УДК 519.25:681.5

А.П. Сарычев

МОДЕЛИРОВАНИЕ В КЛАССЕ СИСТЕМ АВТОРЕГРЕССИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В УСЛОВИЯХ СТРУКТУРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Введение

Задача построения системы авторегрессионных уравнений в условиях структурной неопределенности по количеству и составу входных переменных в уравнениях является одним из объектов исследования в методе группового учета аргументов (МГУА) , который разработал академик НАН Украины А. Г. Ивахненко [1–8].

Определение порядка авторегрессионных моделей в условиях структурной неопределенности — важная задача в теории идентификации, и для ее решения существуют различные подходы [9–21]. Часто используемым критерием качества для систем авторегрессионных уравнений является многомерный аналог информационного критерия Акаике [9]. Его недостаток состоит в том, что он построен в предположении, что все выходные переменные объекта определяются общим множеством регрессоров. В прикладных задачах могут встречаться объекты более широкого класса, в которых выходные переменные могут определяться, вообще говоря, разными подмножествами регрессоров.

Известный подход к построению критериев качества статистических моделей — МГУА, который основан на разбиении выборки наблюдений на обучающую и проверочную части: на обучающей выборке оцениваются коэффициенты модели, а на проверочной — качество модели. В соответствии с принципами моделирования в МГУА для того, чтобы найти систему авторегрессионных уравнений оптимальной сложности, необходимо:

указать метод оценивания коэффициентов в системе авторегрессионных уравнений;

задать алгоритм генерирования систем авторегрессионных уравнений (структур моделей);

разработать внешний критерий для оценки качества перебираемых структур;

исследовать поведение математического ожидания критерия в зависимости от состава регрессоров;

доказать существование системы авторегрессионных моделей оптимальной сложности.

При моделировании в классе авторегрессионных уравнений в МГУА традиционно применяется сумма внешних критериев отдельных авторегрессионных уравнений, параметры которых оцениваются независимо. Поэтому построение и обоснование критерия МГУА в условиях, когда параметры системы авторегрессионных уравнений оцениваются совместно — актуальная задача, решению которой и посвящена данная работа.

1. Априорные предположения о динамической системе

Пусть функционирование динамического объекта подчиняется закону в виде системы авторегрессионных уравнений [22]:

$$\begin{pmatrix} \overset{*}{x}_1(k) \\ \overset{*}{x}_2(k) \\ \vdots \\ \overset{*}{x}_i(k) \\ \vdots \\ \overset{*}{x}_n(k) \end{pmatrix} = \sum_{q=1}^{h} \left[\begin{array}{c:c:c:c} \overset{*}{x}_0(q) & \overset{*}{x}_{-1}(q) & \cdots & \overset{*}{x}_{1-p}(q) \\ \hdashline \overset{*}{x}_1(q) & \overset{*}{x}_0(q) & \cdots & \overset{*}{x}_{2-p}(q) \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \overset{*}{x}_{i-1}(q) & \overset{*}{x}_{i-2}(q) & \cdots & \overset{*}{x}_{i-p}(q) \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \overset{*}{x}_{n-1}(q) & \overset{*}{x}_{n-2}(q) & \cdots & \overset{*}{x}_{n-p}(q) \end{array}\right] \begin{pmatrix} \overset{o}{\theta}_1(k, q) \\ \overset{o}{\theta}_2(k, q) \\ \vdots \\ \overset{o}{\theta}_p(k, q) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_0(k) \\ \zeta_1(k) \\ \vdots \\ \zeta_{i-1}(k) \\ \vdots \\ \zeta_{n-1}(k) \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, ..., h, \tag{1}$$

которую в матрично-векторной форме можно записать

$$\overset{*}{\mathbf{x}}(k) = \sum_{q=1}^{h} \overset{*}{\mathbf{Z}}(p; q)\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k, q) + \boldsymbol{\zeta}(-1; k), \; k = 1, 2, ..., h, \tag{2}$$

где $\overset{*}{\mathbf{x}}(k)$ — ненаблюдаемый $(n \times 1)$–вектор значений k-й выходной переменной объекта в дискретные моменты времени $t = t_i$, $i = 1, 2, ..., n$; n — общее число наблюдений за объектом; p — число предыдущих значений выходных переменных, которые влияют на их текущее значение; $\overset{*}{\mathbf{Z}}(p; q)$ — $(n\times p)$-матрица p предыдущих ненаблюдаемых значений q-й переменной, $q = 1, 2, ..., h$, p означает, что в (1), (2) при формировании величины $\overset{*}{x}_i(k)$ участвуют величины $(x_{i-1}(q), x_{i-2}(q), ...,$ $x_{i-p}(q))$; h — число выходных переменных, образующих множество X; $\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k, q)$ — $(p \times 1)$-вектор неизвестных детерминированных, не зависящих от времени коэффициентов; $\boldsymbol{\zeta}(-1; k)$ — ненаблюдаемый случайный $(n \times 1)$-вектор, в обозначении которого -1 означает, что в (1), (2) при формировании величины $x_i(k)$ аддитивно участвует величина $\zeta_{i-1}(k)$.

