

МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

УДК 681.5.015

Н.Н. Сальников, А.Н. Сальникова

ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНЕЧНОМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ И ЛОКАЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ПОМЕХАХ*

Введение

Оценивание или наблюдение состояний систем с распределенными параметрами (СРП) — исключительно важная процедура для этих систем, поскольку в них, как правило, невозможно измерить всю функцию (вектор) состояния, для этого необходимо иметь значительное число измерительных устройств, достаточно плотно заполняющих область протекания процесса. Поэтому для управления или прогнозирования поведения СРП необходимо восстанавливать вектор состояния, используя локальные измерения.

Задаче оценивания состояния СРП посвящено большое количество работ, начиная с исторически первых [1–7] и заканчивая работами последних лет, ссылки на которые можно найти в [8], а также в относительно недавно вышедшей книге [9], где подробно рассматриваются различные аспекты этой задачи. Исходными для решения задачи оценивания состояния являются наличие измерений и математическая модель объекта.

Большинство моделей СРП получается исходя из так называемых первичных принципов, т.е. фундаментальных физических законов. Иногда именно эта форма уравнений непосредственно используется для построения наблюдателей состояния. В частности, в линейном случае решение соответствующих уравнений в частных производных выражается в интегральном виде с использованием фундаментального решения. Задача оценивания состояния в этом случае сводится [10] к некоей вариационной задаче. Более универсальный подход связан с представлением исходных уравнений в частных производных в виде дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с использованием теории полугрупп непрерывных операторов [11]. Получаемые уравнения по форме совпадают с уравнениями для конечномерного случая, однако теперь в них фигурируют дифференциальные или интегральные операторы относительно пространственных переменных. В этом случае для решения задач наблюдения или оценивания можно использовать аналоги подходов, применяемых в конечномерном случае.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Целевой комплексной программы НАН Украины по научным космическим исследованиям на 2013–2017 гг. Договор 2-02/14.

© Н.Н. САЛЬНИКОВ, А.Н. САЛЬНИКОВА, 2015

*Международный научно-технический журнал
«Проблемы управления и информатики», 2015, № 3*

Практическая реализация алгоритмов оценивания состояния СРП связана с необходимостью численного решения уравнений в частных производных, например, с дискретизацией этих уравнений по пространственным переменным. При этом принято выделять два основных подхода:

1) ранняя дискретизация (early lumping), при которой с помощью одного из численных методов получается конечномерная модель СРП, а затем используются методы оценивания состояния этой конечномерной системы;

2) поздняя дискретизация (late lumping), при которой для решения задачи оценивания используются исходные уравнения, далее получается (если это возможно) аналитическое решение и только после получения итоговых уравнений переходят к их дискретным аналогам для численных процедур решения.

Последний подход требует в общем случае более сложных математических построений, чем первый. Несмотря на это, к настоящему времени продолжают развиваться оба подхода [8, 9, 12–16].

В данной работе рассматривается задача оценивания состояния распределенного процесса, протекающего в ограниченной области при известных граничных условиях, но неизвестных начальных условиях, и который описывается линейным уравнением. Для решения задачи используется первый подход (ранняя дискретизация). Конечномерная модель процесса получается с использованием метода Галеркина или Петрова–Галеркина [17–19], применяемого для получения численного решения широкого класса уравнений в частных производных. Особенность рассматриваемой задачи заключается в использовании нестохастического подхода [20–24] к трактовке неопределенности при оценивании состояния этой конечномерной модели. В частности, для оценивания состояний использовался модифицированный метод эллипсоидов [25], обладающий достаточно высокой скоростью сходимости и устойчивостью по отношению к нарушению априорных гипотез о неопределенных величинах. Применение предложенного подхода проиллюстрировано на примере решения двух модельных задач, а именно, оценивания состояния колеблющейся струны и мембраны с использованием точечных измерений и измерений вдоль линий соответственно. Мотивацией рассмотрения последней задачи послужили исследования динамики волновых процессов в гелиосферной плазме. Измерения физических параметров протекания этих процессов осуществляются с помощью группировки спутников вдоль их траекторий, пронизывающих исследуемую область. С использованием этих измерений требуется восстановить пространственную картину протекания данных процессов.

1. Постановка задачи и схема решения

Пусть исследуемый распределенный процесс описывается скалярной функцией $h = h(x, t)$, удовлетворяющей следующим уравнениям в частных производных:

$$\frac{\partial^p h}{\partial t^p} = L(h) + f(x, t), \quad t \in (0, T], \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$G(h) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (2)$$

В этих уравнениях t — время, Ω — односвязная ограниченная область в вещественном евклидовом пространстве R^q , где q может принимать значения от 1 до 3, Γ — граница области Ω . Граничные условия (2) для уравнения (1) будем считать однородными и предполагать, что в (1) и (2) $L(h)$ и $G(h)$ — линейные дифференциальные операторы по пространственным переменным относительно h ,

коэффициенты при производных у этих операторов могут зависеть от пространственной координаты x , от времени t не зависят. Целое число p в (1) равно 1 или 2. Кусочно-непрерывная функция $f(x, t) \in C(\Omega \times (0, T])$ может представлять как распределенные источники входных воздействий на процесс, так и являться следствием сведения исходной неоднородной по граничным условиям задачи к однородной.

Далее, чтобы не загромождать изложение несущественными деталями, рассмотрим схему решения задачи для случая $p=1$. Схема решения для случая $p=2$ будет пояснена при рассмотрении численных примеров. При $p=1$ начальные условия для уравнения (1) могут иметь следующий вид: $h(x, 0) = h_0(x)$. По условию задачи будем считать их неизвестными, предполагая однако, что при этих начальных и граничных условиях (2) решение уравнения (1) существует, единственное и устойчивое.

Будем также считать, что уравнения (1) и (2) допускают получение решения методом Галеркина или Петрова–Галеркина [17–19]. Это означает, что существуют наборы базисных функций $H_i(x)$ и весовых функций $W_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, при которых приближенное решение

$$\tilde{h}(x, t) = \sum_{i=1}^n z_i(t) H_i(x) = H(x)^T z(t) \quad (3)$$

равномерно аппроксимирует решение задачи (1), (2) в рассматриваемой области $\Omega \times (0, T]$ с заданной константой $\varepsilon > 0$, т.е. выполняется неравенство

$$|\tilde{h}(x, t) - h(x, t)| < \varepsilon \quad \forall t \in (0, T], \quad \forall x \in \Omega. \quad (4)$$

В (3) $H(x) = (H_1(x), H_2(x), \dots, H_n(x))^T$, а вектор $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))^T$ удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$M \frac{dz(t)}{dt} = Az(t) + F(t), \quad (5)$$

где матрицы $M = \int_{\Omega} WH^T d\Omega$, $A = \int_{\Omega} WL(H^T) d\Omega$, векторы $F(t) = \int_{\Omega} f(x, t)W(x) d\Omega$, $W(x) = (W_1(x), W_2(x), \dots, W_n(x))^T$. При использовании метода Галеркина берут весовые функции, совпадающими с базисными, $W(x) = H(x)$. Начальные условия для уравнения (5) — вектор $z(0) = z_0$ функционально связан с неизвестной функцией $h_0(x)$ и, следовательно, неизвестен.

