11}^2 из диапазона (48); для матрицы D остается справедливым выражение (46), а матрица Q представляется следующим образом:

$$Q(x) = 2 \begin{bmatrix} q_{11}^2 & 2d_2q_{11}^2 & d_2^2q_{11}^2 \\ 2d_2q_{11}^2 & d_2 + 3d_2^2(q_{11}^2 - d_2a) & d_2^2 + d_2^3(q_{11}^2 - 3d_2a) \\ d_2^2q_{11}^2 & d_2^2 + d_2^3(q_{11}^2 - 3d_2a) & d_2^3(1 + d_2^2)^{-1} \{1 + d_2(1 + 3d_2^2)(q_{11}^2 + 3d_2a)\} \end{bmatrix}$$

и при значениях параметров d_2, q_{11}^2 из диапазона (48) оказывается положительно определенной.

Стабилизация математического маятника методом УЖС НСС. Для сравнения приведем результаты решения задачи стабилизации математического маятника методом УЖС НСС (результаты, получаемые методом ПрЖС НСС, аналогичны). Для этого обратимся к системе уравнений (14), в которой по-прежнему компоненту c_3 матрицы управления определим из уравнения (14а) соотношением (15). Но далее по методу УЖС НСС исключим c_3 из (14б) и из выражения (16) найдем

$$c_{12} = d_{22}^{-2} D_{11}(a_{12} - A_{11}d_{12} - d_{12}q_{22}^2). \quad (50)$$

Формула (50) позволяет, во-первых, в сочетании с (15), (17) и (19), (19а) записать окончательное равенство для c_3 в виде

$$c_3 = \frac{d_{11}^2 d_{13}(d_3 - d_2) + d_4^2 d_2}{d_{22}^2} - \frac{d_{11}^2 d_3 d_{13} + d_4^2 d_2}{d_{22}^2} d_1 a(x) + \left(1 - \frac{d_{11}^2 d_{13}^2 + d_4^2 d_2^2}{d_{22}^2} \right) q_{22}^2(x), \quad (51)$$

а во-вторых, с учетом обозначений (17), (19), (19а) после соответствующих преобразований получить две другие компоненты матрицы управления. В результате получим

$$c_1 = d_{11}^2 [(d_3 - d_2) - d_1 d_3 a(x) - d_{13} q_{22}^2(x)], \quad (52)$$

$$c_2 = d_{11}^2 d_3 (d_3 - d_2) + d_4^2 - d_1 (d_{11}^2 d_3^2 + d_4^2) a(x) - (d_{11}^2 d_3 d_{13} + d_2 d_4^2) q_{22}^2(x).$$

Здесь для удобства

$$d_{13} = d_1 + d_2 d_3. \quad (53)$$

Для того чтобы получить условия стабилизируемости, достаточно в уравнении (14) исключить c_{12} , используя выражение (50), и после E -преобразования с учетом обозначений (17), (19), (53) прийти к таким равенствам:

$$d_{11}^2 d_{13}(d_3 - d_2) - (d_{22}^2 + d_{11}^2 d_1 d_{13}) d_3 a(x) - d_{11}^2 d_{13}^2 q_{22}^2(x) = d_{22}^2 q_{11}^2(x),$$

$$d_4^2 d_2 + (d_{22}^2 d_3 - d_4^2 d_1 d_2) a(x) - d_4^2 d_2^2 q_{22}^2(x) = d_{22}^2 q_2^2(x), \quad (54)$$

$$d_{11}^2 \{d_{22}^2 - d_4^2 [d_2(d_3 - d_2) + d_{13}]\} + [d_{22}^2 (d_4^2 - d_{11}^2 d_3^2) + d_{11}^2 d_4^2 d_1 (d_{13} + d_2 d_3)] a(x) + 2d_{11}^2 d_4^2 d_2 d_{13} q_{22}^2(x) = 0.$$

Этим условиям можно удовлетворить аналитически, воспользовавшись соотношениями между компонентами матрицы D , аналогичными (37) в методе ПЖС НСС, а именно:

$$d_{11}^2 = 1, \quad d_1 = -d_2^2, \quad d_3 = 2d_2, \quad d_4^2 = d_2^2, \quad d_{22}^2 = d_2^4, \quad d_{13} = d_2^2. \quad (55)$$