В (1), (2) предполагается, что в формировании текущего значения k-й выходной переменной участвуют все p предыдущих значений всех h выходных переменных. В общем случае не все переменные и не все их предыдущие значения могут участвовать в этом формировании. Для записи моделей в общем случае введем структурные матрицы, смысл которых покажем на примере. Пусть на текущее значение k-й выходной переменной влияют первое, второе и четвертое предыдущие значения q-й переменной из максимально заданного возможного числа влияющих предыдущих значений $p = 5$. Тогда вместо матрицы $\overset{*}{\mathbf{Z}}(p; q)$ в системе авторегрессионных уравнений (1), (2) следует записать произведение матриц

$$\overset{*}{\mathbf{Z}}(p; q)\mathbf{S}(k, q) =$$

$$= \left[\begin{array}{c:c:c:c:c} \overset{*}{x}_0(q) & \overset{*}{x}_{-1}(q) & \overset{*}{x}_{-2}(q) & \overset{*}{x}_{-3}(q) & \overset{*}{x}_{-4}(q) \\ \hdashline \overset{*}{x}_1(q) & \overset{*}{x}_0(q) & \overset{*}{x}_{-1}(q) & \overset{*}{x}_{-2}(q) & \overset{*}{x}_{-3}(q) \\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hdashline \overset{*}{x}_{i-1}(q) & \overset{*}{x}_{i-2}(q) & \overset{*}{x}_{i-3}(q) & \overset{*}{x}_{i-4}(q) & \overset{*}{x}_{i-5}(q) \\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hdashline \overset{*}{x}_{n-1}(q) & \overset{*}{x}_{n-2}(q) & \overset{*}{x}_{n-3}(q) & \overset{*}{x}_{n-4}(q) & \overset{*}{x}_{n-5}(q) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:c:c} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c:c} \overset{*}{x}_0(q) & \overset{*}{x}_{-1}(q) & \overset{*}{x}_{-3}(q) \\ \hdashline \overset{*}{x}_1(q) & \overset{*}{x}_0(q) & \overset{*}{x}_{-2}(q) \\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hdashline \overset{*}{x}_{i-1}(q) & \overset{*}{x}_{i-2}(q) & \overset{*}{x}_{i-4}(q) \\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hdashline \overset{*}{x}_{n-1}(q) & \overset{*}{x}_{n-2}(q) & \overset{*}{x}_{n-4}(q) \end{array}\right], \tag{3}$$

где (5×3)-матрица $\mathbf{S}(k, q)$ представляет собой структурную матрицу, отражающую влияние первого, второго и четвертого предыдущих значений переменной с номером q на текущее значение переменной состояния с номером k. Априорная информация о значении p и о том, какие именно предыдущие значения каждой из переменных определяют текущие значения выходных переменных в законе функционирования объекта (1), (2), представляется совокупностью структурных матриц $\mathbf{S}(k, q),\ k, q = 1, 2, ..., h,$ которые могут быть различными для выходных переменных. Пока будем предполагать, что эти структурные матрицы заданы.

С учетом введенных структурных матриц закон функционирования (2) для общего случая формирования выходных переменных запишем в виде

$$\overset{*}{\mathbf{x}}(k) = \sum_{q=1}^{h} \overset{*}{\mathbf{Z}}(p; q)\mathbf{S}(k, q)\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k, q) + \boldsymbol{\zeta}(-1; k) = \overset{=}{\mathbf{x}}(k) + \boldsymbol{\zeta}(-1; k),\ k = 1, 2, ..., h, \tag{4}$$

где $\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k, q)$ — $(m(k, q)\times 1)$-вектор неизвестных детерминированных коэффициентов; $\overset{=}{\mathbf{x}}(k)$ — ненаблюдаемая составляющая $(n\times 1)$-вектора значений k-й переменной; $m(k, q)$ — число столбцов в матрице $\mathbf{S}(k, q)$; $m(k, 1) + m(k, 2) + ... + m(k, k) + \ldots$ $... + m(k, h) = m(k)$ — общее число неизвестных коэффициентов в модели для выходной переменной с номером k.

Пусть для наблюдений k-й выходной переменной объекта выполняется

$$x_i(k) = \overset{*}{x}_i(k) + \varepsilon_i(k),\ i = 1, 2, ..., n,\ k = 1, 2, ..., h, \tag{5}$$

где $x_i(k)$ — наблюдаемое значение k-й переменной в момент времени $t = t_i$, $\overset{*}{x}_i(k)$ — ненаблюдаемое значение; $\varepsilon_i(k)$ — случайная ненаблюдаемая ошибка.

Запишем с учетом (5) модель наблюдения объекта в векторной форме

$$\mathbf{x}(k) = \overset{*}{\mathbf{x}}(k) + \boldsymbol{\varepsilon}(k),\ k = 1, 2, ..., h. \tag{6}$$

Введем обозначения

$$\mathbf{X} = \left[\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), ..., \mathbf{x}(h)\right], \tag{7}$$

$$\overset{=}{\mathbf{X}} = [\overset{=}{\mathbf{x}}(1), \overset{=}{\mathbf{x}}(2), ..., \overset{=}{\mathbf{x}}(h)],,\ \overset{*}{\mathbf{X}} = [\overset{*}{\mathbf{x}}(1), \overset{*}{\mathbf{x}}(2), ..., \overset{*}{\mathbf{x}}(h)], \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}(-1) = \left[\boldsymbol{\zeta}(-1; 1), \boldsymbol{\zeta}(-1; 2), ..., \boldsymbol{\zeta}(-1; h)\right],\ \mathbf{E} = \left[\boldsymbol{\varepsilon}(1), \boldsymbol{\varepsilon}(2), ..., \boldsymbol{\varepsilon}(h)\right] \tag{9}$$

и с учетом (6)–(9) модели функционирования и наблюдения запишем в обобщенном виде

$$\overset{*}{\mathbf{X}} = \overset{=}{\mathbf{X}} + \boldsymbol{\Gamma}(-1),\ \mathbf{X} = \overset{*}{\mathbf{X}} + \mathbf{E}. \tag{10}$$