Предполагается, что в дискретные моменты времени $t_k = \Delta t \cdot k$ ($k = 0, 1, \dots$) проводится измерение величины $h(x, t_k)$ в конечном числе точек $x_{ks} = x_s(t_k)$, $s = \overline{1, n_y(k)}$, области Ω . Здесь $x_s(t): R \rightarrow R^q$ — известные функции времени. Число точек измерений $n_y(k)$ может быть разным для разных моментов времени k . Далее, чтобы не усложнять обозначения, вместо $n_y(k)$ будем писать n_y . Таким образом, в каждый момент времени вектор измерений $y_k \in R^{n_y}$ определяется выражением

$$y_k = y(t_k) = (y_1(t_k), \dots, y_{n_y}(t_k))^T = h_k + \xi_k. \quad (6)$$

Здесь вектор $h_k = (h(x_{k1}, t_k), \dots, h(x_{kn_y}, t_k))^T$, $\xi_k = (\xi_1(t_k), \dots, \xi_{n_y}(t_k))^T$ — вектор ограниченных ошибок измерений,

$$|\xi_s(t)| \leq c_s, \quad \forall t \geq 0, \quad s = \overline{1, n_y}, \quad (7)$$

где c_s — известные положительные константы.

Задача заключается в построении вычислительной процедуры, которая на основе модели процесса (1) и (2), описываемой уравнениями (3) и (5), а также измерений (6) позволит получать (в темпе со временем) оценку $\hat{h}(t, x) = H(x)^T \hat{x}(t)$ функции $h(t, x)$, для которой при любом фиксированном числе $c > 0$, существует такой конечный момент времени K , начиная с которого выполняется неравенство

$$|h(x, t_k) - \hat{h}(x, t_k)| \leq c + \varepsilon \quad \forall k \geq K \quad \forall x \in \Omega.$$

Разрешимость этой задачи будет обсуждаться далее при рассмотрении конкретных примеров.

Приведем уравнение измерения (6) к виду, используемому в задачах оценивания состояний динамических систем [26]. Для этого запишем компоненты $h_k^s = h(x_{ks}, t_k)$ вектора h_k , используя (3) и оценку (4), в виде

$$h_k^s = h(x_{ks}, t_k) = \tilde{h}(x_{ks}, t_k) + \varepsilon_k^s = H(x_{ks})^T z(t_k) + \varepsilon_k^s = C_{ks}^T z(t_k) + \varepsilon_k^s, \quad (8)$$

где вектор $C_{ks} = H(x_{ks})$, величина ε_k^s отражает ошибку представления решения (1) в виде конечного ряда (3). Как следует из (4),

$$|\varepsilon_k^s| < \varepsilon. \quad (9)$$

Сформируем из векторов C_{ks} матрицу $C_k = (C_{k1} : \dots : C_{kn_y})$ и рассмотрим вектор $\varepsilon_k = (\varepsilon_k^1, \dots, \varepsilon_k^{n_y})^T$. Тогда (6) с учетом этих обозначений и выражения (8) можно записать в виде

$$y_k = C_k^T z(t_k) + \xi_k + \varepsilon_k. \quad (10)$$

Уравнения (5) и (10) представляют собой классические уравнения задачи оценивания вектора состояния $z(t_k)$ системы (5) по результатам измерения вектора y_k . При определенном выборе матрицы C_k , т.е. точек или линий измерения можно обеспечить наблюдаемость системы (5) и (10), следовательно, и однозначное решение задачи оценивания вектора $z(t_k)$. Особенность задачи заключается в том, что, во-первых, матрица C_k может менять свою размерность с течением времени, во-вторых, отсутствуют данные о стохастических свойствах помех измерения, а неизвестный вектор ε_k принципиально не обладает стохастическими свойствами. Для этих величин известны лишь оценки (7) и (9). Поэтому для решения задачи оценивания предлагается использовать метод эллипсоидального оценивания [20–23], в частности модифицированный метод эллипсоидов [25], который не использует предположения о стохастической природе неопределенных величин, более того, не предполагает наличие априорной множественной оценки для вектора z_0 .

Особенно простой вид уравнений (5) получается, если в качестве базисных функций метода Галеркина использовать собственные функции задачи (1), (2). Именно этот случай будет рассмотрен ниже при численном моделировании.

2. Оценивание положений и скоростей точек струны при точечных измерениях

Рассмотрим задачу о восстановлении пространственных колебаний струны по измерениям отклонений струны в отдельных точках. Предположим, что струна длины L совершает малые плоские колебания около положения равновесия, влиянием силы тяжести пренебрегаем. Такие колебания описываются [27] уравнением

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = d_0^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad t \in (0, \infty), \quad x \in [0, L], \quad (11)$$

где $h = h(x, t)$ — отклонение струны от положения равновесия, $d_0 = \sqrt{F_0/\rho}$. Здесь F_0 — сила натяжения струны и ее плотность ρ , которую будем считать постоянной. Рассмотрим случай, когда один (левый) конец струны закреплен, второй — свободен. Граничные условия в этом случае имеют следующий вид:

$$h(0, t) = 0, \quad \partial h(x, t) / \partial x \Big|_{x=L} = 0. \quad (12)$$

Начальные условия для уравнения (11) можно записать в виде

$$h(x, 0) = h_0(x), \quad \partial h(x, t) / \partial t \Big|_{t=0} = h_1(x), \quad (13)$$

где функции начального положения струны $h_0(x)$ и начальных скоростей $h_1(x)$ неизвестны.

Решение уравнения (11) при условии (12) может быть представлено [27] в виде следующего ряда:

$$h(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(t) H_i(x), \quad (14)$$

где

$$H_i(x) = \sin \lambda_i x, \quad g_i(t) = (a_i \cos(d_0 \lambda_i t) + b_i \sin(d_0 \lambda_i t)), \quad i = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Здесь $\lambda_i = (2i-1)\pi/(2L)$. Для того чтобы ряд (14) удовлетворял условиям (13), коэффициенты a_i и b_i определяются следующими выражениями:

$$a_i = \frac{2}{L} \int_0^L h_0(x) \sin(\lambda_i x) dx = 0, \quad b_i = \frac{4}{(2i-1)\pi d_0} \int_0^L h_1(x) \sin(\lambda_i x) dx, \quad i = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Выражения (14)–(16) будут использованы в численном примере для моделирования динамики струны.

