УДК 519.8

О.А. Березовский

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННОЙ С ОПРЕДЕЛЕНИЕМ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Введение

При решении задач, связанных с определением инвариантных множеств и синтезом управления параметрами, возникает необходимость решения специальных оптимизационных задач [1–3]. Данная работа посвящена одной из таких задач, решение которой может понадобиться при синтезе управления, минимизирующего область локализации инвариантного множества семейства нелинейных систем, подверженных воздействию ограниченных возмущений. Она формулируется следующим образом:

$$\min_{x \in R^n} (d^{\mathrm{T}} x + k\|x\|) \tag{1}$$

при ограничении

$$(x - x_0)^{\mathrm{T}} Q (x - x_0) \le 1, \tag{2}$$

где заданы симметричная положительно-определенная $n \times n$-матрица Q, n-мерные векторы d и x_0, скаляр k; $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ — длина вектора $x = (x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in R^n$. В случае $k \ge 0$ задача (1), (2) представляет собой задачу выпуклого программирования и относится к специальному классу «second-order cone programming problems» [4, 5], который достаточно исследован (например, в [4] указаны некоторые известные «решатели», реализующие, как правило, модификации метода внутренних точек: AMPL, CPLEX, ECOS, Joptimizer, OpenOpt, SDPT3 и др.). Более интересен случай $k < 0$, когда задача невыпуклая. Именно он и является предметом исследования настоящей работы. Предложенное ниже решение данной задачи основано на представлении ее в виде квадратичной задачи (т.е. в виде оптимизационной задачи, целевая функция и функции ограничений которой представляют собой квадратичные функции (quadratically constrained quadratic programming)) и применении двойственного подхода [6, 7] для нахождения нижней оценки оптимального значения целевой функции полученной задачи. В работе сформулировано условие, при выполнении которого найденная оценка будет точной.

Квадратичная постановка задачи

Задачу (1), (2) для случая $k < 0$ можем записать в виде квадратичной задачи

$$f^* = f_0(x^*) = \min_{x \in R^n,\ y \in R^1} (d^{\mathrm{T}} x + ky) \tag{3}$$

при ограничениях

$$(x - x_0)^{\mathrm{T}} Q (x - x_0) = 1, \tag{4}$$

$$y^2 = x^{\mathrm{T}} x. \tag{5}$$

Отметим, что переменная y, которая соответствует норме вектора x, является величиной положительной. Однако включать соответствующее ограничение в формулировку задачи (3)–(5) нет необходимости, так как оно выполняется автоматически. Это следует из очевидного соотношения

$$f_0(x, \bar{y}) = d^{\mathrm{T}}x + k\bar{y} \le f_0(x, -\bar{y}) = d^{\mathrm{T}}x + k(-\bar{y}),$$

где $k < 0$ и $\bar{y} \ge 0$ — произвольное значение переменной y из области определения задачи (3)–(5).

Воспользуемся двойственной лагранжевой оценкой для квадратичных экстремальных задач [6, 7] для оценки снизу оптимального значения f^* целевой функции в задаче (3)–(5).

Двойственная лагранжева оценка

Рассмотрим общую постановку квадратичной оптимизационной задачи

$$f^* = \min f_0(x) \tag{6}$$

при ограничениях

$$f_i(x) \le 0, \quad i \in I^{LE}, \tag{7}$$

$$f_i(x) = 0, \quad i \in I^{EQ}, \tag{8}$$

где $f_i(x) = x^{\mathrm{T}}A_i x + b_i^{\mathrm{T}}x + c_i,\ i \in \{0\} \cup I^{LE} \cup I^{EQ}$ — произвольные квадратичные функции в пространстве R^n. Двойственная оценка ψ^* оптимального значения f^* целевой функции задачи (6)–(8) определяется как

$$\psi^* = \sup_{u \in D \cap U^+} \psi(u) \le f,^* \tag{9}$$

где

$$\psi(u) = \inf_{x \in R^n} L(x, u); \tag{10}$$

$L(x, u) = x^{\mathrm{T}}A(u)x + b^{\mathrm{T}}(u)x + c(u)$ — функция Лагранжа для задачи (6)–(8), в которой

$$A(u) = A_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i A_i, \quad b(u) = b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i, \quad c(u) = c_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i c_i, \quad m = |I^{LE}| + |I^{EQ}|;$$

U^+ — область определения вектора множителей Лагранжа $u \in R^m$, учитывающая наличие ограничений в виде неравенств: $U^+ = \{u : u_i \ge 0, i \in I^{LE}\}$; D — множество переменных $u \in R^m$, при которых матрица $A(u)$ положительно определена.

