УДК 517.977.56

М.М. Копец

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ КОЛЕБАНИЙ ТОНКОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ

Введение

В природе и технике довольно часто встречаются волновые и колебательные процессы. Например, в акустике, аэродинамике, квантовой теории поля, теории упругости, электродинамике и т.д. Все эти процессы, как правило, описываются дифференциальными уравнениями с частными производными гиперболического типа второго порядка, содержащими в качестве одной из независимых переменных — время t. К тому же многие прикладные задачи приводят к дифференциальным уравнениям с частными производными гиперболического типа более высокого порядка. Здесь можно упомянуть задачи о колебаниях стержней, пластин, вращающихся валов и т. д. Настоящая статья посвящена исследованию линейно-квадратической задачи оптимального управления процессом колебаний тонкого прямоугольного стержня. С помощью метода множителей Лагранжа для рассматриваемой задачи оптимизации получены необходимые условия оптимальности. Исходя из этих условий, выведена система интегро-дифференциальных уравнений Риккати с частными производными. Решение этой системы представлено в замкнутой форме.

Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается следующим линейным дифференциальным уравнением с частными производными:

$$\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2} = a^4 \frac{\partial^4 z(t,x)}{\partial x^4} + u(t,x), \tag{1}$$

где $a^4 = \dfrac{EJ}{\rho S}$, E — модуль упругости материала стержня, J — момент инерции прямоугольного сечения стержня относительно его горизонтальной оси, S — площадь поперечного сечения стержня, ρ — плотность материала стержня, $0 \le x \le l$, $t_0 \le t \le t_1$ — действительные числа $l > 0$, $t_0 \ge 0$, $t_1 > t_0$ известны. Для уравнения (1) заданы начальные условия

$$z(t_0,x) = f(x), \frac{\partial z(t_0,x)}{\partial t} = g(x), \tag{2}$$

где функции $f(x) \in L_2(0,l)$ и $g(x) \in L_2(0,l)$ предполагаются также известными, символ $\dfrac{\partial z(t_0,x)}{\partial t}$ обозначает значение частной производной $\dfrac{\partial z(t,x)}{\partial t}$ при $t = t_0$. Подобным образом трактуются символы $\dfrac{\partial z(t_1,x)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial z(t,0)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z(t,l)}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^3 z(t,l)}{\partial x^3}$.

Краевые условия для уравнения (1) являются однородными

$$\frac{\partial z(t,0)}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial^2 z(t,l)}{\partial x^2} = 0, \; \frac{\partial^3 z(t,l)}{\partial x^3} = 0. \tag{3}$$

Известно, что соотношения (1)–(3) описывают процесс колебаний тонкого прямоугольного стержня [1, с. 143]. Обозначим символом Ω множество $\Omega=\{(t,\,x):$ $t\in[t_0,\,t_1],\;\; x\in[0,\,l]\}$. Функция $u(t,x)\in L_2(\Omega)$ называется допустимым управлением. Для фиксированного допустимого управления $u(t,\,x)$ под решением $z(t,\,x)$ задачи (1)–(3) подразумеваем ее обобщенное решение $z(t,\,x)\in W_2^{1,0}(\Omega)$. На решениях задачи (1)–(3) рассматривается функционал

$$I(u,\,z)=\frac{1}{2}\int_0^l z^2(t_1,\,x)dx+\frac{1}{2}\int_0^l\left[\frac{\partial z(t_1,\,x)}{\partial t}\right]^2 dx+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[z^2(t,\,x)+u^2(t,\,x)]dxdt. \tag{4}$$

Задача оптимального управления (1)–(4) состоит в определении допустимого управления $u(t,\,x)$ и соответствующего ему решения $z(t,\,x)$ задачи (1)–(3), на которых функционал (4) принимает наименьшее возможное значение.

Необходимые условия оптимальности

Одним из возможных методов для нахождения решения сформулированной выше задачи оптимального управления (1)–(4) является метод множителей Лагранжа [2, с. 31]. Сущность его состоит в замене функционала (4) следующим вспомогательным функционалом:

$$J(p,\,u,\,z)=\frac{1}{2}\int_0^l z^2(t_1,\,x)dx+\frac{1}{2}\int_0^l\left[\frac{\partial z(t_1,\,x)}{\partial t}\right]^2 dx+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[z^2(t,\,x)+u^2(t,\,x)]dxdt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l p(t,\,x)\left[a^4\frac{\partial^4 z(t,\,x)}{\partial x^4}+u(t,\,x)-\frac{\partial^2 z(t,\,x)}{\partial t^2}\right]dxdt, \tag{5}$$

где $p(t,\,x)$ — неизвестная функция (множитель Лагранжа). В результате такой замены задача на условный экстремум (1)–(4) сводится к задаче минимизации функционала (5) с учетом условий (2) и (3). Дальше находим выражение ΔJ для приращения функционала (5):

$$\Delta J=J(p+\varepsilon\delta p,\,u+\varepsilon\delta u,\,z+\varepsilon\delta z)-J(p,\,u,\,z).$$

Используя соотношение (5), выражение для ΔJ запишем

$$\Delta J=\frac{1}{2}\int_0^l[z(t_1,\,x)+\varepsilon\delta z(t_1,\,x)]^2dx+\frac{1}{2}\int_0^l\left[\frac{\partial z(t_1,x)}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial\delta z(t_1,x)}{\partial t}\right]^2dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[[z(t,x)+\varepsilon\delta z(t,x)]^2+[u(t,x)+\varepsilon\delta u(t,x)]^2]dxdt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[p(t,\,x)+\varepsilon\delta p(t,\,x)]\left[a^4\left[\frac{\partial^4 z(t,\,x)}{\partial x^4}+\varepsilon\frac{\partial^4\delta z(t,\,x)}{\partial x^4}\right]+u(t,\,x)+\varepsilon\delta u(t,\,x)-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{\partial^2 z(t,\,x)}{\partial t^2}+\varepsilon\frac{\partial^2\delta z(t,\,x)}{\partial t^2}\right]\right]dxdt-\frac{1}{2}\int_0^l z^2(t_1,\,x)dx-\frac{1}{2}\int_0^l\left[\frac{\partial z(t_1,\,x)}{\partial t}\right]^2dx-$$