Предполагается, что в одной или нескольких точках x_s , $s = \overline{1, n_y}$, проводится измерение отклонения струны. В результате в каждый момент времени доступны значения функций

$$y_s(t) = h(x_s, t) + \xi_s(t), \quad |\xi_s(t)| \leq c_s, \quad s = \overline{1, n_y}. \quad (17)$$

Здесь $\xi_s(t)$ — ограниченная помеха измерения, каждая константа c_s предполагается известной.

Дальнейшую процедуру решения рассмотрим на конкретном численном примере. Положим $d_0 = 1$ и $L = 10$. Для моделирования динамики струны выберем следующие начальные условия

$$h_0(x) \equiv 0, \quad h_1(x) = \begin{cases} \cos \frac{6\pi}{L}(x - 3L/4) + 1, & x \in [7/12L, 11/12L]; \\ 0, & x \in [0, L] \wedge x \notin [7/12L, 11/12L]. \end{cases} \quad (18)$$

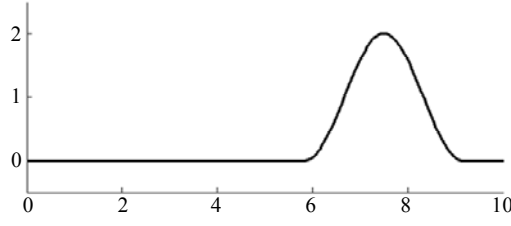


Рис. 1

Можно убедиться, что при начальных условиях (18) для усеченного ряда

$$\bar{h}(x, t) = \sum_{i=1}^n g_i(t) H_i(x) \quad (19)$$

при $n = 15$ выполняется

$$\max_{x \in [0, L]} |h(x, t) - \bar{h}(x, t)| \leq \varepsilon, \quad \max_{x \in [0, L]} |\partial h(x, t) / \partial t - \partial \bar{h}(x, t) / \partial t| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0, \quad (20)$$

где $\varepsilon = 0,05$. Для рассматриваемой задачи собственные функции $H_i(x)$ известны. Однако рассмотрим более общий случай, когда аналитические выражения для собственных функций $H_i(x)$ неизвестны и вместо них используются их аппроксимации $\bar{H}_i(x)$, полученные численно. В частности, такая ситуация возможна, когда плотность струны не постоянная, $\rho = \rho(x)$.

Рассмотрим получение $\bar{H}_i(x)$ с помощью метода конечных элементов (МКЭ) [17, 28]. Разобьем интервал $[0, L]$ на элементы — попарно непересекающиеся интервалы (x_{i-1}, x_i) ($i = \overline{1, N}$), равной длины $\Delta x = x_i - x_{i-1} = L/N$. Приближенное решение уравнения (11) ищем в виде

$$\tilde{h}(x, t) = \sum_{i=0}^N \tilde{g}_i(t) N_i(x), \quad (21)$$

где $N_i(x)$ — кусочно-линейные базисные функции [17, 28], непрерывные и отличные от нуля на интервале $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, линейные на $[x_{i-1}, x_i]$ и $[x_i, x_{i+1}]$, $N_i(x_i) = 1$, равные нулю на границе $[x_{i-1}, x_{i+1}]$. Значения коэффициентов $\tilde{g}_0(t)$ и $\tilde{g}_N(t)$ определяются граничными условиями на левом и правом конце струны. Для случая (12) они имеют следующий вид:

$$\tilde{h}(x_0, t) = \tilde{g}_0(t) \equiv 0, \quad \partial \tilde{h}(x, t) / \partial x \Big|_{x \in [x_{N-1}, x_N]} = \tilde{g}_N(t) / \Delta x - \tilde{g}_{N-1}(t) / \Delta x \equiv 0. \quad (22)$$

Для остальных коэффициентов $\tilde{g}_i(t)$, $i = \overline{1, N-1}$, при использовании МКЭ получается [28] следующая система дифференциальных уравнений:

$$(\ddot{\tilde{g}}_{i-1} + 4\ddot{\tilde{g}}_i + \ddot{\tilde{g}}_{i+1}) / 6 = d_0^2 (\tilde{g}_{i+1} - 2\tilde{g}_i + \tilde{g}_{i-1}) / (\Delta x)^2, \quad i = \overline{1, N-1},$$

которую с учетом (22) можно записать в следующем векторно-матричном виде:

$$M_1 \ddot{\tilde{g}} = M_2 \tilde{g}, \quad (23)$$

где вектор $\tilde{g}(t) = (\tilde{g}_1(t), \dots, \tilde{g}_{N-1}(t))^T$, $(N-1) \times (N-1)$ -матрицы

$$M_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \\ 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad M_2 = 6 \frac{d_0^2}{(\Delta x)^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \\ 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Выражение (21) в совокупности с (22) и (23) представляет собой приближенное (слабое) решение уравнения (11) при условиях (12) и (13). При этом начальные условия для уравнения (23) однозначно определяются начальными условиями (13). При достаточно большом N функция $\tilde{h}(x, t)$, определяемая (21), будет удовлетворять (20) [28].

Выражение (21) с учетом (22) запишем

$$\tilde{h}(x, t) = \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{g}_i(t) \tilde{N}_i(x) = \tilde{g}^T(t) \tilde{N}(x), \quad (25)$$

где

$$\tilde{N}_i(x) = N_i(x), \quad i = \overline{1, N-2}; \quad \tilde{N}_{N-1}(x) = N_{N-1}(x) + N_N(x),$$

$\tilde{N}(x) = (\tilde{N}_1(x), \dots, \tilde{N}_{N-1}(x))^T$. Пусть матрица $\bar{G} = (\bar{g}_1 : \dots : \bar{g}_{N-1})$ составлена из собственных векторов $\bar{g}_j, j = \overline{1, N-1}$, следующей обобщенной задачи на собственные значения

$$\gamma_j M_1 \bar{g}_j = M_2 \bar{g}_j. \quad (26)$$

Можно убедиться, что при условии (24) все собственные значения этой задачи $\gamma_j = -\bar{\lambda}_j^2 < 0$. Считаем, что они упорядочены по номерам j в порядке возрастания их абсолютной величины. Перепишем равенства (26) в виде

$$M_1 \bar{G} \Lambda = M_2 \bar{G}, \quad (27)$$

где $\Lambda = \text{diag}(-\bar{\lambda}_1^2, \dots, -\bar{\lambda}_{N-1}^2)$ — диагональная матрица. Перейдем в (23) и (25) к новой переменной

$$g(t) = \bar{G}^{-1} \tilde{g}(t).$$

Выразив отсюда $\tilde{g}(t) = \bar{G} g(t)$ и подставив в (23) и (25), с учетом (27) получим

$$\ddot{g} = \Lambda g, \quad (28)$$

$$\tilde{h}(x, t) = g^T(t) \bar{G}^T \tilde{N}(x) = g^T(t) \bar{H}(x) = \bar{H}^T(x) g(t), \quad (29)$$

где вектор $\bar{H}(x) = \bar{G}^T \tilde{N}(x) = (\bar{H}_1(x), \dots, \bar{H}_{N-1}(x))^T$. Здесь $\bar{H}_i(x) = \bar{g}_i^T \tilde{N}(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \bar{g}_{ij}(t) \tilde{N}_j(x)$ — оценка собственной функции $H_i(x)$, $\bar{\lambda}_i$ — оценка λ_i , полученные с помощью МКЭ.