Тогда условия стабилизируемости (54) примут более простую форму

$$\frac{1}{d_2} - q_{22}^2(x) = q_{11}^2(x), \quad \frac{1}{d_2} + 3d_2 a(x) - q_{22}^2(x) = q_2^2(x), \quad \frac{1}{2d_2} + 3d_2 a(x) - q_{22}^2(x) = 0,$$

а после исключения из первых двух функции $q_{22}^2(x)$, найденной из третьего условия, окончательно получим выражения (41), (42), которым по-прежнему удовлетворяет соотношение (43).

Что касается матрицы управления, то согласно (51), (52), (55) она примет вид

$$c^T = \left[\frac{d_2}{2}(1 - 2d_2^2 a), \frac{3}{2}d_2^2(1 - 8d_2^2 a), \frac{3}{2d_2} \right] \quad (56)$$

и будет отличаться от соответствующей матрицы управления (44) в методе ПЖС НСС, хотя и обеспечит стабилизацию в нуле замкнутой системы

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sin x_1}{x_1} & 0 & 1 \\ \frac{d_2}{2}(1 - 2d_2^2 \frac{\sin x_1}{x_1}) & \frac{3}{2}d_2^2(1 - 8d_2^2 \frac{\sin x_1}{x_1}) & \frac{3}{2d_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

описывающей конечные движения математического маятника около верхнего положения равновесия при интегральном управлении.

Для матрицы D по-прежнему будет справедливо выражение (46), а матрица Q при этом, в отличие от (46а), примет вид

$$Q = \begin{bmatrix} d_2^{-1} - 6d_2 a(x) & 2 - 12d_2^2 a(x) & 1 - 6d_2^2 a(x) \\ 2 - 12d_2^2 a(x) & 5d_2 - 24d_2^3 a(x) & 4d_2^2 - 12d_2^4 a(x) \\ 1 - 6d_2^2 a(x) & 4d_2^2 - 12d_2^4 a(x) & 2d_2^3 + 6d_2^5 a(x) \end{bmatrix}$$

и при значениях d_2 из диапазона (43) будет положительно определенной.

Оптимальная стабилизация математического маятника методами ЖС НСС.

Проблема оптимальной стабилизации и управления системами (объектами) возникает при ограниченных энергетических ресурсах, когда реализация управления определенной мощности, необходимой для перевода объекта из одной точки пространства в другую или, в частности, для точной стабилизации системы, невозможна. При этом приходится мириться с остаточными погрешностями стабилизации либо с переходом объекта в приближенную окрестность заданной точки.

Проблема обеспечения кратчайшего пути или наименьшего времени реализации движения объекта принципиально не отличается от проблемы с его ограниченной энергетикой: во всех задачах оптимизации количественная характеристика степени достижения или установления компромисса между энергетическими затратами и величинами остаточных погрешностей в системе невозможна без критерия качества, чаще интегрального квадратичного, минимум которого и должно обеспечивать оптимальное управление — лучшее для заданного критерия.

Для оптимальной стабилизации математического маятника используем критерий обобщенной работы А.А. Красовского [13]

$$I(x, u, u_{\text{opt}}) = \int_{t_0}^{\infty} (x^T Q(x, t) x + u^T R^{-1} u + u_{\text{opt}}^T R^{-1} u_{\text{opt}}) dt \rightarrow \min_{u \in U}$$

который при оптимальном управлении

$$u_{\text{opt}} = -k^T x = -Rb^T D x \quad (57)$$

переписывается в виде

$$I(x, u, u_{\text{opt}}) = \int_{t_0}^{\infty} (x^T Q(x, t) x + u^T R^{-1} u + x^T D b R b^T D x) dt \rightarrow \min_{u \in U} \quad (58)$$

и отличается от традиционного критерия Летова–Калмана

$$I(x, u) = \int_{t_0}^{\infty} [x^T Q(x, t)x + u^T R^{-1}u] dt \quad (59)$$

дополнительным квадратичным членом $DbRb^T D$ под интегралом, формально совпадающим с квадратичным слагаемым в матричном уравнении Риккати

$$\dot{D} + DA + A^T D - DbRb^T D = -Q. \quad (60)$$

Поэтому формально можно утверждать, что А.А. Красовский перенес этот квадратичный член из уравнения Риккати (60) в критерий качества (59), превратив его в критерий обобщенной работы (58), а уравнение Риккати (60) — в уравнение Ляпунова

$$\dot{D} + DA + A^T D = -Q \quad (61)$$

(к сожалению, для разомкнутой системы).