ISSN 0572-2691

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [z^2(t,x)+u^2(t,x)]dxdt-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l p(t,x)\left[a^4\frac{\partial^4 z(t,x)}{\partial x^4}+u(t,x)-\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}\right]dxdt. \quad (6)$$

Выполнив очевидные преобразования, вместо соотношения (6) получим такое равенство:

$$\Delta J=\varepsilon\int_0^l z(t_1,x)\delta z(t_1,x)\,dx+\varepsilon\int_0^l \frac{\partial z(t_1,x)}{\partial t}\frac{\partial\delta z(t_1,x)}{\partial t}dx+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \left[z(t,x)\delta z(t,x)+\right.$$

$$\left.+u(t,x)\delta u(t,x)\right]dxdt+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l p(t,x)\left[a^4\frac{\partial^4\delta z(t,x)}{\partial x^4}+\delta u(t,x)-\left[\frac{\partial^2\delta z(t,x)}{\partial t^2}\right]\right]dxdt+$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \delta p(t,x)\left[a^4\frac{\partial^4 z(t,x)}{\partial x^4}+u(t,x)-\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}\right]dxdt+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l[\delta z(t_1,x)]^2dx+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l\left[\frac{\partial\delta z(t_1,x)}{\partial t}\right]^2dx+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[[\delta z(t,x)]^2+[\delta u(t,x)]^2]\,dxdt+$$

$$+\varepsilon^2\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \delta p(t,x)\left[a^4\frac{\partial^4\delta z(t,x)}{\partial x^4}+\delta u(t,x)-\frac{\partial^2\delta z(t,x)}{\partial t^2}\right]dxdt. \quad (7)$$

Поскольку должно выполняться соотношение

$$a^4\left[\frac{\partial^4 z(t,x)}{\partial x^4}+\varepsilon\frac{\partial^4\delta z(t,x)}{\partial x^4}\right]+u(t,x)+\varepsilon\delta u(t,x)-\left[\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}+\varepsilon\frac{\partial^2\delta z(t,x)}{\partial t^2}\right]=0,$$

то, принимая во внимание уравнение (1), получим равенство

$$a^4\frac{\partial^4\delta z(t,x)}{\partial x^4}+\delta u(t,x)-\frac{\partial^2\delta z(t,x)}{\partial t^2}=0. \quad (8)$$

Учитывая очевидные соотношения $\delta z(t_0,x)=f(x)-f(x)=0$, $\frac{\partial\delta z(t_0,x)}{\partial t}=g(x)-g(x)=0$ и дважды используя формулу интегрирования по частям, приходим к такому равенству:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l p(t,x)\frac{\partial^2\delta z(t,x)}{\partial t^2}dxdt=\int_0^l p(t_1,x)\frac{\partial\delta z(t_1,x)}{\partial t}dx-\int_0^l p(t_0,x)\frac{\partial\delta z(t_0,x)}{\partial t}dx-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \frac{\partial p(t,x)}{\partial t}\frac{\partial\delta z(t,x)}{\partial t}dxdt=\int_0^l p(t_1,x)\frac{\partial\delta z(t_1,x)}{\partial t}dx-\int_0^l\frac{\partial p(t_1,x)}{\partial t}\delta z(t_1,x)dx+$$

$$+\int_0^l\frac{\partial p(t_0,x)}{\partial t}\delta z(t_0,x)dx+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial t^2}\delta z(t,x)dxdt=\int_0^l p(t_1,x)\frac{\partial\delta z(t_1,x)}{\partial t}dx-$$

$$-\int_0^l\frac{\partial p(t_1,x)}{\partial t}\delta z(t_1,x)dx+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial t^2}\delta z(t,x)dxdt. \quad (9)$$

Предполагая выполнение краевых условий

$$p(t,0)=0,\ \ \frac{\partial p(t,0)}{\partial x}=0,\ \ \frac{\partial^2 p(t,l)}{\partial x^2}=0,\ \ \frac{\partial^3 p(t,l)}{\partial x^3}=0 \tag{10}$$

и принимая во внимание очевидные соотношения $\delta z(t,0)=0-0=0,\ \frac{\partial \delta z(t,0)}{\partial x}=$ $=0-0=0,\ \frac{\partial^2 \delta z(t,l)}{\partial x^2}=0-0=0,\ \frac{\partial^3 \delta z(t,l)}{\partial x^3}=0-0=0,$ после четырехкратного применения формулы интегрирования по частям получаем такое равенство:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l p(t,x)\frac{\partial^4 \delta z(t,x)}{\partial x^4}dxdt \int_{t_0}^{t_1} p(t,l)\frac{\partial^3 \delta z(t,l)}{\partial x^3}dt-\int_{t_0}^{t_1} p(t,0)\frac{\partial^3 \delta z(t,0)}{\partial x^3}dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \frac{\partial p(t,x)}{\partial x}\frac{\partial^3 \delta z(t,x)}{\partial x^3}dxdt=-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \frac{\partial p(t,x)}{\partial x}\frac{\partial^3 \delta z(t,x)}{\partial x^3}dxdt=-\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial p(t,l)}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta z(t,l)}{\partial x^2}dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial p(t,0)}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta z(t,0)}{\partial x^2}dt+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \delta z(t,x)}{\partial x^2}dxdt=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \delta z(t,x)}{\partial x^2}dxdt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 p(t,l)}{\partial x^2}\frac{\partial \delta z(t,l)}{\partial x}dt-\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 p(t,0)}{\partial x^2}\frac{\partial \delta z(t,0)}{\partial x}dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \frac{\partial^3 p(t,x)}{\partial x^3}\frac{\partial \delta z(t,x)}{\partial x}dxdt=$$

$$=-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \frac{\partial^3 p(t,x)}{\partial x^3}\frac{\partial \delta z(t,x)}{\partial x}dxdt=-\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^3 p(t,l)}{\partial x^3}\delta z(t,l)dt+\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^3 p(t,0)}{\partial x^3}\delta z(t,0)dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \frac{\partial^4 p(t,x)}{\partial x^4}\delta z(t,x)dxdt=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \frac{\partial^4 p(t,x)}{\partial x^4}\delta z(t,x)dxdt. \tag{11}$$