Пусть относительно $\boldsymbol{\zeta}(-1; k)$, $k = 1, 2, ..., h$, выполнено:

$$E\{\boldsymbol{\zeta}(-1; k)\} = \mathbf{0}_n,\ E\{\boldsymbol{\zeta}(-1; k)\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(-1; k)\} = \sigma_{\zeta}(k, k)\mathbf{I}_n; \tag{11}$$

$$E\{\boldsymbol{\zeta}(-1; k)\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(-1; q)\} = \sigma_{\zeta}(k, q)\mathbf{I}_n,\ k, q = 1, 2, ..., h;\ k \neq q; \tag{12}$$

$$E\{\zeta_{i_1}(-1; k)\zeta_{i_2}(-1; q)\} = 0,\ i_1, i_2 = 1, ..., n, i_1 \neq i_2, k, q = 1, 2,..., h, \tag{13}$$

где $E\{\cdot\}$ — знак математического ожидания по возможным реализациям случайных векторов $\boldsymbol{\zeta}(-1;k)$ и $\boldsymbol{\zeta}(-1;q)$; $\mathbf{0}_n$ — $(n\times 1)$-вектор, состоящий из нулей; $\sigma_\zeta(k,k)$ — дисперсия величины $\zeta_i(-1;k)$, $i=1,2,...,n$, ограниченная величина; $\sigma_\zeta(k,q)$ — ковариация случайных величин $\zeta_i(-1;k)$ и $\zeta_i(-1;q)$, $i=1,2,...,n$, ограниченная величина; $\mathbf{I}_n$ — единичная $(n\times n)$-матрица.

Пусть относительно $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$, $k=1,2,...,h$, выполнено:

$$E\{\boldsymbol{\varepsilon}(k)\}=\mathbf{0}_n,\ E\{\boldsymbol{\varepsilon}(k)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(k)\}=\sigma_\varepsilon(k,k)\,\mathbf{I}_n,\ k=1,2,...,h; \tag{14}$$

$$E\{\boldsymbol{\varepsilon}(k)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(q)\}=\sigma_\varepsilon(k,q)\,\mathbf{I}_n,\ k,q=1,2,...,h,\ k\neq q; \tag{15}$$

$$E\{\varepsilon_{i_1}(k)\varepsilon_{i_2}(q)\}=0,\ i_1,i_2=1,2,...,n,\ i_1\neq i_2,\ k,q=1,2,...,h, \tag{16}$$

где $E\{\cdot\}$ — знак математического ожидания по возможным реализациям случайных векторов $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}(q)$; $\sigma_\varepsilon(k,k)$ — дисперсия величины $\varepsilon_i(k)$, $i=1,2,...,n$, ограниченная величина; $\sigma_\varepsilon(k,q)$ — ковариация случайных величин $\varepsilon_i(k)$ и $\varepsilon_i(q)$.

Предположения (11)–(13) и (14)–(16) могут быть записаны в обобщенном виде:

$$E\{\boldsymbol{\Gamma}(-1)\}=\mathbf{O}_{(n\times h)},\ E\{[\boldsymbol{\Gamma}(-1)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}(-1)\}=n\boldsymbol{\Sigma}_\zeta, \tag{17}$$

$$E\{\mathbf{E}\}=\mathbf{O}_{(n\times h)},\ E\{\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\}=n\,\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon, \tag{18}$$

где $\mathbf{O}_{(n\times h)}$ — нулевая $(n\times h)$-матрица; $\boldsymbol{\Sigma}_\zeta$, $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$ — заданные ковариационные $(h\times h)$-матрицы в моделях функционирования и наблюдения соответственно.

Также будем предполагать, что матрица в законе функционирования объекта $\boldsymbol{\Gamma}(-1)$ и матрица ошибок наблюдения $\mathbf{E}$ статистически независимы:

$$E\{\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}(-1)\}=\mathbf{O}_{(h\times h)}. \tag{19}$$

Пусть в результате наблюдения в моменты времени $t=t_i$, $i=1-2p$, $2-2p,...,0,\ 1,2,...,n$, получена $((n+2p)\times h)$-матрица значений выходных переменных объекта:

$$\begin{bmatrix} x_{1-2p}(1) & x_{1-2p}(2) & \cdots & x_{1-2p}(h) \\ x_{2-2p}(1) & x_{2-2p}(2) & \cdots & x_{2-2p}(h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0(1) & x_0(2) & \cdots & x_0(h) \\ \hline x_1(1) & x_1(2) & \cdots & x_1(h) \\ x_2(1) & x_2(2) & \cdots & x_2(h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n(1) & x_n(2) & \cdots & x_n(h) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}(0) \\ \hline \mathbf{X}\end{bmatrix}. \tag{20}$$

Пусть заданы: p — число предыдущих значений выходных переменных, которые влияют на их текущее значение; набор структурных матриц $\mathbf{S}(k,q)$,

$k, q = 1, 2, ..., h$, которые определяют, какие именно предыдущие значения каждой из переменных характеризуют текущие значения выходных переменных объекта (1)–(19).

Для оценивания неизвестных коэффициентов $\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k, q)$, $k, q = 1, 2, ..., h$, по результатам наблюдения объекта (20) в [22, 23] разработаны итерационные процедуры параметрической идентификации, в которых $\mathbf{X}(0)$ используется в качестве начальных условий.