Отметим, что определить оценку ψ^* относительно просто, поскольку внутренняя задача (10) является безусловной задачей минимизации выпуклой квадратичной функции, а внешняя задача (9) — задачей максимизации вогнутой функции $\psi(u)$ на выпуклом множестве $U^+ \cap D$. Однако в каждом конкретном случае возникает необходимость исследования точности полученной оценки (см., например, [8–14]).

Для исследуемой задачи (3)–(5) двойственная оценка примет следующий вид:

$$\psi_1^* = \sup_{u \in D}\left(\inf_{z \in R^n} (z^{\mathrm{T}}A_1(u)z + b_1^{\mathrm{T}}(u)z + c_1(u)) \right) \le f,^* \tag{11}$$

где $z = (x, y)^{\mathrm{T}} \in R^{n+1}$, $A_1(u) = \begin{pmatrix} u_1 Q - u_2 I & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}$, $b_1(u) = \begin{pmatrix} d - 2u_1 Q x_0 \\ k \end{pmatrix}$, $\mathrm{c}_1(u) =$ $= u_1(x_0^{\mathrm{T}}Qx_0 - 1)$.

Перед тем как исследовать точность нижней оценки ψ_1^* (11), предварительно сформулируем достаточное условие точности двойственной оценки (9)–(10) для квадратичной задачи общего вида (6)–(8).

Пусть для каждого $u \in (\overline{D} \setminus D) \cap U^+$ определено множество $J(u) = \{j : \lambda_j(u) = 0,\ j \in \{1, ..., n\}\}$, где $\lambda_j(u)$, $j = \overline{1, n}$, — собственные числа квадратичной матрицы $A(u) = A_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i A_i$ функции Лагранжа задачи (6)–(8). И пусть $\xi_j(u)$, $j = \overline{1, n}$, — собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_j(u)$, $j = \overline{1, n}$; x^* и u^* — векторы, в которых достигаются значения f^* и ψ^* в задачах (6)–(8) и (9), (10) соответственно.

Теорема. Если существуют такой вектор p и такое положительное число $\tilde{\varepsilon} > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$

$$\forall u \in (\overline{D} \setminus D) \cap U^+ \ \ \exists j \in J(u) \text{ такое, что } \xi_j^{\mathrm{T}}(u)\left(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i + \varepsilon p\right) \neq 0, \tag{12}$$

то $\psi^* = f^*$. Причем если условие (12) выполняется при $p = 0$, то вектор $x^* = x(u^*) = -A^{-1}(u^*) b(u^*)/2$ решения задачи (9), (10) является и решением задачи (6)–(8).

Доказательство. Рассмотрим нахождение двойственной оценки (9), (10) для задачи (6)–(8). При $u \in D$ внутренняя задача (10) строго выпукла. Следовательно, система $L_x'(x, u) = 0$ имеет единственное решение $x(u) = -A^{-1}(u) b(u)/2$. Это дает возможность записать функцию $\psi(u)$ в явном виде:

$$\psi(u) = -\frac{1}{4} b^{\mathrm{T}}(u) A^{-1}(u) b(u) + c(u) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i\right)^{\mathrm{T}} \left(A_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i A_i\right)^{-1} \left(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i\right) + \left(c_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i c_i\right).$$

