УДК 519.854

Н.В. Лищук

СЛОЖНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРОЦЕДУР АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ЗАДАЧ БУЛЕВА ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Введение

Для задач дискретного программирования анализ устойчивости сводится к определению таких изменений параметров (коэффициентов) исходной задачи, при которых оптимальное решение остается без изменений [1]. Эффективность и простота — основные черты случайных алгоритмов, что часто делает рандомизацию полезной для решения сложных задач в разнообразных приложениях. В частности, в [2] рандомизация используется для исследования постоптимального анализа задач дискретной оптимизации. Поскольку понятия постоптимального анализа и анализа устойчивости в некотором смысле взаимосвязаны, возникает идея использовать результаты работ [2–4] для исследования сложности вероятностных процедур анализа устойчивости целочисленных задач булева программирования.

Полиномиальные вероятностные алгоритмы

В дальнейшем не будем проводить различия между проблемами распознавания свойств, поиска и оптимизации, поскольку для *NP*-полных задач они вычислительно эквивалентны (этот вопрос подробно исследуется в [5]).

Дадим некоторые необходимые в дальнейшем понятия и определения [5–7].

Сначала определим ВМТ — вероятностную машину Тьюринга (МТ). Существует два подхода к определению ВМТ, приведем их.

Определение 1. Вероятностная машина Тьюринга аналогична недетерминированной машине Тьюринга, только вместо недетерминированного перехода в два состояния машина выбирает один из вариантов с равной вероятностью.

Определение 2. Вероятностная машина Тьюринга представляет собой детерминированную машину Тьюринга (ДМТ), имеющую дополнительно источник случайных битов, любое число которых, например, она может заказать и загрузить на отдельную ленту и использовать в вычислениях обычным для МТ образом. Оба определения — 1(online ВМТ) и 2(offline ВМТ) — эквивалентны. Более того, они вполне соответствуют обычному компьютеру, к которому подключен внешний генератор случайных последовательностей на основе случайных физических процессов.

Определение 3. Пусть А — случайный алгоритм, который допускает ответ «?» (не знаю). Будем говорить, что А — алгоритм Лас Вегас для функции F, если для каждого входа x

$$P[A(x)=F(x)]\geq\frac{1}{2},\tag{1}$$

$$P[A(x)="?"]=1-P[A(x)=F(x)]\leq\frac{1}{2},\tag{2}$$

условие (2) исключает неправильный ответ, так как дается правильный ответ или «?». Если $A(x)$ — полиномиальная ВМТ, то соответствующий класс сложности — *ZPP*.

Определение 4. Случайный алгоритм А называется алгоритмом Лас Вегас, вычисляюшим функцию F, если для произвольного входа x $P[A(x)=F(x)]=1$.

Модели из определений 3 и 4 эквивалентны в том смысле, что каждую из них можно свести к другой.

Определение 5. Пусть А — случайный алгоритм и (Σ, L) — проблема распознавания свойств (Σ — алфавит, L — язык). Будем говорить, что А — алгоритм

Монте-Карло с односторонней ошибкой (1MC), если $P[A(x)=1]\geq\frac{1}{2}$ для каждого $x\in L$ и $P[A(x)=0]=1$ для каждого $x\notin L.$ Если A — полиномиальная ВМТ, то соответствующий класс сложности — RP.

Справедливы следующие включения классов сложности проблем [5–7]:

$$P\subseteq ZPP\subseteq RP\subseteq NP \tag{3}$$

Об эффективном вероятностном анализе устойчивости задач булева программирования

Введем формализацию понятия эффективного вероятностного анализа устойчивости для задач булева программирования.

Пусть Π — некоторая NP-трудная оптимизационная задача (возможно, и NP-полная), I — экземпляр задачи Π. Каждому экземпляру I задачи Π поставлено в соответствие множество $\{\delta(I)\}$ экземпляров задачи Π. Анализ устойчивости для пары $(I,I')(I'\in\{\delta(I)\})$ дает ответ на вопрос: будет ли оптимальное решение экземпляра I $(\{\mathrm{opt}(I)\})$ оптимальным решением экземпляра I' задачи с $\{\delta(I)\}$? Введем понятие κ-эффективного (κ — один из классов ZPP, RP) устойчивого сведения экземпляров задачи $\Pi(\infty^{\kappa}_{\mathrm{ans}})$. Функцию $f(x)$ с областью определения D будем называть тождественной в области определения, если $f(x)=x$ для произвольного $x\in D.$