Равенства (8), (9) и (11) позволяют представить соотношение (7) следующим образом:

$$\Delta J=\varepsilon\int_0^l \left[z(t_1,x)+\frac{\partial p(t_1,x)}{\partial t}\right]\delta z(t_1,x)\,dx+\varepsilon\int_0^l\left[\frac{\partial z(t_1,x)}{\partial t}-p(t_1,x)\right]\times$$

$$\times\frac{\partial \delta z(t_1,x)}{\partial t}dx+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left[\left[z(t,x)+a^4\frac{\partial^4 p(t,x)}{\partial x^4}-\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial t^2}\right]\delta z(t,x)+\right.$$

$$\left.+[u(t,x)+p(t,x)]\delta u(t,x)\right]dxdt+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \delta p(t,x)\left[a^4\frac{\partial^4 z(t,x)}{\partial x^4}+u(t,x)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}\right]dxdt+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l [\delta z(t_1,x)]^2dx+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l\left[\frac{\partial \delta z(t_1,x)}{\partial t}\right]^2dx+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [[\delta z(t,x)]^2+[\delta u(t,x)]^2]dxdt. \tag{12}$$

Подводя итоги вышеприведенным рассуждениям, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. Единственное оптимальное управление $u(t, x)$ определяется из такой системы соотношений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z(t, x)}{\partial t^2} = a^4 \dfrac{\partial^4 z(t, x)}{\partial x^4} + u(t, x), \\ z(t_0, x) = f(x), \qquad \dfrac{\partial z(t_0, x)}{\partial t} = g(x), \\ z(t, 0) = 0, \qquad \dfrac{\partial z(t, 0)}{\partial x} = 0, \qquad \dfrac{\partial^2 z(t, l)}{\partial x^2} = 0, \ \dfrac{\partial^3 z(t, l)}{\partial x^3} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 p(t, x)}{\partial t^2} = a^4 \dfrac{\partial^4 p(t, x)}{\partial x^4} + z(t, x), \\ p(t_1, x) = \dfrac{\partial z(t_1, x)}{\partial t}, \qquad \dfrac{\partial p(t_1, x)}{\partial t} = -z(t_1, x), \\ p(t, 0) = 0, \qquad \dfrac{\partial p(t, 0)}{\partial x} = 0, \qquad \dfrac{\partial^2 p(t, l)}{\partial x^2} = 0, \ \dfrac{\partial^3 p(t, l)}{\partial x^3} = 0, \\ u(t, x) + p(t, x) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Доказательство. Необходимым условием экстремума функционала (5) является равенство нулю его первой вариации. Это условие будет выполнено, если имеют место следующие соотношения:

$$z(t_1, x) + \frac{\partial p(t_1, x)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial z(t_1, x)}{\partial t} - p(t_1, x) = 0, \quad a^4 \frac{\partial^4 z(t, x)}{\partial x^4} + u(t,x) - \frac{\partial^2 z(t, x)}{\partial t^2} = 0,$$

$$z(t, x) + a^4 \frac{\partial^4 p(t, x)}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 p(t, x)}{\partial t^2} = 0, \quad u(t, x) + p(t, x) = 0.$$

Если присоединить к этим равенствам начальные условия (2), краевые условия (3) и соотношения (10), то получим систему уравнений (13). В случае выполнения этих соотношений выражение (12) примет вид

$$\Delta J = \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^l [\delta z(t_1, x)]^2 dx + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^l \left[\frac{\partial \delta z(t_1, x)}{\partial t} \right]^2 dx + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l [[\delta z(t, x)]^2 + [\delta u(t, x)]^2] dxdt. \tag{14}$$

При условии, что $\delta u(t, x)$ не равно нулю, имеем неравенство $\Delta J > 0.$ Это означает, что на управлении $u(t, x)$ реализуется минимум функционала (4). Дальше предположим, что $\overline{u}(t, x) = u(t, x) + \delta u(t, x)$ также является оптимальным управлением. Тогда оно также должно удовлетворять соотношениям (13) и, кроме того, должно выполняться равенство $\Delta J = 0,$ поскольку оба управления $\overline{u}(t, x)$ и $u(t, x)$ оптимальны. Но тогда из выражения (14) следует, что равенство $\Delta J = 0$ возможно только в том случае, если $\delta u(t, x) = 0.$ Отсюда следует, что $\overline{u}(t, x) = u(t, x),$ и теорема 1 полностью доказана.

Вывод системы интегро-дифференциальных уравнений Риккати

Исходя из равенств $p(t_1, x) = \dfrac{\partial z(t_1, x)}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial p(t_1, x)}{\partial t} = -z(t_1, x),$ предполагаем существование зависимости между $p(t, x)$ и $z(t, x)$:

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = -\int_0^l R_{11}(t, x, y) z(t, y) dy - \int_0^l R_{12}(t,x,y) \frac{\partial z(t, y)}{\partial t} dy, \tag{15}$$

$$p(t, x) = \int_0^l R_{21}(t, x, y) z(t, y) dy + \int_0^l R_{22}(t, x, y) \frac{\partial z(t, y)}{\partial t} dy, \tag{16}$$

где функции $R_{ij}(t,x,y)$, $i=1,2;\ j=1,2,$ требуется найти. Дифференцируя равенство (15) по переменной *t*, приходим к соотношению

$$\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial t^2}=-\int_0^l\left[\frac{\partial R_{11}(t,x,y)}{\partial t}z(t,y)+R_{11}(t,x,y)\frac{\partial z(t,y)}{\partial t}\right]dy-$$

$$-\int_0^l\left[\frac{\partial R_{12}(t,x,y)}{\partial t}\frac{\partial z(t,y)}{\partial t}+R_{12}(t,x,y)\frac{\partial^2 z(t,y)}{\partial t^2}\right]dy. \qquad (17)$$