Таким образом, при синтезе оптимальных систем с критерием А.А. Красовского необходимо, чтобы исходная система (3) была асимптотически устойчивой. Это достаточно обременительное условие с самого начала выступало как чрезвычайно сдерживающий фактор при использовании метода А.А. Красовского, поскольку большинство реальных объектов без управления является неустойчивым (и в частности, рассматриваемый математический маятник в верхнем положении равновесия).

Однако в совокупности с методами ЖС НСС применение критерия обобщенной работы позволяет успешно синтезировать оптимальные нелинейные системы стабилизации [6]. Ведь эти методы обеспечивают, например, при синтезе матрицы управления (76) в математическом маятнике справедливость матричного уравнения Ляпунова (11), вместо (61), даже в случае стационарной матрицы D . При этом матрица D оказывается оптимальной согласно критерию обобщенной работы и определяет структуру оптимального регулятора (57) или с учетом обозначений (7а), (46) и

$$R = \text{diag} \{r_i\} > 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (62)$$

соответственно

$$u_{\text{opt}} = -[r_1 d_2^2, 3r_2 d_2^3, 3r_3 d_2^4]x \quad (63)$$

при значениях d_2 из диапазона (43).

Далее рассмотрим два подхода к реализации этой оптимизационной процедуры.

Первый подход заключается в формальном принудительном вложении стабилизирующего управления, синтезированного одним из методов ЖС НСС, в структуру оптимального регулятора Летова–Калмана с возможным решением обратной задачи оптимизации. Тогда матрицу c^T , построенную рекуррентной процедурой метода ПЖС НСС в виде (44) (или (49)) или же синтезированную на единственном этапе метода УЖС НСС выражением (56), следует приравнять к матрице

$$k^T = [r_1 d_2^2, 3r_2 d_2^3, 3r_3 d_2^4] \quad (64)$$

оптимального регулятора из (63). В результате для управлений (44), (49) метода ПЖС НСС имеем

$$\frac{1}{d_2^3} \left(\frac{1}{2d_2} - a(x) \right) = r_1 > 0, \quad \frac{1}{d_2^3} \left(\frac{1}{2d_2^2} - \frac{4}{3} a(x) \right) = r_2 > 0, \quad \frac{1}{2d_2^5} = r_3 > 0 \quad (65)$$

и соответственно

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_2^4}[q_{11}^2 + 2d_2a(x)] = r_1 > 0, \quad \frac{1}{3d_2^5}[1 - d_2^2a(x) + d_2q_{11}^2] = r_2 > 0, \\ \frac{1 + d_2(1 + 3d_2^2)[q_{11}^2 + 3d_2^2a(x)]}{3d_2^5(1 + d_2^2)} = r_3 > 0, \end{aligned} \quad (66)$$

а для метода УЖС НСС аналогичные выражения примут вид

$$\frac{1}{2d_2} - d_2a(x) = r_1 > 0, \quad \frac{1}{2d_2} - 4d_2a(x) = r_2 < 0, \quad \frac{1}{2d_2^5} = r_3 > 0. \quad (67)$$

Отметим, что все компоненты диагональной матрицы R из (62) в методе ПЖС НСС при условиях (34), (37) и, соответственно, величинах диапазонов (48) будут положительны в выражениях (65), (66), но их положительность при тех же условиях (34), (37) нарушается в методе УЖС НСС для компоненты r_2 , поэтому первый вариант оптимизации для метода УЖС НСС непригоден.