Для расчета собственных функций $\bar{H}_i(x)$ примем $N = 200$, $d_0 = 1$, $L = 10$. Графики точных значений λ_i (сплошная линия) и значений $\bar{\lambda}_i$ (пунктирная линия), полученных МКЭ, в зависимости от номера i приведены на рис. 2. На рис. 3 изображены фрагменты графиков собственной функции $H_{150}(x)$ и функции $\bar{H}_{150}(x)$, полученной с помощью МКЭ.

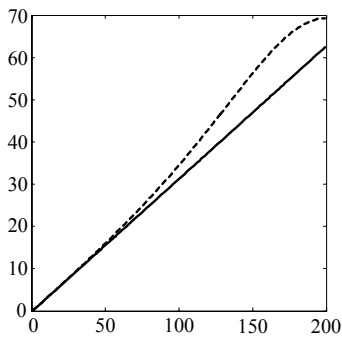


Рис. 2

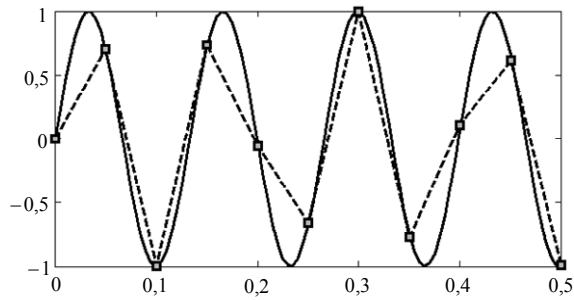


Рис. 3

Эти графики свидетельствуют о нарастающих с номером i ошибок аппроксимации собственных функций $H_i(x)$ и чисел λ_i . Можно показать, что в силу этого непосредственное использование модели (28) и (29) или эквивалентной модели в виде (23) и (25) приведет к неприемлемым ошибкам восстановления мод колебаний исходного уравнения с большими номерами. Поэтому в качестве конечномерной модели взяты уравнения (28) и (29), но с усеченным вектором $g(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))^T$. Систему (28) можно записать в векторно-матричном виде

$$\dot{z}(t) = Az(t), \quad (30)$$

где вектор $z(t) = (g^T(t), \dot{g}^T(t))^T$, матрица

$$A = \begin{pmatrix} \Theta & I \\ \Lambda & \Theta \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Рассмотрим случай, когда измерению доступно отклонение струны в одной точке x_1 . В этом случае, как следует из (17), измеряемая величина — скаляр

$$\begin{aligned} y(t) &= h(x_1, t) + \xi(t) = \tilde{h}(x_1, t) + \xi(t) + \varepsilon(t) = \\ &= \sum_{i=1}^n g_i(t) \bar{H}_i(x_1) + \xi(t) + \varepsilon(t) = C^T z(t) + \xi(t) + \varepsilon(t), \end{aligned} \quad (32)$$

где вектор $C = (\bar{H}_1(x_1), \dots, \bar{H}_n(x_1), 0, \dots, 0)^T \in R^{2n}$, $\varepsilon(t)$ — ошибка модели (28), (29), $|\varepsilon(t)| \leq \varepsilon$. При получении этого выражения использовано (29) и соответствующая оценка (20). Уравнения (30) и (32) представляют собой стандартный набор уравнений для решения задачи оценивания вектора $z(t)$ по результатам наблюдения величины $y(t)$ [26]. Имея в виду реализацию решения этой задачи на ЭВМ, перейдем от уравнений (30) и (32) в непрерывном времени к уравнениям в дискретном времени

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= Az_k; \\ y_k &= C^T z_k + \xi_k + \varepsilon_k; \end{aligned} \quad (33)$$

где матрица $A = e^{A\Delta t} = I + A\Delta t + A^2(\Delta t)^2 + \dots$, вектор $z_k = z(t_k)$ — значение вектора $z(t)$ в дискретный момент времени $t_k = \Delta t \cdot k$, $k = 0, 1, \dots$, остальные величины с индексом k имеют аналогичный смысл. Поскольку относительно помех измерения ξ_k и ошибки модели ε_k известно лишь то, что они ограничены, то для решения задачи оценивания состояния системы (33) — вычисления вектора \hat{z}_k , можно воспользоваться модифицированным методом эллипсоидов [25, 30].

При моделировании было взято $x_1 = 6,1$, $n = 15$. Интервал дискретности по времени был выбран $\Delta t = 0,4$ с, что составляло примерно четверть периода колебаний, соответствующих самой высокой частоте или самому большому собственному значению $\bar{\lambda}_{n=15}$ модели (28), (29). Для моделирования динамики движения струны, а также для моделирования процесса измерения использовалось аналитическое решение в виде (14). Было взято 100 первых слагаемых ряда (14). Помеха измерения моделировалась с помощью датчика случайных чисел, равномерно распределенных в интервале $[-c, c]$. При этом $c = 0,3$, что составляло примерно 10 % от максимального значения отклонения струны. На рис. 4 изображен график ошибки оценивания положения мембраны $\Delta h_k = \max_{x \in [0, L]} |h(x, t_k) - \hat{z}_k^T \bar{H}(x)|$ в зави-

симости от дискретного времени $k = 0, 1, \dots$, а на рис. 5 график ошибки оценивания скоростей точек мембраны $\Delta v_k = \max_{x \in [0, L]} \left| \frac{\partial h(x, t_k)}{\partial t} - \xi_k^T \bar{H}(x) \right|$ также в зависимости от дискретного времени. В этих выражениях векторы ξ_k и ξ_k^T являются составляющими частями вектора $\xi_k = (\xi_k^T, \xi_k^T)^T$ — оценки вектора z_k .

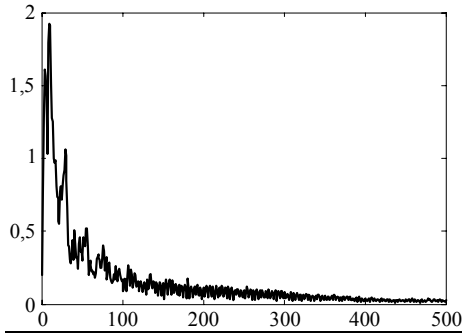


Рис. 4

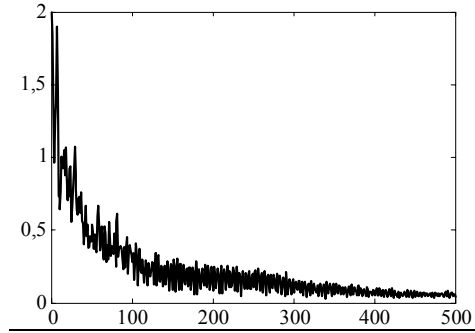


Рис. 5

Приведенные графики демонстрируют высокую точность оценивания положений и скоростей точек струны.