Поскольку из системы (13) имеем $u(t,x)=-p(t,x)$, то уравнение (1) примет вид $\frac{\partial^2 z(t,y)}{\partial t^2}=a^4\frac{\partial^4 z(t,y)}{\partial y^4}-p(t,y)$. Используя выражение (16), имеем

$$\frac{\partial^2 z(t,y)}{\partial t^2}=a^4\frac{\partial^4 z(t,y)}{\partial y^4}-\int_0^l R_{21}(t,y,s)\,z(t,s)ds-\int_0^l R_{22}(t,y,s)\frac{\partial z(t,s)}{\partial t}ds. \qquad (18)$$

Затем, учитывая соотношение (18), равенство (17) преобразуем следующим образом:

$$\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial t^2}=-\int_0^l\left[\frac{\partial R_{11}(t,x,y)}{\partial t}z(t,y)+R_{11}(t,x,y)\frac{\partial z(t,y)}{\partial t}+\frac{\partial R_{12}(t,x,y)}{\partial t}\frac{\partial z(t,y)}{\partial t}+\right.$$

$$+a^4R_{12}(t,x,y)\frac{\partial^4 z(t,y)}{\partial y^4}-R_{12}(t,x,y)\int_0^l R_{21}(t,y,s)\,z(t,s)ds-$$

$$\left.-R_{12}(t,x,y)\int_0^l R_{22}(t,y,s)\frac{\partial z(t,s)}{\partial t}ds\right]dy. \qquad (19)$$

После этого, предполагая выполнение краевых условий

$$R_{12}(t,x,0)=0,\quad \frac{\partial R_{12}(t,x,0)}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 R_{12}(t,x,l)}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^3 R_{12}(t,x,l)}{\partial y^3}=0 \qquad (20)$$

и принимая во внимание краевые условия (3), с помощью четырехкратного применения формулы по частям получим

$$\int_0^l R_{12}(t,x,y)\frac{\partial^4 z(t,y)}{\partial y^4}dy=R_{12}(t,x,l)\frac{\partial^3 z(t,l)}{\partial y^3}-R_{12}(t,x,0)\frac{\partial^3 z(t,0)}{\partial y^3}-$$

$$-\int_0^l\frac{\partial R_{12}(t,x,y)}{\partial y}\frac{\partial^3 z(t,y)}{\partial y^3}dy=-\int_0^l\frac{\partial R_{12}(t,x,y)}{\partial y}\frac{\partial^3 z(t,y)}{\partial y^3}dy=$$

$$=-\frac{\partial R_{12}(t,x,l)}{\partial y}\frac{\partial^2 z(t,l)}{\partial y^2}+\frac{\partial R_{12}(t,x,0)}{\partial y}\frac{\partial^2 z(t,0)}{\partial y^2}+\int_0^l\frac{\partial^2 R_{12}(t,x,y)}{\partial y^2}\frac{\partial^2 z(t,y)}{\partial y^2}dy=$$

$$=\int_0^l\frac{\partial^2 R_{12}(t,x,y)}{\partial y^2}\frac{\partial^2 z(t,y)}{\partial y^2}dy=\frac{\partial^2 R_{12}(t,x,l)}{\partial y^2}\frac{\partial z(t,l)}{\partial y}-\frac{\partial^2 R_{12}(t,x,0)}{\partial y^2}\frac{\partial z(t,0)}{\partial y}-$$

$$-\int_0^l\frac{\partial^3 R_{12}(t,x,y)}{\partial y^3}\frac{\partial z(t,y)}{\partial y}dy=-\int_0^l\frac{\partial^3 R_{12}(t,x,y)}{\partial y^3}\frac{\partial z(t,y)}{\partial y}dy=-\frac{\partial^3 R_{12}(t,x,l)}{\partial y^3}z(t,l)+$$

$$+\frac{\partial^3 R_{12}(t,x,0)}{\partial y^3}z(t,0)+\int_0^l\frac{\partial^4 R_{12}(t,x,y)}{\partial y^4}z(t,y)dy=\int_0^l\frac{\partial^4 R_{12}(t,x,y)}{\partial y^4}z(t,y)dy. \qquad (21)$$

 ISSN 0572-2691

Двойной интеграл $\int_0^l R_{12}(t,x,y)\int_0^l R_{21}(t,y,s)\,z(t,s)dsdy$ преобразуем таким образом. Меняя в нем порядок интегрирования, переобозначаем переменные интегрирования y на s и, наоборот, s на y. Это приводит к следующему соотношению:

$$\int_0^l R_{12}(t,x,y)\int_0^l R_{21}(t,y,s)z(t,s)dsdy = \int_0^l\int_0^l R_{12}(t,x,y)R_{21}(t,y,s)z(t,s)dyds =$$

$$= \int_0^l\int_0^l R_{12}(t,x,s)R_{21}(t,s,y)\,dsz(t,y)dy. \tag{22}$$

Аналогично находим

$$\int_0^l R_{12}(t,x,y)\int_0^l R_{22}(t,y,s)\frac{\partial z(t,s)}{\partial t}dsdy = \int_0^l\int_0^l R_{12}(t,x,y)R_{22}(t,y,s)\times$$

$$\times\frac{\partial z(t,s)}{\partial t}dyds = \int_0^l\int_0^l R_{12}(t,x,s)R_{22}(t,s,y)\,ds\frac{\partial z(t,y)}{\partial t}dy. \tag{23}$$

На основании соотношений (21)–(23) равенство (19) примет вид

$$\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial t^2} = -\int_0^l\left[\frac{\partial R_{11}(t,x,y)}{\partial t}z(t,y) + R_{11}(t,x,y)\frac{\partial z(t,y)}{\partial t} + \frac{\partial R_{12}(t,x,y)}{\partial t}\frac{\partial z(t,y)}{\partial t} +\right.$$

$$+ a^4\frac{\partial^4 R_{12}(t,x,y)}{\partial y^4}z(t,y) - \int_0^l R_{12}(t,x,s)R_{21}(t,s,y)\,dsz(t,y) -$$

$$\left. -\int_0^l R_{12}(t,x,s)R_{22}(t,s,y)ds\frac{\partial z(t,y)}{\partial t}\right]dy. \tag{24}$$