Согласно второму подходу, к застабилизированной предварительно одним из методов ЖС НСС (в частности, методом ПЖС НСС) системе (45) по тем же каналам аддитивно подается оптимальное управление (64), которое минимизирует критерий обобщенной работы (58) [6, 14, 15]. Этот подход оказывается более удачным, ибо в результате суммарная матрица $c^T + k^T$ в уравнении

$$\dot{x} = \{A - b[c^T + k^T]\}x \quad (68)$$

не только обеспечивает стабилизацию нелинейной системы, но и минимизирует критерий обобщенной работы, обеспечивая значительно лучшее качество переходного процесса.

И если первый подход сопровождается несколько искусственными условиями (65)–(67), обусловленными привлечением обратной задачи оптимизации, то второй является более универсальным и приводит к системе уравнений

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sin x_1}{x_1} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2d_2^3} + \frac{\sin x_1}{x_1 d_2} - d_2^2 r_1 & -\frac{3}{2d_2^2} + 4\frac{\sin x_1}{x_1} - 3d_2^3 r_2 & -\frac{3}{2d_2} - 3d_2^4 r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad (69)$$

которая получается из (6), (45) путем перехода к (68) с учетом (64).

Результаты моделирования движения математического маятника. Моделирование движения математического маятника осуществлялось методом Рунге–Кутты в среде MatLab при начальных условиях $x(0) = [0, 1; 0; 0]$.

На рис. 1 изображено свободное движение математического маятника (без управления). Моделировалось уравнение $\ddot{x}_1 - \sin x_1 = 0$ во временном диапазоне $t = 0 \div 60$ с. Как и следовало ожидать, математический маятник в верхнем положении равновесия в разомкнутом состоянии крайне неустойчив, что и подтверждает рис. 1.

На рис. 2 показано движение математического маятника на интервале $t = 0 \div 10$ с со стабилизирующим управлением (график обозначен «+»), когда моделировалась система (45). Из рисунка видно, что стабилизирующее управление, построенное методом ПЖС НСС, обеспечивает нулевое значение отклонений в системе через 5,2 с после начала движения.

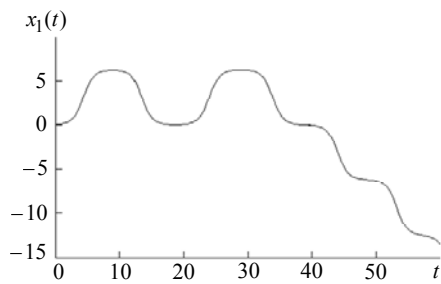


Рис. 1

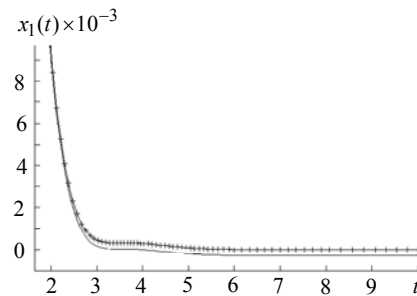


Рис. 2

Поведение предварительно застabilизированного математического маятника с синтезированным оптимальным аддитивным управлением (на рис. 2 обозначено сплошной линией), когда моделировалась система (69) при значениях $r_1 = 0,015$, $r_2 = 0,16$, $r_3 = 0,17$, свидетельствует о выходе системы на нулевое значение угла отклонения маятника через 3,4 с от начала движения.

Стабилизация математического маятника модальным управлением. Следует отметить, что решение задачи стабилизации математического маятника в верхнем положении равновесия с интегральным управлением методами ЖС НСС является исключительно иллюстративным.

В рассматриваемой задаче управление (76) скалярное, а исходное уравнение (4) после дифференцирования превращается в уравнение третьего порядка

$$\ddot{x}_1 - \cos x_1 \cdot \dot{x}_1 = u(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1), \quad x_1(t_0) = x_{10}, \quad \dot{x}_1(t_0) = \dot{x}_{10}, \quad \ddot{x}_1(t_0) = \ddot{x}_{10}. \quad (70)$$

эквивалентное системе в канонической нижней форме Фробениуса [16]

$$\dot{x} = A_*(x)x + bu(x) \quad (71)$$

с матрицами коэффициентов

$$A_*(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos x_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (72)$$