2. Оценивание коэффициентов в системах авторегрессионных уравнений

Для $(n \times 1)$-вектора $\mathbf{x}(k)$ согласно [22] выполняется

$$\mathbf{x}(k) = \sum_{q=1}^{h} \overset{=}{\mathbf{Z}}(p; q)\mathbf{S}(k, q)\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k, q) + \boldsymbol{\xi}(k), \quad k = 1, 2, ..., h, \tag{21}$$

где $\overset{=}{\mathbf{Z}}(p; q)$ — $(n \times p)$-матрица ненаблюдаемых значений q-й переменной объекта, по своей структуре она аналогична матрице $\overset{*}{\mathbf{Z}}(p; q)$ в (1):

$$\overset{=}{\mathbf{Z}}(p; q) = \begin{bmatrix} \overset{=}{x}_0(q) & \overset{=}{x}_{-1}(q) & \cdots & \overset{=}{x}_{1-p}(q) \\ \overset{=}{x}_1(q) & \overset{=}{x}_0(q) & \cdots & \overset{=}{x}_{2-p}(q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overset{=}{x}_{n-1}(q) & \overset{=}{x}_{n-2}(q) & \cdots & \overset{=}{x}_{n-p}(q) \end{bmatrix}, \quad q = 1, 2, ..., h; \tag{22}$$

$\boldsymbol{\xi}(k)$ — случайный $(n \times 1)$-вектор с нулевым математическим ожиданием

$$\boldsymbol{\xi}(k) = \boldsymbol{\varepsilon}(k) + \sum_{q=1}^{h} [\boldsymbol{\Gamma}(-2, Z; q)]\mathbf{S}(k, q)\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k, q) + \boldsymbol{\zeta}(-1; k), \tag{23}$$

$$E\{\boldsymbol{\xi}(k)\} = \mathbf{0}_n, \; k = 1, 2, ..., h; \tag{24}$$

$\boldsymbol{\Gamma}(-2, Z; q)$ — $(n \times p)$-матрица ненаблюдаемых случайных величин

$$\boldsymbol{\Gamma}(-2, Z; q) = \begin{bmatrix} \zeta_{-1}(q) & \zeta_{-2}(q) & \cdots & \zeta_{-p}(q) \\ \zeta_0(q) & \zeta_{-1}(q) & \cdots & \zeta_{1-p}(q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n-2}(q) & \zeta_{n-3}(q) & \cdots & \zeta_{n-1-p}(q) \end{bmatrix}, \quad q = 1, 2, ..., h. \tag{25}$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{x}(k), \; \overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k) = (\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}{}^{\mathrm{T}}(k, 1), \overset{o}{\boldsymbol{\theta}}{}^{\mathrm{T}}(k, 2), ..., \overset{o}{\boldsymbol{\theta}}{}^{\mathrm{T}}(k, h))^{\mathrm{T}}, \; k = 1, 2, ..., h; \tag{26}$$

$$\mathbf{R}(k) = [\, \overset{=}{\mathbf{Z}}(p; 1)\mathbf{S}(k, 1) \,\vdots\, \overset{=}{\mathbf{Z}}(p; 2)\mathbf{S}(k, 2) \,\vdots \ldots \vdots\, \overset{=}{\mathbf{Z}}(p; k)\mathbf{S}(k, k) \,\vdots \ldots \vdots\, \overset{=}{\mathbf{Z}}(p; h)\mathbf{S}(k, h)], \tag{27}$$

$\mathbf{R}(k)$ — матрица регрессоров для k-й выходной переменной.

Учитывая (26), (27), систему регрессионных моделей (21) запишем в виде

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{R}(k)\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k) + \boldsymbol{\xi}(k) = \overset{o}{\mathbf{y}}(k) + \boldsymbol{\xi}(k), \; k = 1, 2, ..., h. \tag{28}$$

Введем обозначения

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix}\mathbf{y}(1)\\ \hdashline \mathbf{y}(2)\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline \mathbf{y}(h)\end{pmatrix},\quad \overset{\circ}{\mathbf{y}}=\begin{pmatrix}\overset{\circ}{\mathbf{y}}(1)\\ \hdashline \overset{\circ}{\mathbf{y}}(2)\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline \overset{\circ}{\mathbf{y}}(h)\end{pmatrix},\quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}=\begin{pmatrix}\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(1)\\ \hdashline \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(2)\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(h)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}(1)\\ \hdashline \boldsymbol{\xi}(2)\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline \boldsymbol{\xi}(h)\end{pmatrix}, \tag{29}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}=\left[\begin{array}{c:c:c:c}\mathbf{R}(1) & \mathbf{O}_{(n\times m(2))} & \cdots & \mathbf{O}_{(n\times m(h))}\\ \hdashline \mathbf{O}_{(n\times m(1))} & \mathbf{R}(2) & \cdots & \mathbf{O}_{(n\times m(h))}\\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \hdashline \mathbf{O}_{(n\times m(1))} & \mathbf{O}_{(n\times m(2))} & \cdots & \mathbf{R}(h)\end{array}\right], \tag{30}$$

где $\mathbf{y}$ — объединенный $(N\times 1)$-вектор наблюдаемых зашумленных значений; $\overset{\circ}{\mathbf{y}}$ — $(N\times 1)$-вектор ненаблюдаемых значений; $\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}$ — $(M\times 1)$-вектор неизвестных коэффициентов; $\boldsymbol{\xi}$ — $(N\times 1)$-вектор ненаблюдаемых случайных аддитивных составляющих; $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ — объединенная $(N\times M)$-матрица регрессоров; $N=n\,h$; $M=m(1)+m(2)+\ldots+m(h)$.

Запишем систему h регрессионных уравнений (28) учетом (29), (30):

$$\mathbf{y}=\overset{\circ}{\mathbf{y}}+\boldsymbol{\xi}=\underline{\underline{\mathbf{R}}}\,\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}+\boldsymbol{\xi}. \tag{31}$$

Согласно [22] для оценки коэффициентов $\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}$ выполняется

$$\hat{\mathbf{d}}=\mathbf{C}\,\mathbf{y},\quad \hat{\mathbf{d}}=\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{d}}(1)\\ \hdashline \hat{\mathbf{d}}(2)\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline \hat{\mathbf{d}}(h)\end{pmatrix},\quad \hat{\mathbf{d}}(k)=\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{d}}(k,1)\\ \hdashline \hat{\mathbf{d}}(k,2)\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline \hat{\mathbf{d}}(k,h)\end{pmatrix},\quad k=1,2,\ldots,h. \tag{32}$$

В (32) для $(M\times N)$-матрицы $\mathbf{C}$, состоящей из $(h\times h)$ блоков, выполняется

$$\mathbf{C}=(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}, \tag{33}$$

где $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}$ — ковариационная $(N\times N)$-матрица введенного в (29) объединенного $(N\times 1)$-вектора ненаблюдаемых аддитивных случайных составляющих $\boldsymbol{\xi}$.