С другой стороны, на основании равенства (16) имеем

$$\frac{\partial^4 p(t,x)}{\partial x^4} = \int_0^l \frac{\partial^4 R_{21}(t,x,y)}{\partial x^4}z(t,y)dy + \int_0^l \frac{\partial^4 R_{22}(t,x,y)}{\partial x^4}\frac{\partial z(t,y)}{\partial t}dy.$$

Подставляя это выражение в уравнение $\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial t^2} = a^4\frac{\partial^4 p(t,x)}{\partial x^4} + z(t,x)$ и пользуясь очевидным соотношением $z(t,x) = \int_0^l \delta(x-y)z(t,y)dy$, приходим к равенству

$$\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial t^2} = \int_0^l\left[a^4\frac{\partial^4 R_{21}(t,x,y)}{\partial x^4}z(t,y) + a^4\frac{\partial^4 R_{22}(t,x,y)}{\partial x^4}\frac{\partial z(t,y)}{\partial t} + \delta(x-y)z(t,y)\right]dy. \tag{25}$$

Сопоставление соотношений (24) и (25) приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial R_{11}(t,x,y)}{\partial t} + a^4\frac{\partial^4 R_{12}(t,x,y)}{\partial y^4} + a^4\frac{\partial^4 R_{21}(t,x,y)}{\partial x^4} -$$

$$-\int_0^l R_{12}(t,x,s)R_{21}(t,s,y)ds + \delta(x-y) = 0, \tag{26}$$

$$\frac{\partial R_{12}(t,x,y)}{\partial t} + a^4\frac{\partial^4 R_{22}(t,x,y)}{\partial x^4} + R_{11}(t,x,y) - \int_0^l R_{12}(t,x,s)R_{22}(t,s,y)ds = 0. \tag{27}$$

Дифференцируя равенство (16) по переменной t, получаем соотношение

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = \int_0^l \left[\frac{\partial R_{21}(t,x,y)}{\partial t} z(t,y) + R_{21}(t,x,y)\frac{\partial z(t,y)}{\partial t} \right] dy +$$

$$+ \int_0^l \left[\frac{\partial R_{22}(t,x,y)}{\partial t}\frac{\partial z(t,y)}{\partial t} + R_{22}(t,x,y)\frac{\partial^2 z(t,y)}{\partial t^2} \right] dy.$$

Подставляя выражение (18) в последнее соотношение, находим

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = \int_0^l \left[\frac{\partial R_{21}(t,x,y)}{\partial t} z(t,y) + R_{21}(t,x,y)\frac{\partial z(t,y)}{\partial t} + \frac{\partial R_{22}(t,x,y)}{\partial t}\frac{\partial z(t,y)}{\partial t} + \right.$$

$$+ a^4 R_{22}(t,x,y)\frac{\partial^4 z(t,y)}{\partial y^4} - R_{22}(t,x,y)\int_0^l R_{21}(t,y,s) z(t,s) ds -$$

$$\left. R_{22}(t,x,y)\int_0^l R_{22}(t,y,s)\frac{\partial z(t,s)}{\partial t} ds \right] dy. \tag{28}$$

Полагая выполнение краевых условий

$$R_{22}(t,x,0) = 0, \quad \frac{\partial R_{22}(t,x,0)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 R_{22}(t,x,l)}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 R_{22}(t,x,l)}{\partial y^3} = 0, \tag{29}$$

и принимая во внимание краевые условия (3), после применения формулы интегрирования по частям имеем

$$\int_0^l R_{22}(t,x,y)\frac{\partial^4 z(t,y)}{\partial y^4} dy = R_{22}(t,x,l)\frac{\partial^3 z(t,l)}{\partial y^3} - R_{22}(t,x,0)\frac{\partial^3 z(t,0)}{\partial y^3} -$$

$$-\int_0^l \frac{\partial R_{22}(t,x,y)}{\partial y}\frac{\partial^3 z(t,y)}{\partial y^3} dy = -\int_0^l \frac{\partial R_{22}(t,x,y)}{\partial y}\frac{\partial^3 z(t,y)}{\partial y^3} dy = -\frac{\partial R_{22}(t,x,l)}{\partial y}\frac{\partial^2 z(t,l)}{\partial y^2} +$$

$$+\frac{\partial R_{22}(t,x,0)}{\partial y}\frac{\partial^2 z(t,0)}{\partial y^2} + \int_0^l \frac{\partial^2 R_{22}(t,x,y)}{\partial y^2}\frac{\partial^2 z(t,y)}{\partial y^2} dy = \int_0^l \frac{\partial^2 R_{22}(t,x,y)}{\partial y^2}\frac{\partial^2 z(t,y)}{\partial y^2} dy =$$

$$= \frac{\partial^2 R_{22}(t,x,l)}{\partial y^2}\frac{\partial z(t,l)}{\partial y} - \frac{\partial^2 R_{22}(t,x,0)}{\partial y^2}\frac{\partial z(t,0)}{\partial y} - \int_0^l \frac{\partial^3 R_{22}(t,x,y)}{\partial y^3}\frac{\partial z(t,y)}{\partial y} dy =$$

$$= -\int_0^l \frac{\partial^3 R_{22}(t,x,y)}{\partial y^3}\frac{\partial z(t,y)}{\partial y} dy = -\frac{\partial^3 R_{22}(t,x,l)}{\partial y^3} z(t,l) + \frac{\partial^3 R_{22}(t,x,0)}{\partial y^3} z(t,0) +$$

$$+\int_0^l \frac{\partial^4 R_{22}(t,x,y)}{\partial y^4} z(t,y) dy = \int_0^l \frac{\partial^4 R_{22}(t,x,y)}{\partial y^4} z(t,y) dy. \tag{30}$$