Функция $\psi(u)$ вогнута и непрерывно дифференцируема в области D, а значит, и в области определения $D \cap U^+$; ее градиент вычисляется по формулам $\psi'_{u_i} = f_i(x(u)),\ i = \overline{1, m}.$ Исследуем ее, предварительно переписав следующим образом:

$$\psi(u) = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} \left(\xi_j^{\mathrm{T}}(u)(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i)\right)^2 / \lambda_j(u) + \left(c_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i c_i\right) \tag{13}$$

(это выражение получено путем подстановки вместо квадратичной матрицы $A(u)$ функции Лагранжа ее представления $A(u) = A_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i A_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(u) \xi_j(u) \xi_j^{\mathrm{T}}(u)$ с помощью ее собственных чисел $\lambda_j(u)$ и собственных векторов $\xi_j(u)$, $j = \overline{1, n}$).

Понятно, что оценка $\psi^* = \sup_{u \in D \cap U^+} \psi(u)$ (9) может достигаться либо во внутренней точке множества D, либо когда u стремится к границе положительной определенности $\overline{D} \cap D$. Выше для каждого $u \in (\overline{D} \setminus D) \cap U^+$ определено множество $J(u)=\{j:\lambda_j(u)=\min\limits_{l=\overline{1,n}}\lambda_l(u)=0,\ j\in\{1,...,n\}\}$, которое соответствует набору индексов дробных членов в выражении (13), знаменатели которых при данном $u\in(\overline{D}\setminus D)\cap U^+$ обращаются в нуль. Отметим, что для внутренних точек области определения (для $u\in D$) это множество пусто, а на границе неотрицательной определенности (для $u\in\overline{D}\setminus D$) может состоять из одного или более членов, в зависимости от числа кратности $\lambda_{\min}(u)=\min\limits_{l=\overline{1,n}}\lambda_l(u)=0$.

Рассмотрим возможные случаи, которые могут возникать в зависимости от свойств области определения двойственных переменных.

Случай 1. $\forall u\in(\overline{D}\setminus D)\cap U^+\ \ \exists j\in J(u)$ такое, что $\xi_j^T(u)\left(b_0+\sum\limits_{i=1}^m u_i b_i\right)\neq 0$.

В этом случае при стремлении к нулю знаменателей дробных членов в выражении (13) хотя бы один соответствующий числитель не стремится к нулю. Тогда $\psi(u)\to-\infty$ при $u\to\widetilde{u}$ для всех $\widetilde{u}\in(\overline{D}\setminus D)\cap U^+$, т.е. во всех граничных точках области положительной определенности, которые принадлежат допустимой области задачи (9). Во всех остальных точках допустимой области значения функции $\psi(u)$ конечны. Это означает, что в задаче (9) супремум вогнутой функции $\left(\sup\limits_{u\in D\cap U^+}\psi(u)\right)$ достигается во внутренней точке области положительной определенности. Но для данного случая справедливо утверждение, сформулированное Н.З. Шором в виде следующей леммы.

Лемма [6, с. 90, лемма 4.1]. Если $\psi^*=\sup\limits_{u\in D\cap U^+}\psi(u)$ достигается на множестве D, то $\psi^*=f^*$.

Таким образом, в случае 1, который соответствует условию (12) при $p=0$, оценка является точной — $\psi^*=f^*$. Кроме того, если оценка достигается при некотором $u^*\in D$, то, во-первых, $x(u^*)=-K^{-1}(u^*)b(u^*)/2$ определяется однозначно, во-вторых, $f_i(x(u^*))\le 0$, $u_i^* f_i(x(u^*))=0$, $i\in I^{LE}$, и $f_i(x(u^*))=0$, $i\in I^{EQ}$ (напомним, что градиент функции $\psi(u)$ при $u\in D$ совпадает с вектором невязок ограничений задачи (6)–(8)). Следовательно, $x(u^*)=-K^{-1}(u^*)b(u^*)/2$ — допустимая точка задачи (6)–(8) и является ее решением $(f_0(x(u^*))=\psi^*=f^*)$.

Случай 2. $\exists u\in(\overline{D}\setminus D)\cap U^+$ такое, что $\forall j\in J(u)\ \ \xi_j^{\mathrm{T}}(u)\left(b_0+\sum\limits_{i=1}^m u_i b_i\right)=0$.