Для ковариационной матрицы $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}$, состоящей из $(h\times h)$ блоков, выполняется [22]

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}=\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon}\otimes\mathbf{I}_n+\boldsymbol{\Psi}+\boldsymbol{\Sigma}_{\zeta}\otimes\mathbf{I}_n, \tag{34}$$

где $\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I}_n$ — кронекеровское произведение матриц $\boldsymbol{\Sigma}$ и $\mathbf{I}_n$; $\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{\zeta}$ — ковариационные $(h\times h)$-матрицы в моделях наблюдения и функционирования, введенные в (17), (18).

В (34) $(N\times N)$-матрица $\boldsymbol{\Psi}$ состоит из $(h\times h)$ блоков, а ее (k,q)-й блок ($k,q=1,2,\ldots,h$) представляет собой $(n\times n)$-матрицу:

$$
\mathbf{\Psi}(k,q)=\begin{bmatrix}
\psi_{kq}(0) & \psi_{kq}(+1) & \cdots & \psi_{kq}(p-1) & 0 & \cdots & 0 & 0\\
\psi_{kq}(-1) & \psi_{kq}(0) & \cdots & \psi_{kq}(p-2) & \psi_{kq}(p-1) & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
\psi_{kq}(1-p) & \psi_{kq}(2-p) & \cdots & \psi_{kq}(0) & \psi_{kq}(+1) & \cdots & 0 & 0\\
0 & \psi_{kq}(1-p) & \cdots & \psi_{kq}(-1) & \psi_{kq}(0) & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \psi_{kq}(0) & \psi_{kq}(+1)\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \psi_{kq}(-1) & \psi_{kq}(0)
\end{bmatrix}. \quad (35)
$$

В (35) величины $\psi_{kq}(\Delta)$, $\Delta=-p+1,-p+2,...,p-2,p-1$, определяются по формулам

$$
\psi_{kq}(\Delta)=\mathrm{Cov}\{\xi_{i_1}(k)\xi_{i_2}(q)\}=
$$

$$
=\sum_{q_1=1}^{h}\sum_{q_2=1}^{h}\sigma_{\zeta}(q_1,q_2)\overset{\mathrm{o}}{\boldsymbol{\theta}}{}^{\mathrm{T}}(k,q_1)\mathbf{S}^{\mathrm{T}}(k,q_1)\mathbf{I}(i_1-i_2)\mathbf{S}(q,q_2)\overset{\mathrm{o}}{\boldsymbol{\theta}}(q,q_2), \quad (36)
$$

где $\mathbf{I}_p(i_1-i_2)$ — $(p\times p)$-матрица, у которой все элементы равны нулю, кроме элементов одной диагонали, равных единице: если $\Delta=i_1-i_2=0$, то это — главная диагональ; если $\Delta>0$, то это — диагональ, расположенная выше главной диагонали на Δ строк; если $\Delta<0$, то это — диагональ, расположенная ниже главной диагонали на $|\Delta|$ строк.

Таким образом, (k,q)-й блок матрицы $\mathbf{\Sigma}_{\xi}$ представляет собой $(n\times n)$-матрицу

$$
\mathbf{\Sigma}_{\xi}(k,q)=\sigma_{\varepsilon}(k,q)\mathbf{I}_n+\mathbf{\Psi}(k,q)+\sigma_{\zeta}(k,q)\mathbf{I}_n,\quad k,q=1,2,...,h. \quad (37)
$$

С учетом (33)–(37) для оценок коэффициентов выполняется

$$
\hat{\mathbf{d}}=(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\mathbf{y}. \quad (38)
$$

В формулу (33) для матрицы $\mathbf{C}$ входит ненаблюдаемая матрица регрессоров $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$, а в формулу (34) для матрицы $\mathbf{\Sigma}_{\xi}$ — матрица $\mathbf{\Psi}$, элементы которой, как следует из (35), (36), зависят от неизвестных коэффициентов $\overset{\mathrm{o}}{\boldsymbol{\theta}}$. Эти обстоятельства использованы для построения итерационных процедур вычисления неизвестных коэффициентов в виде (32): в [22] разработана итерационная процедура для случая, когда ковариационные матрицы $\mathbf{\Sigma}_{\zeta}$, $\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon}$ априорно известны, а в [23] — для случая, когда они неизвестны. Процедуры исследованы методом статистических испытаний.

Учитывая (29) и (32), оценки (38) запишем в виде

$$
\hat{\mathbf{d}}=\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{d}}(1)\\ \hline \hat{\mathbf{d}}(2)\\ \hline \vdots\\ \hline \hat{\mathbf{d}}(h)\end{pmatrix}=\mathbf{C}\mathbf{y}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_{1\bullet}\\ \hline \mathbf{C}_{2\bullet}\\ \hline \vdots\\ \hline \mathbf{C}_{h\bullet}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{y}(1)\\ \hline \mathbf{y}(2)\\ \hline \vdots\\ \hline \mathbf{y}(h)\end{pmatrix},\ \text{т.е.}\ \hat{\mathbf{d}}(k)=\mathbf{C}_{k\bullet}\begin{pmatrix}\mathbf{y}(1)\\ \hline \mathbf{y}(2)\\ \hline \vdots\\ \hline \mathbf{y}(h)\end{pmatrix}, \quad (39)
$$

где

$$
\mathbf{C}_{k\bullet}=\left[\mathbf{C}_{k1}\,\vdots\,\mathbf{C}_{k2}\,\vdots\cdots\vdots\,\mathbf{C}_{kh}\right] \quad (40)
$$

является k-й строкой блоков матрицы $\mathbf{C}$, состоящей из $(h\times h)$ блоков.