Дальше в двойном интеграле $\int_0^l R_{22}(t,x,y)\int_0^l R_{21}(t,y,s) z(t,s) ds dy$ сначала меняем порядок интегрирования, затем переобозначаем переменные интегрирования y на s и, наоборот, s на y. В результате получим

$$\int_0^l R_{22}(t,x,y)\int_0^l R_{21}(t,y,s) z(t,s) ds dy = \int_0^l \int_0^l R_{22}(t,x,y) R_{21}(t,y,s) z(t,s) dy ds =$$

$$= \int_0^l \int_0^l R_{22}(t,x,s) R_{21}(t,s,y) ds z(t,y) dy. \tag{31}$$

Аналогично имеем

$$\int_0^l R_{22}(t,x,y)\int_0^l R_{22}(t,y,s)\frac{\partial z(t,s)}{\partial t}dsdy=\int_0^l\int_0^l R_{22}(t,x,y)R_{22}(t,y,s)\frac{\partial z(t,s)}{\partial t}dyds=$$

$$=\int_0^l\int_0^l R_{22}(t,x,s)R_{22}(t,s,y)ds\frac{\partial z(t,y)}{\partial t}dy. \qquad (32)$$

Соотношения (30)–(32) дают возможность переписать равенство (28) следующим образом:

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t}=\int_0^l\left[\frac{\partial R_{21}(t,x,y)}{\partial t}z(t,y)+R_{21}(t,x,y)\frac{\partial z(t,y)}{\partial t}+\frac{\partial R_{22}(t,x,y)}{\partial t}\frac{\partial z(t,y)}{\partial t}+\right.$$

$$+a^4\frac{\partial^4 R_{22}(t,x,y)}{\partial y^4}z(t,y)-\int_0^l R_{22}(t,x,s)R_{21}(t,s,y)dsz(t,y)-$$

$$\left.-\int_0^l R_{22}(t,x,s)R_{22}(t,s,y)ds\frac{\partial z(t,y)}{\partial t}\right]dy. \qquad (33)$$

Сравнивая соотношения (15) и (33), получаем

$$\frac{\partial R_{21}(t,x,y)}{\partial t}+a^4\frac{\partial^4 R_{22}(t,x,y)}{\partial y^4}+R_{11}(t,x,y)-\int_0^l R_{22}(t,x,s)R_{21}(t,s,y)ds=0, \qquad (34)$$

$$\frac{\partial R_{22}(t,x,y)}{\partial t}+R_{12}(t,x,y)+R_{21}(t,x,y)-\int_0^l R_{22}(t,x,s)R_{22}(t,s,y)ds=0. \qquad (35)$$

Условия $p(t_1,x)=\dfrac{\partial z(t_1,x)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial p(t_1,x)}{\partial t}=-z(t_1,x)$ и соотношения (15), (16) приводят к таким равенствам:

$$\begin{cases}R_{11}(t_1,x,y)=\delta(x-y), & R_{12}(t_1,x,y)=0,\\ R_{21}(t_1,x,y)=0, & R_{22}(t_1,x,y)=\delta(x-y).\end{cases} \qquad (36)$$

Принимая во внимание вышеизложенные рассуждения, приходим к такому выводу.

Теорема 2. Функции $R_{ij}(t,x,y)$, $i=1,2;\ j=1,2,$ удовлетворяют системе уравнений (26), (27), (34), (35), краевым условиям (20), (29) и дополнительным условиям (36).

Этой системе уравнений можно поставить в соответствие матрицу $\mathbf{A}_n$ четвертого порядка:

$$R_{22}(t,x,y)=R_{22}(t,y,x),\ R_{12}(t,x,y)=R_{21}(t,y,x).$$

Исходя из соотношения $\delta(x-\mathrm{y})=\dfrac{2}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi nx}{l}\sin\dfrac{\pi ny}{l}$ [1, с. 272], будем искать функции $R_{ij}(t,x,y)$, $i=1,2;\ j=1,2,$ в следующем виде:

$$\begin{cases}R_{11}(t,x,\mathrm{y})=\dfrac{2}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}r_{n11}(t)\sin\dfrac{\pi nx}{l}\sin\dfrac{\pi ny}{l},\\ R_{12}(t,x,\mathrm{y})=\dfrac{2}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}r_{n12}(t)\sin\dfrac{\pi nx}{l}\sin\dfrac{\pi ny}{l},\\ R_{21}(t,x,\mathrm{y})=\dfrac{2}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}r_{n21}(t)\sin\dfrac{\pi nx}{l}\sin\dfrac{\pi ny}{l},\\ R_{22}(t,x,\mathrm{y})=\dfrac{2}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}r_{n22}(t)\sin\dfrac{\pi nx}{l}\sin\dfrac{\pi ny}{l},\end{cases} \qquad (37)$$

где $r_{nij}(t),\ i=1,2,\ j=1,2,$ — неизвестные функции. Очевидно, что при таком выборе функций $R_{ij}(t,x,y),\ i=1,2;\ j=1,2,$ краевые условия (20) и (29) выполняются. Поэтому соотношения (37) с учетом системы уравнений (26), (27), (34), (35) и условий (36) дают возможность сформулировать такое утверждение.

Теорема 3. Для нахождения функций $r_{nij}(t),\ i=1,2,\ j=1,2,$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dr_{n11}(t)}{dt}+\left(\dfrac{a\pi n}{l}\right)^4[r_{n12}(t)+r_{n21}(t)]-r_{n12}(t)r_{n21}(t)+1=0, \\ \dfrac{dr_{n12}(t)}{dt}+\left(\dfrac{a\pi n}{l}\right)^4 r_{n22}(t)+r_{n11}(t)-r_{n12}(t)r_{n22}(t)=0, \\ \dfrac{dr_{n21}(t)}{dt}+\left(\dfrac{a\pi n}{l}\right)^4 r_{n22}(t)+r_{n11}(t)-r_{n21}(t)r_{n22}(t)=0, \\ \dfrac{dr_{n22}(t)}{dt}+r_{n12}(t)+r_{n21}(t)-r_{n22}^2(t)=0. \end{cases} \tag{38}$$

При этом имеют место дополнительные условия

$$r_{n11}(t_1)=1,\ r_{n12}(t_1)=0,\ r_{n21}(t_1)=0,\ r_{n22}(t_1)=1,\ n=1,2,\dots. \tag{39}$$