В этом случае даже в нелинейном варианте (71) самым эффективным методом синтеза систем стабилизации оказывается метод модального управления, позволяющий непосредственно получать управление (76) в виде $u = -c^T(x)x$ с матрицей усиления

$$c^T(x) = a_3^T(x) + p^T, \quad (73)$$

где $a_3^T(x) = [0 \cos x_1 \ 0]$ — третья строка матрицы $A_*(x)$ из (72), а p — вектор, компонентами $p_{3-j} = \text{const}$, $j = \overline{1, 3}$, которого являются коэффициенты полинома

$$\varphi_*(\lambda) = \prod_{j=1}^3 (\lambda - \lambda_j^*) = \sum_{j=1}^3 p_{3-j} \lambda^{3-j}, \quad (74)$$

построенного по наперед заданным корням λ_j^* , $j = \overline{1, 3}$, характеристического уравнения $\det(\lambda I_3 - A_p) = 0$ замкнутой системы

$$\dot{x} = [A_*(x) - bc^T(x)]x \quad (75)$$

с постоянной (согласно (72), (73)) матрицей коэффициентов

$$A_*(x) - bc^T(x) = A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 \end{bmatrix} = \text{const.} \quad (76)$$

Таким образом, управление u в уравнении (70), если учесть его матрицу усиления (73), может быть представлено выражением

$$u = -p_2 \ddot{x}_1 - (p_1 + \cos x_1) \dot{x}_1 - p_0 x_1 \quad (77)$$

с коэффициентами $p_j = \text{const}$, $j = \overline{0, 2}$, которые удобно вычислять по формулам теоремы Виета [17]

$$p_0 = -\prod_{j=1}^3 \lambda_j^* = \mu_1(\mu_2^2 + \nu^2), \quad p_1 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}} \lambda_i^* \lambda_j^* = \mu_2^2 + 2\mu_1\mu_2 + \nu^2, \quad (78)$$

$$p_2 = -\sum_{j=1}^3 \lambda_j^* = \mu_1 + 2\mu_2,$$

если желаемые корни λ_j^* , $j = \overline{1, 3}$, характеристического полинома (74) задавать, например, следующим образом:

$$\lambda_1^* = -\mu_1, \quad \lambda_{2,3}^* = -\mu_2 \pm i\nu. \quad (79)$$

Здесь $\mu_1, \mu_2, \nu: \{\mu_k, \nu = \text{const} > 0: \mu_k, \nu \in \mathbf{R}_1^+, k = 1, 2\}$.

В этом случае уравнение (70) с модальным управлением (73) при справедливости равенств (76) примет окончательный вид

$$\ddot{x}_1 + p_2 \dot{x}_1 + p_1 x_1 + p_0 x_1 = 0.$$

Корнями его характеристического уравнения будут числа (79) с отрицательными вещественными частями. Они гарантируют математическому маятнику равномерную асимптотическую устойчивость с самым простым, по сравнению с (44), (49), (56), законом управления (77), (78), который позволяет явным образом влиять как на частоту ν (период колебаний) переходного процесса, так и на характер затухания амплитуд колебаний по каждой координате в отдельности.

Характерно, что реализация модального синтеза систем стабилизации, представленных в нижней канонической форме Фробениуса, основывается на первом методе Ляпунова; всегда гарантирует замкнутой системе (75), (76) любой требуемый запас устойчивости благодаря априорному выбору корней (79) характеристического полинома (74) с любыми по величине отрицательными вещественными частями; не нуждается в дополнительном построении квадратичной формы — функции Ляпунова; не требует рекуррентной процедуры; не сопровождается условиями стабилизируемости.

К сожалению, модальное управление в своем классическом варианте применимо, главным образом, лишь к системам в нижней канонической форме Фробениуса или к линейным стационарным системам, которые можно к

такой форме привести [18]. Проиллюстрированные здесь методы ЖС НСС универсальны — они пригодны для синтеза большого класса нелинейных систем стабилизации, хотя и реализуются несколько более сложными законами управления.

Заключение. На примере математического маятника с интегральным управлением в верхнем (неустойчивом) положении равновесия (нелинейной априори неустойчивой системы третьего порядка) проиллюстрированы возможности и особенности использования достаточно конструктивных методов жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации и их применения в процедуре оптимизации построенных регуляторов.