Для оценки $\hat{\mathbf{d}}(k)$ с учетом (28) и (38) выполняется

$$\hat{\mathbf{d}}(k)=\sum_{q=1}^{h}\sum_{l=1}^{h}[(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1}]_{kl}[\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}]_{lq}\,\mathbf{R}(q)\mathring{\boldsymbol{\theta}}(q)+\sum_{q=1}^{h}\mathbf{C}_{kq}\,\boldsymbol{\xi}(q)=$$

$$=\sum_{q=1(q\neq k)}^{h}\sum_{l=1}^{h}[(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1}]_{kl}[\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}]_{lq}\,\mathring{\boldsymbol{\theta}}(q)+$$

$$+\sum_{l=1}^{h}[(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1}]_{kl}[\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}]_{lk}\,\mathring{\boldsymbol{\theta}}(k)+\sum_{q=1}^{h}\mathbf{C}_{kq}\,\boldsymbol{\xi}(q)=$$

$$=\mathring{\boldsymbol{\theta}}(k)+\sum_{q=1}^{h}\mathbf{C}_{kq}\,\boldsymbol{\xi}(q). \tag{41}$$

Для соответствующих регрессионных моделей из (41) следует

$$\hat{\mathbf{y}}(k)=\mathbf{R}(k)\hat{\mathbf{d}}(k)=\mathbf{R}(k)\mathring{\boldsymbol{\theta}}(k)+\mathbf{R}(k)\sum_{q=1}^{h}\mathbf{C}_{kq}\,\boldsymbol{\xi}(q)=\mathring{\mathbf{y}}(k)+\mathbf{R}(k)\sum_{q=1}^{h}\mathbf{C}_{kq}\,\boldsymbol{\xi}(q)\,, \tag{42}$$

где $\hat{\mathbf{y}}(k)$ — $(n\times 1)$-вектор выхода модели для k-й переменной, $k=1,2,\ldots,h$.

Для регрессионных моделей выполняется

$$\mathbf{y}(k)=\hat{\mathbf{y}}(k)+\mathbf{u}(k)=\mathbf{R}(k)\hat{\mathbf{d}}(k)+\mathbf{u}(k),\;\; k=1,2,\ldots,h\,, \tag{43}$$

где $\mathbf{u}(k)$ — $(n\times 1)$-вектор остатков [24], для которого выполняется

$$\mathbf{u}(k)=\boldsymbol{\xi}(k)-\mathbf{R}(k)\sum_{q=1}^{h}\mathbf{C}_{kq}\,\boldsymbol{\xi}(q),\;\; E\{\mathbf{u}(k)\}=\mathbf{0}_{n}, \tag{44}$$

т.е. его математическое ожидание равно нулевому $(n\times 1)$-вектору.

3. Системный критерий регулярности МГУА для моделирования в классе систем авторегрессионных уравнений

Введем матрицы наблюдений $\mathbf{Y}$, выходов $\hat{\mathbf{Y}}$ и остатков $\mathbf{U}$ системы моделей (43):

$$\mathbf{Y}=[\mathbf{y}(1),\mathbf{y}(2),\ldots,\mathbf{y}(h)],\;\; \hat{\mathbf{Y}}=[\hat{\mathbf{y}}(1),\hat{\mathbf{y}}(2),\ldots,\hat{\mathbf{y}}(h)],\;\; \mathbf{U}=[\mathbf{u}(1),\mathbf{u}(2),\ldots,\mathbf{u}(h)], \tag{45}$$

$$\mathbf{U}=\mathbf{Y}-\hat{\mathbf{Y}}=[\,\mathbf{y}(1)-\hat{\mathbf{y}}(1),\mathbf{y}(2)-\hat{\mathbf{y}}(2),\ldots,\mathbf{y}(h)-\hat{\mathbf{y}}(h)]. \tag{46}$$

Введем объединенные матрицы коэффициентов (29), оценок коэффициентов (41) и объединенный вектор остатков (44):

$$\mathring{\boldsymbol{\Theta}}=\left[\begin{array}{c:c:c:c}\mathring{\boldsymbol{\theta}}(1) & \mathbf{0}_{m(1)} & \cdots & \mathbf{0}_{m(1)}\\ \hdashline \mathbf{0}_{m(2)} & \mathring{\boldsymbol{\theta}}(2) & \cdots & \mathbf{0}_{m(2)}\\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \hdashline \mathbf{0}_{m(h)} & \mathbf{0}_{m(h)} & \cdots & \mathring{\boldsymbol{\theta}}(h)\end{array}\right],\;\; \hat{\mathbf{D}}=\left[\begin{array}{c:c:c:c}\hat{\mathbf{d}}(1) & \mathbf{0}_{m(1)} & \cdots & \mathbf{0}_{m(1)}\\ \hdashline \mathbf{0}_{m(2)} & \hat{\mathbf{d}}(2) & \cdots & \mathbf{0}_{m(2)}\\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \hdashline \mathbf{0}_{m(h)} & \mathbf{0}_{m(h)} & \cdots & \hat{\mathbf{d}}(h)\end{array}\right],\;\; \mathbf{u}=\left(\begin{array}{c}\mathbf{u}(1)\\ \hdashline \mathbf{u}(2)\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline \mathbf{u}(h)\end{array}\right); \tag{47}$$