Определение 6. Будем говорить, что экземпляр $I'\in\Pi$ κ-эффективно $(\kappa\in\{ZPP, RP\})$ устойчиво сводится к экземпляру $I\in\Pi,$ если существует такая полиномиально вычислимая на ВМТ из класса $\kappa,$ тождественная в области определения функция $f(\cdot),$ что $opt(I')=f(opt(I)),$ обозначение $I\infty^{\kappa}_{\mathrm{ans}}I'.$ При этом сложностью анализа устойчивости для пары (I,I') называется сложность, число тактов ВМТ для вычисления $f(\cdot).$

Согласно определению 6 введены сведения $\infty^{ZPP}_{ans}, \infty^{RP}_{ans}.$

Замечание 1. Введенное понятие устойчивости соответствует устойчивости по функционалу, рассмотренному в [8].

Будем говорить, что функция $f(n)$ полиномиального роста $(f(n)=\mathrm{poly}(n)),$ если для некоторой константы $c(c=O(1))$ при достаточно больших n выполняется $f(n)\leq n^{c}.$

Определение 7. Задачу (распознавания свойств, поиска, оптимизации) будем называть κ-полиноминально разрешимой $(\kappa\in\{ZPP, RP\}),$ если существует полиномиальная ВМТ из класса $\kappa,$ которая дает (точное) решение задачи.

Рассмотрим задачу (P) булева программирования вида

$$\min\{f(x)=f(x_1,...,x_n)\},$$

$$x\in G\subset B^n=\{0,1\}^n,$$

а также семейство $\{P_I\}$ задач булева программирования (P_I):

$$\min\{f(x)=f(x_1,...,x_n)\},$$

$$x\in G_I\subset B^n=\{0,1\}^n,$$

где $I\in\{I_1,I_2,...,I_q\}$ — экземпляры семейства задач $\{P_I\},$ $q=\mathrm{poly}(n),$ среди $I_1,...,I_q$ есть экземпляр, который соответствует задаче (Р) (т.е. $\exists j: G_{I_j}=G$).

Для произвольных $x, y \in B^n$: $x \le y$ тогда и только тогда, когда

$$x_i \le y_i,\ i = 1, ..., n.$$

Теорема 1. Если одновременно выполняются условия:

1) существует полиномиальная ВМТ из класса $\kappa(\kappa \in \{ZPP, RP\})$ для определения допустимого решения x задачи (P) такого, что не существует

$$x' \in G, x' \le x, x' \ne x;$$

2) для произвольного допустимого решения x^* задачи (P) существует экземпляр I_p семейства (P_I) такой, что x^* — оптимальное решение относительно G_{I_p};

3) $I_1 \infty^{\kappa}_{ans} I_2 \infty^{\kappa}_{ans} ... \infty^{\kappa}_{ans} I_q$, то задача (P) — κ-полиноминально разрешимая.

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 3 из [2].

Сложность вероятностного анализа устойчивости задачи о покрытии множествами

Задачу о покрытии множествами будем рассматривать в постановке (задача $\Pi(A, c)$:

$$\min\left\{ f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \middle| x \in Q(A) \right\},$$

$$Q(A) = \left\{ x \in B^n \middle| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge 1,\ i = 1, ..., m \right\},$$

$B^n = \{0,1\}^n, A = \{a_{ij}\}, i = 1, ..., m;\ j = 1, ..., n;\ A - (m, n)$ — булева матрица $(m \le n)$; $c_i > 0, i = 1, ..., n.$

Для булевых (m, n)-матриц $A = \{a_{ij}\} B = \{b_{ij}\}$ введем метрику $\rho(\mathrm{A}, B) = \sum_{i,j} |a_{ij} - b_{ij}|.$