3. Оценивание положения и скоростей точек мембраны с использованием измерений ее положения вдоль линий

Колебания круглой мембраны в полярных координатах описываются следующим уравнением:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} \right), \quad t \in (0, \infty), \quad (r, \varphi) \in [0, r_0] \times (0, 2\pi]. \quad (34)$$

Здесь функция $h = h(r, \varphi, t)$ — смещение мембраны, r_0 — радиус мембраны, a — скорость распространения возмущения, считаем ее постоянной, граничные условия нулевые:

$$h(r, \varphi, t) \Big|_{r=r_0} = h(r_0, \varphi, t) \equiv 0 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi] \quad \forall t \geq 0. \quad (35)$$

Уравнение (34) имеет единственное решение [27], если заданы также начальные условия

$$h(r, \varphi, 0) = h_0(r, \varphi), \quad \frac{\partial h(r, \varphi, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = h_1(r, \varphi), \quad (36)$$

где $h_0(r, \varphi)$ и $h_1(r, \varphi)$ — некоторые функции, будем считать их неизвестными.

Аналитическое решение (34) при условии (35) и (36) приведено в [27] и его можно представить в виде бесконечного ряда

$$h(r, \varphi, t) = \sum_{m, n} (\tilde{g}_{mn}(t) \tilde{H}_{mn}(r, \varphi) + \check{g}_{mn}(t) \check{H}_{mn}(r, \varphi)), \quad (37)$$

где

$$\tilde{g}_{mn}(t) = \left(D_{mn}^1 \cos \frac{\mu_n^m at}{r_0} + G_{mn}^1 \sin \frac{\mu_n^m at}{r_0} \right), \quad \check{g}_{mn}(t) = \left(D_{mn}^2 \cos \frac{\mu_n^m at}{r_0} + G_{mn}^2 \sin \frac{\mu_n^m at}{r_0} \right). \quad (38)$$

В (37) индексы $m = 0, 1, \dots$, $n = 1, 2, \dots$, функции

$$\tilde{H}_{mn} = \cos m\varphi J_m \left(\frac{\mu_n^m}{r_0} r \right), \quad \check{H}_{mn} = \sin m\varphi J_m \left(\frac{\mu_n^m}{r_0} r \right) \quad (39)$$

являются собственными функциями задачи (34), соответствующие одному собственному значению $\lambda_{mn} = (\mu_n^m / r_0)^2$, $m = 0, 1, \dots, n = 1, 2, \dots$. В выражении (39) $J_m(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода, $m = 0, 1, \dots$, μ_n^m — n -й корень уравнения $J_m(\mu_n^m) = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Значения коэффициентов $D_{mn}^1, G_{mn}^1, D_{mn}^2, G_{mn}^2$ в (38) однозначно определяются начальными условиями вида (36). По условию задачи начальные условия неизвестны. Поэтому для получения решения требуется получить оценки функций $\hat{g}_{mn}(t)$ и $\check{g}_{mn}(t)$ с использованием измерений.

Следуя классическому методу Галеркина [17, 28], получим дифференциальные уравнения для функций $\hat{g}_{mn}(t)$ и $\check{g}_{mn}(t)$. Для этого (считая коэффициенты $\hat{g}_{mn}(t)$ и $\check{g}_{mn}(t)$ неизвестными) подставим выражение (37) в исходное уравнение (34), умножим полученное равенство последовательно на каждую из функций $\hat{H}_{mn}(r, \varphi)$ и $\check{H}_{mn}(r, \varphi)$ и проинтегрируем каждое такое равенство по области $(r, \varphi) \in [0, r_0) \times (0, 2\pi]$. В результате получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2 \hat{g}_{mn}(t)}{dt^2} = -a^2 \left(\frac{\mu_n^m}{r_0} \right)^2 \|\hat{H}_{mn}\|^{-2} \hat{g}_{mn}(t); \quad \frac{d^2 \check{g}_{mn}(t)}{dt^2} = -a^2 \left(\frac{\mu_n^m}{r_0} \right)^2 \|\check{H}_{mn}\|^{-2} \check{g}_{mn}(t), \quad (40)$$

где

$$\|\hat{H}_{mn}\|^2 = \|\check{H}_{mn}\|^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \cos^2 m\varphi J_m^2 \left(\frac{\mu_n^m}{r_0} r \right) r d\varphi dr = \frac{r_0^2}{2} \pi \kappa_m [J_m'(\mu_n^m)]^2, \quad \kappa_m = \begin{cases} 2, & m = 0; \\ 1, & m \neq 0. \end{cases}$$

Пусть N и M — некоторые фиксированные целые числа. Тогда в качестве оценки функции $h(r, \varphi, t)$ можно взять усеченный ряд вида (37)

$$\tilde{h}(r, \varphi, t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N (\hat{g}_{mn}(t) \hat{H}_{mn}(r, \varphi) + \check{g}_{mn}(t) \check{H}_{mn}(r, \varphi)) = \mathbf{g}^T(t) \mathbf{H}(r, \varphi), \quad (41)$$

где векторы

$$\mathbf{g}(t) = (\hat{g}_{0,1}(t), \dots, \hat{g}_{0,N}(t), \dots, \hat{g}_{M,1}(t), \dots, \hat{g}_{M,N}(t),$$

$$\check{g}_{1,1}(t), \dots, \check{g}_{1,N}(t), \dots, \check{g}_{M,1}(t), \dots, \check{g}_{M,N}(t))^T,$$

$$\mathbf{H}(r, \varphi) = (\hat{H}_{0,1}(r, \varphi), \dots, \hat{H}_{0,N}(r, \varphi), \dots, \hat{H}_{M,1}(r, \varphi), \dots, \hat{H}_{M,N}(r, \varphi),$$

$$\check{H}_{1,1}(r, \varphi), \dots, \check{H}_{1,N}(r, \varphi), \dots, \check{H}_{M,1}(r, \varphi), \dots, \check{H}_{M,N}(r, \varphi))^T.$$

Соответственно для скоростей отклонения точек мембраны, функции $v(r, \varphi, t) = \partial h(r, \varphi, t) / \partial t$ из (41) можно получить оценку

$$\tilde{v}(t, r, \varphi) = \dot{\mathbf{g}}^T(t) \mathbf{H}(r, \varphi). \quad (42)$$

Пусть число $\varepsilon > 0$ — требуемая точность оценивания функций $h(r, \varphi, t)$ и $\partial h(r, \varphi, t) / \partial t$. Тогда для фиксированных начальных условий всегда найдутся такие целые числа N и M , что для оценок этих функций будут выполняться неравенства

$$\max_{\Omega} |h(r, \varphi, t) - \tilde{h}(r, \varphi, t)| \leq \varepsilon, \quad \max_{\Omega} |\partial h(r, \varphi, t) / \partial t - \tilde{v}(r, \varphi, t)| \leq \varepsilon. \quad (43)$$