введем объединенные матрицы векторов (23) и регрессоров (27):

$$\mathbf{\Xi} = [\,\xi(1), \xi(2), ..., \xi(h)\,], \quad \mathbf{R} = [\,\mathbf{R}(1), \mathbf{R}(2), ..., \mathbf{R}(h)\,]. \tag{48}$$

С учетом (45)–(48) запишем систему моделей (28) и систему моделей (43):

$$\mathbf{Y} = \mathbf{R}\overset{\mathrm{o}}{\mathbf{\Theta}} + \mathbf{\Xi} = \overset{\mathrm{o}}{\mathbf{Y}} + \mathbf{\Xi}, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{R}\overset{\wedge}{\mathbf{D}} + \mathbf{U} = \overset{\wedge}{\mathbf{Y}} + \mathbf{U}. \tag{49}$$

Рассмотрим функционал качества системы авторегрессионных уравнений, отражающий требование минимизации математического ожидания (матрицы $\overset{\mathrm{o}}{\mathbf{Y}}$ и $\overset{\wedge}{\mathbf{Y}}$ введены в (46)–(49))

$$JS = E\left\{\frac{1}{h}\ln\left(\det\left[\,[\overset{\mathrm{o}}{\mathbf{Y}} - \overset{\wedge}{\mathbf{Y}}\,]^{\mathrm{T}}[\overset{\mathrm{o}}{\mathbf{Y}} - \overset{\wedge}{\mathbf{Y}}\,]\right]\right)\right\}, \tag{50}$$

который является системным аналогом *J*-функционала, известного для модели одномерной во выходу регрессии [26, с. 172] и получившего в МГУА название «идеальный внешний критерий» [3, с. 99]. Функционал (50) не может применяться при решении практических задач (содержит ненаблюдаемую матрицу $\overset{\mathrm{o}}{\mathbf{Y}}$), но может использоваться для теоретического сравнения методов оценивания, в том числе на основе метода статистических испытаний [8].

Пусть набор структурных матриц

$$\overset{\mathrm{o}}{S} = \{\overset{\mathrm{o}}{\mathbf{S}}(k, q)\}, \quad k, q = 1, 2, ..., h, \tag{51}$$

соответствует истинной структуре модели объекта (1)–(19), т.е. этот набор однозначно задает структуру системы авторегрессионных уравнений: он указывает, какие именно предыдущие значения каждой из переменных определяют текущие значения выходных переменных объекта (1)–(19). Пусть набор структурных матриц (51) неизвестен и его требуется определить по результатам наблюдения функционирования объекта (20), т.е. рассмотрим задачу структурной идентификации. Далее будем предполагать, что для генерации и анализа структур моделей применяется алгоритм полного перебора всех возможных структур моделей, а значение p — число предыдущих значений выходных переменных, которые влияют на их текущее значение — априорно известно.

Пусть

$$S = \{\mathbf{S}(k, q)\}, \quad k, q = 1, 2, ..., h, \tag{52}$$

— набор структурных матриц текущей анализируемой структуры модели.

Используем (21)–(52) для построения системного критерия регулярности, предназначенного для отыскания оптимального множества регрессоров в системе авторегрессионных моделей.

Существует ли конструктивная альтернатива выбору ненаблюдаемой матрицы $\overset{\mathrm{o}}{\mathbf{Y}}$ в JS-функционале (50), сохраняющая для соответствующего функционала свойства JS-функционала? Положительный ответ на этот вопрос для систем статических (одновременных) регрессионных уравнений [25] получен в рамках так называемой схемы повторных наблюдений, которая может быть реализована в условиях активного эксперимента. В этой схеме для заданного вектора значений входных переменных объекта проводится не одно, а пара независимых наблюдений выходных переменных. Первое наблюдение из этой пары участвует в формировании выборки A, второе — выборки B и в результате в схеме повторных наблюдений выполняется $\mathbf{X}(A) = \mathbf{X}(B)$.

Такую схему можно реализовать для статических регрессионных моделей, но для авторегрессионных моделей она принципиально нереализуема: значение каждой из переменных множества X в силу модели (1) формируется с участием случайной ненаблюдаемой составляющей, которую «воспроизвести» нельзя. Поскольку добиться выполнения $\mathbf{X}(A)=\mathbf{X}(B)$ невозможно, остается попытка обеспечить выполнение

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(A)\,\mathbf{X}(A)\approx\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(B)\,\mathbf{X}(B) \tag{53}$$

и исследовать системный критерий регулярности в этих условиях.

Будем предполагать, что объект принадлежит к классу объектов, допускающих возможность неоднократного наблюдения реализаций функционирования (например, временные ряды показателей некоторого технологического процесса). И будем выбирать такие реализации, которые начинаются с приблизительно одинаковых начальных условий $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(A,0)\,\mathbf{X}(A,0)\approx\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(B,0)\,\mathbf{X}(B,0),$ имеют качественно одинаковый характер переходных процессов и заканчиваются близкими состояниями в конечные моменты времени.

Пусть в качестве двух выборок наблюдений A и B выбраны наблюдения двух реализаций функционирования объекта — две выборки наблюдений h выходных переменных множества X, обладающих указанными выше свойствами. Первую выборку A будем называть обучающей, а вторую B — проверочной. На обучающей выборке будем оценивать параметры в системе авторегрессионных уравнений с текущей анализируемой структурой, а на проверочной оценивать качество построенной модели. (В дальнейшем такой способ формирования обучающей и проверочной выборок будем называть «схемой квазиповторных наблюдений».)