В данном случае для всех дробных членов в выражении (13) при стремлении к нулю знаменателей соответствующие числители также стремятся к нулю.

Пусть существуют такие вектор $p\in R^n$ и положительное число $\widetilde{\varepsilon}>0$, что для любого $\varepsilon\in(0,\widetilde{\varepsilon})$

$$\forall u\in(\overline{D}\setminus D)\cap U^+\ \ \exists j\in J(u)\ \text{такое, что}\ \xi_j^{\mathrm{T}}(u)\left(b_0+\sum_{i=1}^m u_i b_i+\varepsilon p\right)\neq 0.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу, которая соответствует исходной задаче (6)–(8) с возмущенной целевой функцией $f_\varepsilon(x)=f_0(x)+\varepsilon(p,x)$:

$$f_\varepsilon^*=f_\varepsilon(x_\varepsilon^*)=\min(f_0(x)+\varepsilon(p,x))$$

при ограничениях $f_i(x)\le 0$, $i\in I^{LE}$, $f_i(x)=0$, $i\in I^{EQ}$.

Для этой задачи маргинальная функция будет иметь вид

$$\psi_\varepsilon(u) = -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\left(\xi_j^{\mathrm{T}}(u)(b_0 + \varepsilon p + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i)\right)^2 / \lambda_j(u) + \left(c_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i c_i\right).$$

Тогда, в силу условия (12) теоремы, для возмущенной задачи имеем случай 1, т.е. $\psi_\varepsilon^* = f_\varepsilon^*$. Но поскольку $\left|\psi_\varepsilon^* - \psi^*\right| \to 0$ и $\left|f_\varepsilon^* - f^*\right| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то $\psi^* = f^*$.

Таким образом доказано, что условие (12) является достаточным для того, чтобы $\psi^* = f^*$.

Теорема доказана.

Достаточное условие точности двойственной оценки задачи (3)–(5)

Воспользуемся доказанной выше теоремой для того, чтобы сформулировать достаточное условие точности двойственной оценки для квадратичной задачи (3)–(5) (аналог исследуемой в работе задачи (1), (2)), предварительно представив ее в более удобной для этих целей форме.

Для симметричной вещественной матрицы Q из ограничения (4) имеет место разложение $Q = U\mathrm{diag}(\beta)U^{\mathrm{T}} = \sum_{j=1}^{n}\beta_j\eta_j\eta_j^{\mathrm{T}}$, где $\beta = (\beta_1\beta_2\ldots\beta_n)^{\mathrm{T}}$ — вектор ее собственных чисел и $U = (\eta_1\eta_2\ldots\eta_n)$ — матрица, столбцами которой являются ее собственные векторы η_j, $j = \overline{1, n}$. Обозначим $J_{\min}$ множество индексов собственных чисел, равных минимальному собственному числу $\beta_{\min} = \min_{j=\overline{1, n}}(\beta_j)$ матрицы Q (мощность этого множества равна числу кратности минимального собственного числа); соответствующие им собственные векторы образуют множество $\left\{\eta_j\right\}_{\mathrm{j}\in \mathrm{J}_{\min}}$.

Путем замены переменных $x = U\tilde{x}$ в задаче (3)–(5) получаем задачу

$$f^* = \min_{x\in R^n, \mathrm{y}\in R^1}((U^{\mathrm{T}}d)^{\mathrm{T}}\tilde{x} + ky) \tag{14}$$

при ограничениях

$$(\tilde{x} - U^{\mathrm{T}}x_0)^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\beta)(\tilde{x} - U^{\mathrm{T}}x_0) = 1, \tag{15}$$

$$y^2 - \tilde{x}^{\mathrm{T}}\tilde{x} = 0. \tag{16}$$

Двойственная оценка для задачи (14)–(16) равна

$$\psi_2^* = \sup_{u\in D}\left(\inf_{\tilde{z}\in R^n}(\tilde{z}^{\mathrm{T}}A_2(u)\tilde{z} + b_2^{\mathrm{T}}(u)\tilde{z} + c_2(u))\right) \le f,^* \tag{17}$$