Будем считать, что числа $\varepsilon > 0$, N и M известны. Рассмотрим задачу оценивания векторов $\mathbf{g}(t)$ и $\dot{\mathbf{g}}(t)$. Для этого перепишем систему уравнений (40) для $m = 0, \dots, M$ и $n = 1, \dots, N$ в следующем векторно-матричном виде:

$$\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} \Theta & I \\ -\left(\frac{a}{r_0}\right)^2 \text{diag}(\widehat{\Lambda}_0, \dots, \widehat{\Lambda}_M, \check{\Lambda}_1, \dots, \check{\Lambda}_M) & \Theta \end{pmatrix} z(t), \quad (44)$$

где диагональная матрица $\text{diag}(\widehat{\Lambda}_0, \dots, \widehat{\Lambda}_M, \check{\Lambda}_1, \dots, \check{\Lambda}_M)$ составлена из диагональных матриц $\widehat{\Lambda}_m = \text{diag}((\mu_1^m / \|\widehat{H}_{m,1}\|)^2, \dots, (\mu_N^m / \|\widehat{H}_{m,N}\|)^2)$, $\check{\Lambda}_m = \text{diag}((\mu_1^m / \|\check{H}_{m,1}\|)^2, \dots, (\mu_N^m / \|\check{H}_{m,N}\|)^2)$, Θ и I — нулевая и единичная матрицы соответствующего размера, n_z — вектор

$$z(t) = (g^T(t), \dot{g}^T(t))^T. \quad (45)$$

Уравнение (44) описывает динамику изменения неизвестных векторов $g(t)$ и $\dot{g}(t)$.

Получим уравнения измерений. Будем считать, что измерение процесса колебания мембраны производится в дискретные моменты времени: $t_k = \Delta t \cdot k$, $k = 0, 1, \dots$. Кроме того, рассмотрим случай, когда измеряется только смещение мембраны, так как именно этот случай будет рассмотрен при численном моделировании. Пусть в момент времени t_k произведено измерение смещения мембраны в n_y точках с координатами $(r_{k,s}, \varphi_{k,s})$, $s = \overline{1, n_y}$. Поскольку для разных моментов времени точки могут иметь различные координаты, их значение отмечено индексом k . В результате получаем вектор измерений

$$y_k = y(t_k) = (h(r_{k,1}, \varphi_{k,1}, t_k) + \xi_{k,1}, h(r_{k,2}, \varphi_{k,2}, t_k) + \xi_{k,2}, \dots, h(r_{k,n_y}, \varphi_{k,n_y}, t_k) + \xi_{k,n_y})^T.$$

В этом выражении $\xi_{k,s}$ — ограниченная ошибка измерения, $|\xi_{k,s}| \leq c_s$, положительная константа c_s предполагается известной. Выражая в этом равенстве $h(r_{k,i}, \varphi_{k,i}, t_k)$ через $\tilde{h}(r_{k,i}, \varphi_{k,i}, t_k)$, в силу (43) получим

$$y_k = (g^T(t_k)H(r_{k,1}, \varphi_{k,1}) + \varepsilon_{k,1} + \xi_{k,1}, \dots, g^T(t_k)H(r_{k,n_y}, \varphi_{k,n_y}) + \varepsilon_{k,n_y} + \xi_{k,n_y})^T, \quad (46)$$

которое с учетом обозначений (45) можно записать в стандартном виде

$$y_k = C_k^T z_k + \varepsilon_k + \xi_k, \quad (47)$$

где $z_k = z(t_k)$, $\xi_k = (\xi_{k,1}, \dots, \xi_{k,n_y})^T$, $\varepsilon_k = (\varepsilon_{k,1}, \dots, \varepsilon_{k,n_y})^T$, $|\varepsilon_{k,s}| \leq \varepsilon$, $n_z \times n_y$ -матрица C_k имеет следующий вид:

$$C_k = \begin{pmatrix} H(r_{k,1}, \varphi_{k,1}) : \dots : H(r_{k,n_y}, \varphi_{k,n_y}) \\ \Theta_{(n_z/2), n_y} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\Theta_{(n_z/2), n_y}$ — нулевая матрица размера $(n_z/2) \times n_y$. Запишем уравнение (44) в дискретном времени [31]

$$z_{k+1} = Az_k. \quad (48)$$

Уравнения (48) и (47) исходные для решения задачи оценивания вектора состояния $z_k = z(t_k) = (g^T(t_k), \dot{g}^T(t_k))^T$. Поскольку эта задача рассматривается в отсут-

ствии предположений о наличии стохастических свойств у неопределенных величин, то для ее решения предлагается использовать модифицированный метод эллипсоидов, который подробно изложен в [25, 30]. Применение этого метода не требует знания априорных оценок для вектора состояния, также не предполагает априорный анализ наблюдаемости системы.

Перейдем к рассмотрению численного примера. Положим, что радиус мембраны $r_0 = 10$, $a = 1$. Будем считать, что в каждый момент дискретного времени имеются изменения отклонения мембраны в точках, находящихся на прямой линии, касательной к окружности радиуса 2. В каждый следующий момент времени линия поворачивается на угол $\Delta\varphi = \pi/6$, оставаясь касательной к этой окружности. Такие измерения отдаленно подобны спутниковым измерениям, проводимым в полярной области вращающейся планеты. Параметрическое уравнение этой линии (s — параметр) для различных фиксированных моментов времени t можно записать в виде

$$\bar{x}_s(t) = \begin{pmatrix} x_{1,s}(t) \\ x_{2,s}(t) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -\sin \Delta\varphi \cdot t \\ \cos \Delta\varphi \cdot t \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \cos \Delta\varphi \cdot t \\ \sin \Delta\varphi \cdot t \end{pmatrix}, \quad s \in [-9, 798; 9, 798], \quad t = t_0, t_1, \dots$$

В качестве точек измерения выберем точки, координаты которых соответствуют целым значениям параметра $s \in [-9:9]$, т.е. получается 19 значений. Точки измерения для фиксированного момента времени изображены квадратами на рис. 6.

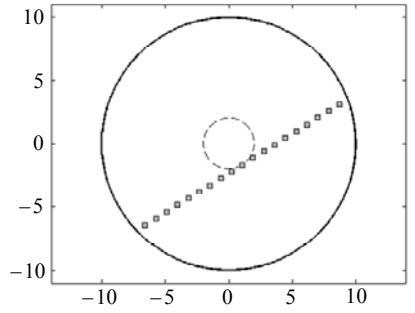


Рис. 6

Размерность матрицы C_k в этом случае будет $n_z \times 19$.