Установлено, что в результате синтеза оптимального стабилизатора нелинейных систем в случае математического маятника оба метода — и ПЖС НСС, и УЖС НСС — при одинаковых функциях Ляпунова хотя и демонстрируют регуляторы, отличающиеся своими структурами, но условия стабилизируемости в обоих методах оказываются идентичными. При этом им можно удовлетворять как численно, например, любым симплекс-методом (в частности, методом Нелдера–Мида), так и аналитически. Разумеется, аналитический путь обеспечения условий стабилизируемости для нелинейных систем большого порядка даже с применением известных программ символьных вычислений выглядит более чем проблематично, но их численная реализация для большинства реальных объектов не должна сопровождаться заметными проблемами — методы ЖС НСС обладают достаточным количеством свободных параметров, чтобы удовлетворять условиям стабилизируемости численно.

С.М. Онищенко

ОПТИМАЛЬНА СТАБІЛІЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА В НЕСТІЙКОМУ ПОЛОЖЕННІ РІВНОВАГИ

На прикладі математичного маятника з інтегральним керуванням у верхньому (нестійкому) положенні рівноваги (нелінійної априорі нестійкої системи третього порядку) проілюстровано можливості та особливості використання досить конструктивних методів жорсткого синтезу нелінійних систем стабілізації та їх застосування в процедурі оптимізації побудованих регуляторів.

S.M. Onishchenko

OPTIMAL STABILIZATION OF A SIMPLE PENDULUM IN THE UNSTABLE EQUILIBRIUM POSITION

On the example of a simple pendulum with integral control in the upper (unstable) equilibrium position (a priori unstable nonlinear third-order system) it is shown the capabilities and features of using enough constructive methods of hard synthesis of nonlinear stabilization systems and their applications in optimization procedure of built regulators.

1. *Онищенко С.М.* Жесткая монотонная стабилизация нелинейных систем прямым методом Ляпунова // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1991. — № 4. — С. 35–38.
2. *Онищенко С.М.* Прямой подход к синтезу нелинейных систем стабилизации: методы жесткого синтеза // Проблемы управления и информатики. — 2000. — № 2. — С. 5–12.
3. *Онищенко С.М.* Прямой подход к синтезу нелинейных систем стабилизации: метод прямого жесткого синтеза // Там же. — 2000. — № 3. — С. 17–25.
4. *Онищенко С.М.* К проблеме стабилизируемости нелинейных систем // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2011. — № 1. — С. 5–14.
5. *Клименко Е.Л., Коваленко Н.П., Онищенко С.М., Сусол М.Н.* Анализ алгоритмов жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации // Проблемы управления и информатики. — 2006. — № 4. — С. 30–39.
6. *Онищенко С.М.* Жесткая оптимальная стабилизация нелинейных динамических систем // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2014. — № 4. — С. 32–46.
7. *Красовский Н.Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений // Дополнение IV к книге И.Г. Малкина «Теория устойчивости движения». — М. : Наука, 1966. — С. 457–514.
8. *Кильчевский Н.А.* Курс теоретической механики. Т. 2. — М. : Наука, 1966. — С. 457–514.
9. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. — М. : Наука, 1970. — 240 с.
10. *Воронин А.Н.* Методы оценки технических эргатических систем // Технические эргатические системы / Под общ. ред. В.В. Павлова. — Киев : Вища шк., 1977. — С. 101–140.
11. *Банди Б.* Методы оптимизации. — М. : Радио и связь, 1988. — 128 с.
12. *Онищенко С.М.* Анализ прямых методов жесткого синтеза систем стабилизации. — Киев, 1997. — 79 с. — (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 97.12).
13. *Красовский А.А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. — М. : Наука, 1973. — 560 с.
14. *Зубов В.И.* Теория оптимального управления. — Л. : Судостроение. — 1966. — 351 с.
15. *Кунцевич В.М., Лычак М.М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. — М. : Наука, 1977. — 400 с.
16. *Стрейц В.* Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления. — М. : Наука, 1985. — 296 с.
17. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — М. : Наука, 1981. — 720 с.
18. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. — М. : Наука, 1967. — 424 с.

Получено 08.10.2014