где

$$z = (\tilde{x}, y)^{\mathrm{T}} \in R^{n+1},\ \ A_2(u) = \begin{pmatrix} u_1\mathrm{diag}(\beta) - u_2 I & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix},$$

$$b_2(u) = \begin{pmatrix} U^{\mathrm{T}}d - 2u_1\mathrm{diag}(\beta)U^{\mathrm{T}}x_0 \\ k \end{pmatrix},\ \ \mathrm{c}_2(u) = u_1(x_0^{\mathrm{T}}Qx_0 - 1),$$

I — единичная матрица.

Поскольку невырожденное линейное преобразование не влияет на значение двойственной оценки, двойственные оценки ψ_1^* (11) для задачи (3)–(5) и ψ_2^* (17) для задачи (14)–(16) совпадают: $\psi_1^* = \psi_2^*$. Также не изменяется (с учетом преобразования пространства) и множество точек, на которых это значение достигается.

Утверждение 1. Если система

$$\begin{cases} \eta_j^{\mathrm{T}}(d - 2u_1\beta_{\min}x_0) = 0, \;\; j \in J_{\min}, \\ u_1 > 0 \end{cases} \tag{18}$$

несовместна, то решение задачи (17) дает точку глобального экстремума задачи (14)–(16) и $\psi_2^* = f^*$.

Доказательство. Это утверждение является прямым следствием теоремы из предыдущего раздела. Рассмотрим условие (12) при $p = 0$. Поскольку в задаче (17)

$$D = \{u : \min_{j=\overline{1,n}}(u_1\beta_j - u_2) > 0, u_2 > 0\} = \{u : (u_1\beta_{\min} - u_2) > 0, u_2 > 0\},$$

множество $(\overline{D} \setminus D) = \{u : (u_1\beta_{\min} - u_2) = 0\}$ (переменная u_2 всегда положительна, иначе $\psi_2^* = -\infty$) и $\forall u \in (\overline{D} \setminus D)$ $J(u) = J_{\min}$. Более наглядно это видно из выражения для маргинальной функции для задачи (14)–(16):

$$\psi_2(u) = -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}(U^{\mathrm{T}}d - 2u_1\beta_j U^{\mathrm{T}}x_0)_j^2/(u_1\beta_j - u_2) - k^2/u_2 + u_1(x_0^{\mathrm{T}}Qx_0 - 1) =$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}(\eta_j^{\mathrm{T}}(d - 2u_1\beta_j x_0))^2/(u_1\beta_j - u_2) - k^2/u_2 + u_1(x_0^{\mathrm{T}}Qx_0 - 1),$$

отсюда очевидно, что нулевые знаменатели на границе $\overline{D}$ могут быть лишь в дробных слагаемых функции $\psi_2(u)$, соответствующих минимальному числу $\beta_{\min}$.

Путем подстановки в неравенство условия (12) при $p = 0$ соответствующих значений параметров задачи (17):

$$\xi_j^{\mathrm{T}}(u)b_2(u) = e_j^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} U^{\mathrm{T}}d - 2u_1 diag(\beta)U^{\mathrm{T}}x_0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{cases} \eta_j^{\mathrm{T}}(d - 2u_1\beta_{\min}x_0), & \text{если } j = 1, \dots, n, \\ k, & \text{если } j = n+1, \end{cases}$$

где $\xi_j(u) = e_j$ — собственные векторы матрицы $A_2(u)$, e_j — n-мерный вектор, j-я компонента которого равна единице, а остальные равны нулю, получаем

$$\xi_j^{\mathrm{T}}(u)\left(b_0 + \sum_{i=1}^{m}u_i b_i\right) = \xi_j^{\mathrm{T}}(u)b_2(u) = \eta_j^{\mathrm{T}}(d - 2u_1\beta_{\min}x_0) \neq 0.$$