Для моделирования колебаний мембраны предполагалось, что в начальный момент времени мембрана в некоторой локальной области имеет отклонение от равновесного положения следующего вида:

$$h_0(r, \varphi) = \begin{cases} 0,5[(r-7)^2((r-7)^2-18)/81+1][\cos(6\varphi)+1], & r \in [4, 10], \quad \varphi \in [-\pi/6, \pi/6]; \\ 0, & r \notin [4, 10], \quad \varphi \notin [-\pi/6, \pi/6]. \end{cases} \quad (49)$$

Скорости точек мембраны в начальный момент времени нулевые, т.е.

$$\left. \frac{\partial h(r, \varphi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = h_1(r, \varphi) \equiv 0 \quad \forall r \in [0, r_0] \quad \forall \varphi. \quad (50)$$

При таких начальных условиях коэффициенты в (38) определяются выражениями

$$G_{k,n}^1 \equiv 0, \quad G_{k,n}^2 \equiv 0, \quad D_{m,n}^2 \equiv 0,$$

$$D_{m,n}^1 = \frac{0,5}{\|\hat{H}_{mn}\|^2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} [\cos(6\varphi)+1] \cos(m\varphi) d\varphi \times$$

$$\times \int_4^{10} [(r-7)^2((r-7)^2-18)/81+1] J_m\left(\frac{\mu_n^m}{r_0} r\right) r dr.$$

В результате при начальных условиях (49) и (50) положение и скорости точек мембраны при моделировании вычислялись с помощью выражений

$$h(r, \varphi, t) = \sum_{m,n} D_{m,n}^1 \cos \frac{\mu_n^m a t}{r_0} \hat{H}_{kn}(r, \varphi) = \sum_{m,n} D_{m,n}^1 \cos \frac{\mu_n^m a t}{r_0} \cos m\varphi J_m \left(\frac{\mu_n^m}{r_0} r \right), \quad (51)$$

$$\frac{\partial h(r, \varphi, t)}{\partial t} = - \sum_{m,n} D_{m,n}^1 \frac{\mu_n^m a}{r_0} \sin \frac{\mu_n^m a t}{r_0} \cos m\varphi J_m \left(\frac{\mu_n^m}{r_0} r \right), \quad (52)$$

где $n = \overline{1, 40}$, $m = \overline{0, 40}$. Выражение (51) использовалось для вычисления измеренных значений отклонения мембраны вдоль линии измерения. К «измеренным» таким образом значениям добавлялась помеха, которая генерировалась с помощью датчика равномерно распределенных в интервале $[-0,05; 0,05]$ чисел. Максимальное значение помехи составляло около 10 % от максимального отклонения мембраны.

В рассматриваемом примере при построении уравнений модели (41) и (44) выбрано $N = 15$ и $M = 15$, при этом величина $\varepsilon = 0,01$, а размерность вектора $z(t)$ получилась равной $n_z = 2 \times N \times (2(M + 1) - 1) = 930$.

С использованием результатов измерений, уравнений (47) и (48), алгоритма оценивания состояния с помощью эллипсоидов [25] в каждый момент дискретного времени строились оценки $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}(t_k) = (\hat{\mathbf{g}}^T(t_k), \hat{\mathbf{g}}^T(t_k))^T$ вектора z_k . Эти оценки использовались для вычисления оценок отклонения и скоростей точек мембраны

$$\hat{h}(r, \varphi, t_k) = \hat{\mathbf{g}}^T(t_k) H(r, \varphi), \quad \hat{v}(r, \varphi, t_k) = \hat{\mathbf{g}}^T(t_k) H(r, \varphi),$$

аналогичным (41) и (42). На рис. 7 изображен график функции $\hat{h}_k(r, \varphi) = \hat{h}(r, \varphi, t_k)$ в момент времени $t_k = 160$, а на рис. 8 — график величины отклонения $\Delta h_k(r, \varphi) = \hat{h}(r, \varphi, t_k) - h(r, \varphi, t_k)$ этой оценки от аналитического решения для этого же момента времени.

На рис. 9 и 10 также для момента времени $t_k = 160$ изображены графики функций $\hat{v}_k(r, \varphi) = \hat{v}(r, \varphi, t_k)$ и $\Delta v_k(r, \varphi) = \hat{v}(r, \varphi, t_k) - v(r, \varphi, t_k)$.

Из рис. 8 и 10 видно, что ошибка оценок функций $h(r, \varphi, t_k)$ и $v(r, \varphi, t_k)$ не превышает величины $4 \cdot 10^{-2}$. После момента времени $t_k = 160$ оценивание вектора z_k практически прекратилось.

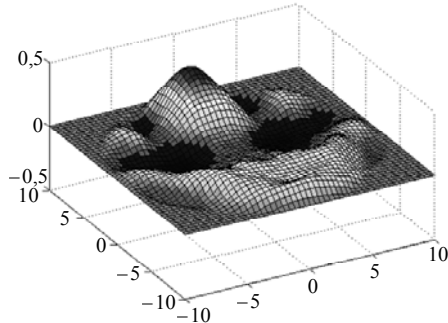


Рис. 7

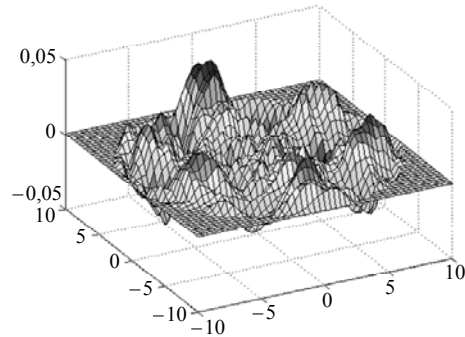


Рис. 8

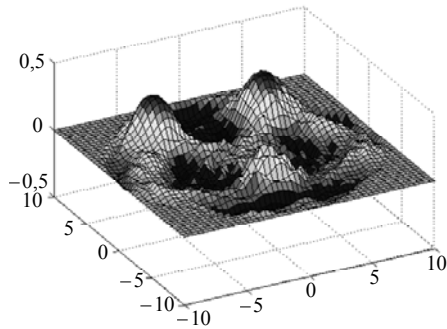


Рис. 9

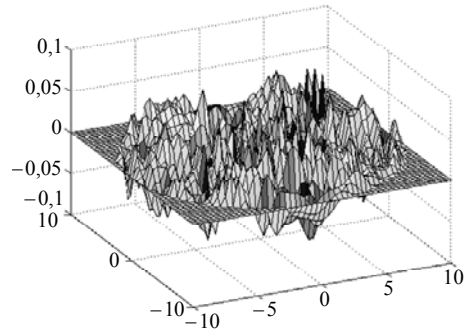


Рис. 10

Заключение

Изложенная в статье методика восстановления вектора или функции состояния систем с распределенными параметрами может иметь достаточно широкое применение, что связано с универсальностью использования метода Галеркина и Петрова–Галеркина для получения конечноразностных аппроксимаций для уравнений в частных производных. Вместе с тем, как было указано в примере с оцениванием отклонения и скоростей колеблющейся струны, непосредственное использование этих аппроксимаций в алгоритмах оценивания могут не дать желаемого результата в силу неточности получаемой модели. Иными словами, эти конечноразностные аппроксимации пригодны для решения прямых задач — получения решения уравнений в частных производных при заданных начальных и граничных условиях, однако могут оказаться непригодными для решения обратных задач — восстановления вектора состояния системы. Поэтому требуется дополнительный анализ этих конечномерных моделей и понижение их порядка в целях получения более точных моделей.