Пусть $M = \{1, ..., m\}, N = \{1, ..., n\}, K_1 = \{i_1, ..., i_k\}$ — некоторая выборка из N объемом $k (1 \le k < n, k < m)$. Точка $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in B^n$ такая, что $\alpha_j = 1$ при $j \in K_1$, $\alpha_j = 0$ при $j \in N \setminus K_1$, а $\alpha^i = (\alpha_1^i, ..., \alpha_n^i) \in B^n$ такая, что $\alpha_i^i = 1, \alpha_j^i = 0$ при $j \ne i$. Опишем класс $\{A_\alpha\}$ булевых (m, n)-матриц $A = \{A_{ij}\}$; $A \in \{A_\alpha\}$ тогда и только тогда, когда матрица A не содержит одинаковых и нулевых строк и, кроме этого, выполняются условия:

1) у матрицы A есть подматрица $A^1 = \begin{pmatrix} \alpha^{i_1} \\ ... \\ \alpha^{i_k} \end{pmatrix}$;

2) у матрицы A есть подматрица $A^2 = \{a_{ij}\} (i \in M \setminus K_1, j \in N)$ такая, что для произвольного $i \in M \setminus K_1$ $\sum_{j \in K_1} a_{ij} \ge 1$, остальные элементы у A^2 произвольны.

Пусть $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*) \in B^n$ такой, что $x_{i_1}^* = ... = x_{i_k}^* = 1$, остальные координаты вектора x^* равны 0, $A^* \in \{A_\alpha\}$.

Лемма 1 [3]. Пусть x^* — (единственное) оптимальное решение экземпляра I задачи $\Pi(A^*, c)$.

 ISSN 0572-2691

Пусть x^* — оптимальное решение экземпляра I задачи о покрытии $\Pi(A, c)$ и A' — такая, что $\rho(A, A') = 1$.

Можно ли за полиномиальное время определить, что x^* остается оптимальным решением задачи $\Pi(A', c)$? В связи с этим пусть $Check(\Pi(A', c), x^*)$ — процедура, которая определяет оптимальное решение x^* задачи $\Pi(A', c)$, исходя из оптимального решения x^* задачи $\Pi(A, c)$. Если эта процедура соответствует сводимости $\propto_{ans}^{\kappa}$ $(\kappa \in \{ZPP, RP\})$, то будем ее называть κ-вероятностной полиномиальной процедурой анализа устойчивости.

Теорема 2. Пусть $\kappa \in \{ZPP, RP\}$. Если $\kappa \neq NP$, то существует экземпляр I задачи $\Pi(A, c)$, что для $Check(\Pi(A', c), x^*)$ не существует κ-вероятностной полиномиальной процедуры анализа устойчивости.

Доказательство проведем для случая $\kappa = RP$ (для случая $\kappa = ZPP$ аналогично). Воспользуемся идеями из [2]. Допустим, что для произвольного экземпляра I задачи $\Pi(A, c)$, для $Check(\Pi(A', c), x^*)$ существует RP-вероятностная полиномиальная процедура анализа устойчивости.

Пусть Alg — произвольный (приближенный) полиномиальный алгоритм из класса RP для решения произвольного $I \in \Pi(A, c)$ и $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*) \in B^n$ такой, что $x_{i_1}^* = ... = x_{i_k}^* = 1$, остальные координаты вектора x^* равны 0, есть результат работы алгоритма Alg на I. Пусть $A^* \in \{A_\alpha\}$ — матрица, соответствующая x^*, в силу леммы 1 алгоритм Alg для экземпляра I^* (экземпляр $\Pi(A, c)$ с матрицей $A = A^*$) даст точное решение задачи и п. 1 теоремы 1 выполнен.

Пусть для произвольной булевой (m, n)-матрицы A $T(A)$-преобразование матрицы A с заменой произвольного ее одного элемента 0 на 1, или 1 на 0 Запишем, что $A' = T(A)$, если после применения к A преобразования T получилась матрица A' (ясно, что $\rho(A, A') = 1$).

Произвольную матрицу A можно получить из матрицы A^*, применяя не более, чем $m \cdot n$ преобразований T:

$$A^* \xrightarrow{T} A_1 \xrightarrow{T} A_2 \xrightarrow{T} ... \xrightarrow{T} A_k = A, \tag{4}$$

где $A_1 = T(A^*), \rho(A_1, A^*) = 1,$

$$A_{i+1} = T(A_i), \rho(A_{i+1}, A_i) = 1, i = 1, ..., k-1;$$

$$k \leq m \cdot n \leq n^2,$$

т.е. выполнен п. 2) теоремы 1.