Замечание. Сравнение второго и третьего уравнений системы (38) и соответствующих условий (39) указывает на существование зависимости $r_{n12}(t)=r_{n21}(t)$. Принимая во внимание этот вывод, систему уравнений (26), (27), (34), (35) и соотношения (37), приходим к следующим соотношениям:

$$R_{11}(t,x,y)=R_{11}(t,y,x),\ R_{12}(t,x,y)=R_{21}(t,y,x),\ R_{22}(t,x,y)=R_{22}(t,y,x).$$

Затем функции $z(t,x)$ и $p(t,x)$ представим с помощью соответствующих рядов Фурье

$$z(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} z_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l},\quad p(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} p_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l},$$

где $z_n(t)=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l z(t,x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\quad p_n(t)=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l p(t,x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$ Таким способом на основании системы соотношений (13) получим следующую систему равенств:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2z_n(t)}{dt^2}=\left[\dfrac{a\pi n}{l}\right]^4 z_n(t)+u_n(t), \\ z_n(t_0)=f_n, \qquad \dfrac{dz_n(t_0)}{dt}=g_n, \\ \dfrac{d^2p_n(t)}{dt^2}=z_n(t)+\left[\dfrac{a\pi n}{l}\right]^4 p_n(t), \\ p_n(t_1)=\dfrac{dz_n(t_1)}{dt}, \qquad \dfrac{dp(t_1)}{dt}=-z_n(t_1), \\ u_n(t)+p_n(t)=0, \end{cases} \tag{40}$$

где $u_n(t),\ f_n,\ g_n$ заданы выражениями

$$u_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l u(t,x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\quad f_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\quad g_n=\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

 ISSN 0572-2691

Если сделать замену $\frac{dz_n(t)}{dt} = y_n(t)$, $\frac{dp_n(t)}{dt} = -q_n(t)$, то вместо системы соотношений (40) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dz_n(t)}{dt} = y_n(t), \\ \frac{dy_n(t)}{dt} = \left[\frac{a\pi n}{l}\right]^4 z_n(t) - p_n(t), \\ \frac{dq_n(t)}{dt} = -z_n(t) - \left[\frac{a\pi n}{l}\right]^4 p_n(t), \\ \frac{dp_n(t)}{dt} = -q_n(t). \end{cases} \tag{41}$$

Дополнительные условия для системы уравнений (41) имеют вид

$$z_n(t_0) = f_n,\ y_n(t_0) = g_n,\ q_n(t_1) = z_n(t_1),\ p_n(t_1) = y_n(t_1). \tag{42}$$

С учетом выбранных выше обозначений вместо соотношений (15) и (16) получим выражения

$$\begin{cases} q_n(t) = r_{n11}(t) z_n(t) + r_{n12}(t) y_n(t), \\ p_n(t) = r_{n21}(t) z_n(t) + r_{m22}(t) y_n(t). \end{cases} \tag{43}$$

Если ввести обозначения

$$\mathrm{R}_n(t) = \begin{bmatrix} r_{n11}(t) & r_{n12}(t) \\ r_{n21}(t) & r_{n22}(t) \end{bmatrix},\ \mathrm{P}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \left[\frac{a\pi n}{l}\right]^4 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{S}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathrm{Q}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

то систему уравнений (38) можно представить как одно матричное дифференциальное уравнение Риккати:

$$\frac{d\mathrm{R}_n(t)}{dt} = -\mathrm{R}_n(t)\mathrm{P}_n - \mathrm{P}_n^T \mathrm{R}_n(t) + \mathrm{R}_n(t)\mathbf{S}_n\mathrm{R}_n(t) - \mathrm{Q}_n. \tag{44}$$

Условия (39) приводят к матричному соотношению

$$\mathrm{R}_n(t_1) = \mathrm{I}, \tag{45}$$

где I — единичная матрица, т.е. $\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Равенства (43) с помощью матрицы $\mathrm{R}_n(t)$ можно представить таким образом:

$$\begin{bmatrix} q_n(t) \\ p_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{n11}(t) & r_{n12}(t) \\ r_{n21}(t) & r_{n22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_n(t) \\ y_n(t) \end{bmatrix}. \tag{46}$$

Системе уравнений (41) можно поставить в соответствие следующую матрицу четвертого порядка:

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} \mathrm{P}_n & -\mathrm{S}_n \\ -\mathrm{Q}_n & -\mathrm{P}_\mathrm{n}^\mathrm{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \left[\frac{a\pi n}{l}\right]^4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -\left[\frac{a\pi n}{l}\right]^4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные числа матрицы $\mathbf{A}_n$ равны

$$\lambda_{n1} = -\alpha_n - i\beta_n,\ \lambda_{n2} = \alpha_n + i\beta_n,\ \lambda_{n3} = -\alpha_n + i\beta_n,\ \lambda_{n4} = \alpha_n - i\beta_n,$$

где $\alpha_n = \sqrt{\dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{a\pi n}{l}\right)^8 + 1} + \left(\dfrac{a\pi n}{l}\right)^4}{2}}$, $\beta_n = \sqrt{\dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{a\pi n}{l}\right)^8 + 1} - \left(\dfrac{a\pi n}{l}\right)^4}{2}}$.

Решение системы уравнений (41) можно построить с помощью матричной экспоненты $\exp(\mathbf{A}_n t)$. Для ее нахождения задействован пакет прикладных программ Mathematica 5.2 [3, с. 266]. В результате получено следующее утверждение.