Используемый для решения вспомогательной конечномерной задачи оценивания метод эллипсоидов [25] оказался вполне работоспособным и эффективным при размерности вектора состояния около 1000. Численный пример, связанный с мембраной, был рассчитан на персональном компьютере средней производительности.

Полученные результаты требуют более строгого математического обоснования для определения границ применения рассмотренного подхода.

М.М. Сальников, А.М. Сальникова

ОЦІНЮВАННЯ СТАНУ СИСТЕМ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ З ВИКОРИСТАННЯМ СКІНЧЕННОВИМІРНИХ МОДЕЛЕЙ І ЛОКАЛЬНИХ ВИМІРЮВАНЬ ПРИ ОБМЕЖЕНИХ ПОХИБКАХ

Розглянуто задачу оцінювання стану розподіленої лінійної динамічної системи в обмеженій області при відомих граничних, але невідомих початкових умовах. Для вирішення задачі використовуються скінченновимірні моделі процесу, одержана методом Гальоркіна, та оцінювання стану цієї моделі за допомогою методу еліпсоїдів. Особливості запропонованого підходу обговорюються та аналізуються на двох прикладах розв'язку задач оцінювання положень і швидкостей струни і мембрани.

STATE ESTIMATION OF DISTRIBUTED
PARAMETERS SYSTEMS USING
FINITE-DIMENTIONAL MODELS AND LOCAL
MEASUREMENTS WITH BOUNDED NOISE

The state estimation problem of linear dynamic distributed system in a bounded domain with known boundary, but unknown initial conditions is considered. Finite-dimensional model of the process, obtained by the Galerkin method, and the state estimation of the model by the ellipsoids method are used for solution of the problem. Features of the proposed approach are discussed and analyzed by two examples of solution of estimation problem of positions and velocities of a string and a membrane.

1. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М. : Наука, 1965. — 320 с.
2. Russell D. Nonharmonic Fourier series in the control theory of distributed parameter systems // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. — 1967. — **18**, N 3. — P. 542–560.
3. Falb P.L. Infinite-dimensional filtering: the Kalman–Bucy filter in Hilbert space // *Information and Control*. — 1967. — **11**, N 1-2. — P. 102–137.
4. Fattorini H.O. On complete controllability of linear systems // *Journal of Differential Equations*. — 1967. — **3**, N 3. — P. 391–402.
5. Balakrishnan A.V., Lions J.L. State estimation for infinite-dimensional systems // *Journal of Control and Computer Sciences*. — 1967. — N 11. — P. 391–403.
6. Лионс Ж.–Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М. : Мир, 1972. — 414 с.
7. Бутковский А.Г. Структурная теория распределенных систем. — М. : Наука, 1977. — 320 с.
8. Hidayat Z., Babuska R., De Schutter B., Nunez A. Observers for linear distributed-parameter systems: A survey // *Proceedings of the 2011 IEEE International Symposium on Robotic and Sensors Environments (ROSE 2011)*, Montreal, Canada. — 2011. — P. 166–171.
9. Васильев Ф.П., Куржанский М.А., Потанов М.М., Разгулин А.В. Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения. — М. : МАКС Пресс, 2010. — 384 с.
10. Sawaragi Y., Soeda T., Omatu S. Modelling, estimation and their application for distributed parameter systems. *Lecture notes in control and information sciences* (vol. 11). — Berlin; New York : Springer-Verlag, 1978. — 269 p.
11. Curtain R.F., Pritchard A.J. Infinite dimensional linear systems theory. — Ibid, 1978. — 297 p.
12. Зуровский М.З., Бидюк П.И. Анализ и управление большими космическими конструкциями. — Киев : Наук. думка, 1997. — 452 с.
13. Vazquez R., Schuster E., Krstic M. Magnetohydrodynamic state estimation with boundary sensors // *Automatica*. — 2008. — **44**, N 10. — P. 2517–2527.
14. Barje N., Achhab M.E., Wertz V. Observer for linear distributed-parameter systems with application to isothermal plug-flow reactor // *Intelligent Control and Automation*. — 2013. — N 4. — P. 379–384.
15. Moireau P., Chapelle D., Le Tallec P. Joint state and parameter estimation for distributed mechanical systems // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 2008. — **197**, N 6-8. — P. 659–677.
16. Ding L., Johansson A., Gustafsson T. Application of reduced models for robust control and state estimation of a distributed parameter system // *Journal of Process Control*. — 2009. — **19**, N 3. — P. 539–549.
17. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. — М. : Наука, 1980. — 536 с.
18. Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L. Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations. — Berlin; Heidelberg : Springer-Verlag, 2008. — 604 p.

19. *Fries T.P., Matthies H.G.* A Review of Petrov-Galerkin stabilization approaches and an extension to meshfree methods. — Germany; Brunswick : Technische Universität Braunschweig, Informatikbericht-Nr., 2004. — 71 p.
20. *Schweppe F.C.* Uncertain dynamic systems. — Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, 1973. — 563 p.
21. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М. : Наука, 1977. — 392 с.
22. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем: метод эллипсоидов. — М. : Наука, 1988. — 320 с.
23. *Bounding Approaches to system identification / M. Milanese, J. Norton, H. Piet-Lahanier, É. Walter (Eds.).* — New York : Plenum Press, 1996. — 567 p.
24. *Кунцевич В.М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — Киев : Наук. думка, 2006. — 264 с.
25. *Сальников Н.Н.* Эллипсоидальное оценивание состояний и параметров динамической системы при отсутствии априорной информации об оцениваемых величинах // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2014. — № 2. — С. 144–156.
26. *Егоров А.И.* Основы теории управления. — М. : Физматлит, 2004. — 504 с.
27. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М. : Изд-во МГУ, 2004. — 799 с.
28. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. — М. : Мир, 1977. — 350 с.
29. *Медведев С.Ю., Чеботарев Д.О.* Метод конечных элементов с базисными функциями специального вида для задач на собственные значения. — М., 2005. — 28 с. (Препр. / ИПМ; № 049).
30. *Сальников Н.Н.* Об одной модификации алгоритма оценивания параметров линейной регрессии с помощью эллипсоидов // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2012. — № 2. — С. 65–81.
31. *Стрейц В.* Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем. — М. : Наука, 1985. — 296 с.

Получено 07.08.2014