Таким образом, условие (12) теоремы при $p = 0$ для задачи (14)–(16) примет вид

$$\forall u \in (\overline{D} \setminus D) \;\; \exists j \in J_{\min} \text{ такое, что } \eta_j^{\mathrm{T}}(d - 2u_1\beta_{\min}x_0) \neq 0,$$

или, учитывая вид множества $(\overline{D} \setminus D) = \{u : (u_1\beta_{\min} - u_2) = 0\}$,

$$\forall u_1 > 0 \;\; \exists j \in J_{\min} \text{ такое, что } \eta_j^{\mathrm{T}}(d - 2u_1\beta_{\min}x_0) \neq 0. \tag{19}$$

С учетом того, что полученное условие (19) эквивалентно несовместности системы от одной переменной

$$\begin{cases} \eta_j^{\mathrm{T}}(d - 2u_1\beta_{\min}x_0) = 0, \;\; j \in J_{\min}, \\ u_1 > 0, \end{cases}$$

доказательство утверждения 1 завершено.

Из доказанного утверждения следует достаточно простая для практического использования процедура проверки на точность двойственной оценки для конкретных задач вида (14)–(16): из первого равенства системы (18) на-

ISSN 0572-2691

ходим $\bar{u}_1$ и, если оно положительное, подставляем в остальные равенства. Первое же нарушение равенства означает, что решение задачи (17) дает оптимальное значение и точку глобального минимума задачи (14)–(16); если же система окажется совместной, то оценка, получаемая в результате решения задачи (17), может быть как равной, так и меньше оптимума задачи (14)–(16).

В частном случае, когда кратность минимального собственного числа матрицы Q равна 1 ($|J_{\min}| = 1$), утверждение 1 может быть переписано в следующем виде.

Утверждение 2. Если множество $J_{\min}$ состоит из единственного индекса $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и числа $\eta_s^{\mathrm{T}} d$ и $\eta_s^{\mathrm{T}} x_0$ имеют противоположные знаки, то решение задачи (17) дает точку глобального максимума задачи (14)–(16) и $\psi_2^* = f^*$.

Этому утверждению может быть дана следующая геометрическая интерпретация: двойственная оценка будет точной, если векторы d и x_0 лежат в разных полупространствах, образуемых гиперплоскостью, нормалью которой является собственный вектор η_s матрицы Q, соответствующий ее единственному минимальному собственному числу, и которая проходит через начало координат или, другими словами, $\cos(\eta_s, d)\cos(\eta_s, x_0) < 0$.

Следует подчеркнуть, что поскольку, как отмечалось выше, задачи (1) и (2), (3)–(5) и (14)–(16) эквивалентны, а двойственные оценки (11) и (17) в соответствующих квадратичных задачах совпадают, то результаты, сформулированные в утверждениях 1 и 2, справедливы также для задач (1) и (2) и (3)–(5).

Заключение

Многие задачи, в частности, возникающие при исследовании динамических систем, могут быть представлены в виде квадратичных экстремальных задач. И применение двойственных оценок в ряде случаев дает возможность не просто оценить оптимальное значение целевой функции, но и получить ее точное значение вместе с точкой оптимума. В утверждениях 1 и 2 сформулировано достаточно общее и практичное условие проверки задач вида (1), (2) на возможность их решения с помощью сведения к задаче (14)–(16) (к задаче (3)–(5)) и нахождения двойственной оценки (17) (оценки (11)). С точки зрения вычислительной трудоемкости целесообразнее использовать задачу (14)–(16) и соответственно оценку (17). В этом случае матрица функции Лагранжа имеет диагональный вид, что значительно упрощает на каждой k-й итерации решение внутренней задачи нахождения $x_k = x(u_k)$ при фиксированном u_k, а также учет условия положительной определенности матрицы функции Лагранжа ($u \in D$).

В заключение отметим, что полученные результаты могут быть экстраполированы на случай использования SDP-релаксаций [15, 16] для решения рассматриваемых квадратичных задач.