Теорема 4. Матрица $\exp(\mathbf{A}_n t)$ имеет вид

$$\exp(\mathbf{A}_n t) = \mathbf{S}_n(t) = \begin{bmatrix} s_{n11}(t) & s_{n12}(t) & s_{n13}(t) & s_{n14}(t) \\ s_{n21}(t) & s_{n22}(t) & s_{n23}(t) & s_{n24}(t) \\ s_{n31}(t) & s_{n32}(t) & s_{n33}(t) & s_{n34}(t) \\ s_{n41}(t) & s_{n42}(t) & s_{n43}(t) & s_{n44}(t) \end{bmatrix},$$

где

$$s_{n11}(t) = \cosh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t),\ s_{n21}(t) = \alpha_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t) - \beta_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t),$$

$$s_{n31}(t) = -\alpha_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t) - \beta_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t),\ s_{n41}(t) = \sinh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t),$$

$$s_{n12}(t) = \frac{\alpha_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t) + \beta_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t)}{\alpha_n^2 + \beta_n^2},\ s_{n22}(t) = \cosh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t),$$

$$s_{n32}(t) = -\sinh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t),\ s_{n42}(t) = \frac{\alpha_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t) - \beta_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t)}{\alpha_n^2 + \beta_n^2},$$

$$s_{n13}(t) = \frac{\alpha_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t) - \beta_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t)}{\alpha_n^2 + \beta_n^2},\ s_{n23}(t) = \sinh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t),$$

$$s_{n33}(t) = \cosh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t),\ s_{n43}(t) = -\frac{\alpha_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t) + \beta_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t)}{\alpha_n^2 + \beta_n^2},$$

$$s_{n14}(t) = -\sinh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t),\ s_{n24}(t) = -\alpha_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t) - \beta_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t),$$

$$s_{n34}(t) = -\alpha_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t) + \beta_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t),\ s_{n44}(t) = \cosh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t).$$

Если ввести обозначения

$$\mathbf{x}_n(t) = \begin{bmatrix} z_n(t) \\ y_n(t) \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\lambda}_n(t) = \begin{bmatrix} q_n(t) \\ p_n(t) \end{bmatrix},\ \mathbf{F}_{n11}(t) = \begin{bmatrix} s_{n11}(t) & s_{n12}(t) \\ s_{n21}(t) & s_{n22}(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{n12}(t) = \begin{bmatrix} s_{n13}(t) & s_{n14}(t) \\ s_{n23}(t) & s_{n24}(t) \end{bmatrix},\ \mathbf{F}_{n21}(t) = \begin{bmatrix} s_{n31}(t) & s_{n32}(t) \\ s_{n41}(t) & s_{n42}(t) \end{bmatrix},\ \mathbf{F}_{n22}(t) = \begin{bmatrix} s_{n33}(t) & s_{n34}(t) \\ s_{n43}(t) & s_{n44}(t) \end{bmatrix},$$

то можно записать следующие равенства:

$$\mathbf{x}_n(t_1) = \mathbf{F}_{n11}(t_1 - t)\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{F}_{n12}(t_1 - t)\boldsymbol{\lambda}_n(t),\ \boldsymbol{\lambda}_n(t_1) = \mathbf{F}_{n21}(t_1 - t)\mathbf{x}_n(t) + \mathbf{F}_{n22}(t_1 - t)\boldsymbol{\lambda}_n(t). \quad (47)$$

Из соотношений $q_n(t_1) = z_n(t_1)$, $p_n(t_1) = y_n(t_1)$, $n = 1, 2, ...,$ следует, что $\boldsymbol{\lambda}_n(t_1) = \mathbf{x}_n(t_1)$, $n = 1, 2, ...$ Поэтому на основании соотношения (47) имеем

$$\boldsymbol{\lambda}_n(t) = [\mathbf{F}_{n12}(t_1 - t) - \mathbf{F}_{n22}(t_1 - t)]^{-1} [\mathbf{F}_{n21}(t_1 - t) - \mathbf{F}_{n11}(t_1 - t)] \mathbf{x}_n(t), \qquad (48)$$

где $\boldsymbol{\lambda}_n(t) = \mathbf{R}_n(t) \mathbf{x}_n(t)$. Сравнение равенства (48) и соотношения $\boldsymbol{\lambda}_n(t) = \mathbf{R}_n(t) \mathbf{x}_n(t)$ приводит к следующему заключению.

Теорема 5. Матрицу $\mathbf{R}_n(t)$ можно найти с помощью соотношения

$$\mathbf{R}_n(t) = [\mathbf{F}_{n12}(t_1 - t) - \mathbf{F}_{n22}(t_1 - t)]^{-1} [\mathbf{F}_{n21}(t_1 - t) - \mathbf{F}_{n11}(t_1 - t)].$$

Заключение

Перспективным исследованием является обобщение результатов, полученных в данной работе, на случай систем с дробными производными [4, 5] с помощью метода разрешающих функций [6, 7]. Также важно исследовать сходимость рядов Фурье (37).

М.М. Копець

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСОМ КОЛИВАНЬ ТОНКОГО ПРЯМОКУТНОГО СТРИЖНЯ

Розглянуто лінійно-квадратичну задачу оптимального керування процесом коливань тонкого прямокутного стрижня. Для цієї задачі оптимізації отримано необхідні умови оптимальності, аналіз яких дав можливість вивести систему інтегро-диференціальних рівнянь Ріккаті, розв'язок якої подано в замкненій формі.

M.M. Kopets

OPTIMAL CONTROL OF THE PROCESS OF OSCILLATIONS OF A THIN RECTANGULAR SHANK

The linear-quadratic optimal control of the process of oscillations of a thin rectangular shank is considered. For a considered optimization problem the necessary conditions of optimality are obtained. The analysis of these conditions has given the chance to deduce the system of Riccati integro-differential equations which solution is presented in closed form.

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М. : Наука, 1977. — 736 с.
2. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. — М. : Наука, 1977. — 480 с.
3. *Васильев А.Н.* Mathematica. Практический курс с примерами решения прикладных задач. — К. : ВЕК+, СПб. : КОРОНА-ВЕК, 2008. — 448 с.
4. *Чикрий А.А., Эйдельман С.Д.* Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана-Лиувилля // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 6. — С. 66–99.
5. *Эйдельман С.Д., Чикрий А.А.* Динамические игровые задачи сближения для уравнений дробного порядка // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, № 11. — С. 1566–1583.
6. *Chikrii A.A., Rappoport J.S., Chikrii K.A.* Multivalued mapping and their selectors in the theory of conflict-controlled processes // Cybernetics and Systems Analysis. — 2007. — **43**, N 5. — P. 719–730.
7. *Chikrii A.A., Dzyubenko K.J.* Bilinear Markov processes of searching for moving targets // Journal of Automation and Information Sciences. — 2001. — **33**, N 5. — P. 62–74.

Получено 10.06.2014

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. НАН Украины А.А. Чикрием.