Применяя к последовательности (4) RP-вероятностную полиномиальную процедуру анализа устойчивости $Check(\Pi(A', c), x^*)$ k раз $(k \leq m \cdot n \leq n^2)$ получим, что для произвольного экземпляра I задачи $\Pi(A, c)$ существует последовательность $I^*, I_1, I_2, ..., I_k, I_{k+1}$ экземпляров, причем

$$I^* \propto_{ans}^{RP} \ I_1 \propto_{ans}^{RP} I_2 \propto_{ans}^{RP} ... \propto_{ans}^{RP} I_k \propto_{ans}^{RP} I_{k+1},$$

где $I_1 \in \Pi(A^*, c), I_2 \in \Pi(A_1, c), I_3 \in \Pi(A_2, c), ...,$

$$I_k \in \Pi(A_{k-1}, c), I_{k+1} \in \Pi(A_k, c), A_k = A.$$

Выполнен п. 3 теоремы 1. Отсюда следует, что задача $\Pi(A, c)$ RP-полиномиально разрешима, т.е. принадлежит классу RP. Показано, что $NP \subseteq RP$. Отсюда, так как $RP \subseteq NP$ ((3)), получим $RP = NP$.

Теорема доказана.

Замечание 2. Результат, подобный теореме 2, имеет место для задачи о ранце.

Заключение

Анализ устойчивости задач дискретной оптимизации в разных постановках рассматривался в работах [1, 4, 8–10]. Например, в [4] установлено, что решение обобщенно близких задач о ранце является *NP*-трудным. Данная работа показывает, что для задач о покрытии (которые отличаются в одной позиции матрицы ограничений) не существует полиномиальных κ-вероятностных процедур анализа устойчивости ($\kappa \in \{ZPP, RP\}$) при $\kappa \neq NP$.

Н.В. Ліщук

СКЛАДНІСТЬ ЙМОВІРНІСНИХ ПРОЦЕДУР АНАЛІЗУ СТІЙКОСТІ ЦІЛОЧИСЛОВИХ ЗАДАЧ БУЛЕВОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Показано, що для задач про покриття (які відрізняються однією позицією матриці обмежень) не існує поліноміальних κ-ймовірнісних процедур аналізу стійкості ($\kappa \in \{ZPP, RP\}$) при $\kappa \neq NP$.

N.V. Lishchuk

THE COMPLEXITY OF PROBABILISTIC SENSITIVITY ANALYSIS PROCEDURES FOR INTEGRAL BOOLEAN PROGRAMMING PROBLEMS

It is shown that the set covering problems (which differ in one position of the constraint matrix) have no κ-probabilistic polynomial procedures for sensitivity analysis ($\kappa \in \{ZPP, RP\}$) if $\kappa \neq NP$.

1. *Fernandez-Baca D., Benkatachalam B.* Sensitivity analysis in combinatorial optimization // handbook of approximation algorithms and metaheuristics (ed. T. Guzalez). — 2007. — Chapman&Hall / CRC Computer and Information Science Series. — P. 30-1–30-29.
2. *Михайлюк В.А.* Подход к оценке сложности вероятностных процедур постоптимального анализа дискретных задач оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — **48**, № 6. — С. 3–10.
3. *Михайлюк В.А.* Общий подход к оценке сложности постоптимального анализа дискретных задач оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — **46**, № 2. — С. 134–141.
4. *Михайлюк В.А., Лищук Н.В.* Анализ устойчивости задачи о ранце: один отрицательный результат // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — **49**, № 2. — С. 48–51.
5. *Goldreich O.* Computational complexity. A conceptual perspective. — Cambridge University Press, 2008. — 606 p.
6. *Hromkovich J.* Design and analysis of randomized algorithms. Introduction to design paradigms. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. — 279 p.
7. *Кузюрин Н.Н., Фомин С.А.* Сложность вычислений и анализ алгоритмов. — М.: МФТИ, 2007. — 312 с.
8. *Леонтьев В.К., Мамутов К.Х.* Устойчивость решений в задачах линейного булева программирования // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 1988. — **28**, № 10. — С. 1475–1481.
9. *Сергиенко И.В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. — Киев : Наук. думка, 1985. — 210 с.
10. *Сергиенко И.В., Филоненко Н.В.* Решение некоторых задач устойчивости в целочисленном линейном программировании // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1982. — № 6. — С. 79–82.

Получено 31.03.2015