О.А. Березовський

ПРО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ СПЕЦІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ, ПОВ'ЯЗАНОЇ З ВИЗНАЧЕННЯМ ІНВАРІАНТНИХ МНОЖИН ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Розглянуто неопуклу задачу оптимізації, яка зустрічається при синтезі керування, що мінімізує область локалізації інваріантної множини сімейства нелінійних систем. Для розв'язування цієї задачі використовується еквівалентна їй квадратична задача, для знаходження нижньої оцінки оптимального значення цільової функції якої застосовано двоїстий підхід. Сформульовано та доведено достатню умову того, що даний підхід дає оптимальне значення цільової функції і точку глобального екстремуму початкової задачі.

O.A. Berezovskyi

ON SOLVING THE SPECIAL OPTIMIZATION PROBLEM RELATED TO THE DEFINITION OF INVARIANT SETS OF DYNAMICAL SYSTEMS

Nonconvex optimization problem, which occurs in the synthesis of a control, minimizing the localization region of the invariant set of the family of nonlinear systems, is considered. To solve this problem, we use an equivalent quadratic problem to find the lower bound of the optimal value of the objective function in the framework of dual approach. The sufficient condition, that this approach gives the optimum value of the objective function and the global extremum point of the original problem, is formulated and proved.

1. *Кунцевич А.В., Кунцевич В.М.* Синтез управления инвариантными множествами семейств линейных и нелинейных дискретных систем с ограниченными возмущениями // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 4. — С. 65–78.
2. *Kuntsevich A.V., Kuntsevich V.M.* Invariant sets for families of linear and nonlinear discrete systems with bounded disturbances // Automation and Remote Control. — 2012. — **73** (1). — P. 83–96.
3. *Шор Н.З., Березовский О.А.* Алгоритмы построения инвариантного эллипсоида минимального объема для устойчивой динамической системы // Кибернетика и системный анализ. — 1995. — № 3. — С. 130–137.
4. *Second*-order cone programming. — http:// en. wikipedia.org/wiki/ Second-order_cone_programming.
5. *Alizadeh F., Goldfarb D.* Second-order cone programming // Mathematical programming. — 2003. — **95,** N (1). — P. 3–51.
6. *Шор Н.З., Стеценко С.И.* Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. — Киев : Наук. думка, 1989. — 208 с.
7. *Shor N.Z.* Nondifferentiable optimization and polynomial problems. — Dordrecht: Kluwer, 1998. — 394 p.
8. *Березовский О.А.* О точности двойственных оценок для квадратичных экстремальных задач // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 1. — С. 33–39.
9. *Шор Н.З., Березовский О.А.* Применение аппарата двойственных квадратичных оценок при решении системы полиномиальных уравнений на множестве комплексных чисел // Там же. — 1994. — № 5. — С. 67–75.
10. *Shor N.Z.* Lagrangian quadratic bounds in polynomial nonconvex and Boolean models with superfluous constraints // Advanced in Convex Analysis and Global Optimization. — Springer US, 2001. — P. 181–204.
11. *Стецюк П.И., Пардалос П.М., Крошко Д.Л.* О новых лагранжевых двойственных оценках для числа устойчивости графа // Компьютерная математика. — 2006. — № 3. — С. 149–158.
12. *Стецюк П.И.* О новых свойствах оценок Шора для взвешенного числа устойчивости графа // Праці Міжнародної конференції «50 років Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України». — Київ : Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2008. — С. 164–173.
13. *Березовский О.А.* О нижней оценке для одной квадратичной задачи на многообразии Штифеля // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — №. 5. — С. 95–103.
14. *Березовский О.А.* О задаче упаковки шаров в куб // Там же. — 2014. — № 4. — С. 170–179.
15. *Fujit T., Kojima M.* Semidefinite programming relaxation for nonconvex quadratic problems // Journal of Global Optimization. — 1997. — N 10. — P. 367–380.
16. *Zhang S.* Quadratic maximization and semidefinite relaxation // Mathematical Programming. — 2000. — **87.** — N 3. — C. 453–465.

Получено 12.02.2015

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. НАН Украины А.А. Чикрием.