В соответствии с (49) для $(n(B)\times h)$-матрицы остатков на выборке B выполняется

$$\mathbf{U}(B\,/\,A,S)=\mathbf{Y}(B)-\hat{\mathbf{Y}}(B\mid A,S)=\mathbf{Y}(B)-\mathbf{R}(B,S)\,\hat{\mathbf{D}}(A,S), \tag{54}$$

где $\mathbf{Y}(B)$ — $(n(B)\times h)$-матрица наблюдений выходных переменных выборки B; $\hat{\mathbf{Y}}(B\mid A,S)$ — $(n(B)\times h)$-матрица выходов системы регрессионных моделей на выборке B, рассчитанная по модели, оценки коэффициентов которой $\hat{\mathbf{D}}(A,S)$ получены в соответствии с (21)–(41) на обучающей выборке A для структуры S; $n(B)$ — объем проверочной выборки.

В соответствии с (43) для $(n(B)\times 1)$-векторов остатков в матрице $\mathbf{U}(B\mid A,S)$ выполняется

$$\mathbf{u}(B\mid A,S;k)=\mathbf{y}(B,k)-\hat{\mathbf{y}}(B\mid A,\mathrm{S};k)=\mathbf{y}(B,k)-\mathbf{R}(B,S;k)\,\hat{\mathbf{d}}(A,S;k)=$$

$$=\overset{\mathrm{o}}{\mathbf{y}}(B,k)+\boldsymbol{\xi}(B,k)-\mathbf{R}(B,S;k)\sum_{q=1}^{h}\mathbf{C}_{kq}(A,S)\,\overset{\mathrm{o}}{\mathbf{y}}(A,q)-\mathbf{R}(B,S;k)\sum_{q=1}^{h}\mathbf{C}_{kq}(A,S)\times$$

$$\times\boldsymbol{\xi}(A,q)=\boldsymbol{\delta}(B\mid A,S;k)+\boldsymbol{\xi}(B,k)-\mathbf{R}(B,k;S)\sum_{q=1}^{h}\mathbf{C}_{kq}(A,S)\boldsymbol{\xi}(A,q), \tag{55}$$

где

$$\boldsymbol{\delta}(B\mid A,S;k)=\overset{\mathrm{o}}{\mathbf{y}}(B,k)-\mathbf{R}(B,S;k)\sum_{q=1}^{h}\mathbf{C}_{kq}(A,S)\,\overset{\mathrm{o}}{\mathbf{y}}(A,q) \tag{56}$$

— так называемый $(n\times 1)$-вектор смещения, обусловленный выбором структуры S вместо $\overset{\mathrm{o}}{S}$.

Объединим $(n(B)\times 1)$-векторы остатков (55) в $(n(B)\times h)$-матрицу

$$\mathbf{U}(B\,|\,A,S)=\left[\,\mathbf{u}(B\,|\,A,S;1),\ \mathbf{u}(B\,|\,A,S;2),\dots,\mathbf{u}(B\,|\,A,S,h)\,\right] \tag{57}$$

и введем матрицу ковариаций остатков

$$\mathbf{W}(B\,|\,A,S)=\mathbf{U}^{\mathrm{T}}(B\,|\,A,S)\,\mathbf{U}(B\,|\,A,S)\,. \tag{58}$$

Определение 1. Случайная величина

$$ARS\,(S)=\frac{1}{h}\ln\left(\det\left[\,\mathbf{W}(B\,|\,A,S)\right]\right) \tag{59}$$

называется системным критерием регулярности для системы авторегрессионных уравнений.

Определение 2. Оптимальным множеством регрессоров называется множество регрессоров, соответствующее набору структурных матриц S_0:

$$S_0=\arg\min_{S\subseteq S^*(p)} E\{ARS(S)\}, \tag{60}$$

где $S^*(p)$ — множество возможных наборов структурных матриц при заданном параметре p.

Определение 3. Оптимальной по количеству и составу регрессоров называется система авторегрессионных уравнений, построенная на множестве регрессоров, соответствующем набору структурных матриц S_0.

Вычислим математическое ожидание матрицы ковариаций остатков (58). Для (k,q)-элемента этой матрицы с учетом результатов [23] выполняется

$$\begin{aligned}&\mathbf{\Omega}_{kq}(B\,|\,A,S)=[\,E\{\mathbf{U}^{\mathrm{T}}(B\,|\,A,S)\,\mathbf{U}(B\,|\,A,S)\}\,]_{kq}=E\{\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(B\,|\,A,S;k)\,\mathbf{u}(B\,|\,A,S;q)\}=\\&=\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}(B\,|\,A,S;k)\,\boldsymbol{\delta}(B\,|\,A,S;q)+E\{[\,\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(B,k)\,\boldsymbol{\xi}(B,q)]\}-E\{[\,\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(B,k)\,(\,\mathbf{R}(B,S;q)\times\\&\times\sum_{s=1}^{h}\mathbf{C}_{qs}(A,S)\,\boldsymbol{\xi}(A,s))\,]\}-E\{[\,(\,\mathbf{R}(B,S;k)\sum_{r=1}^{h}\mathbf{C}_{kr}(A,S)\,\boldsymbol{\xi}(A,r))^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\xi}(B,q)]\}+\\&+E\{[\,(\,\mathbf{R}(B,S;k)\sum_{r=1}^{h}\mathbf{C}_{kr}(A,S)\,\boldsymbol{\xi}(A,r))^{\mathrm{T}}\,(\,\mathbf{R}(B,S;q)\sum_{s=1}^{h}\mathbf{C}_{qs}(A,S)\,\boldsymbol{\xi}(A,s))\,]\}.\end{aligned} \tag{61}$$

Для второго слагаемого в (61) с учетом (34)–(37) выполняется

$$E\,\{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(B,k)\,\boldsymbol{\xi}(B,q)\}=n(B)(\sigma_{\varepsilon}(k,q)+\psi_{kq}(0)+\sigma_{\zeta}(k,q)), \tag{62}$$

а третье и четвертое слагаемые равны нулю, поскольку $\boldsymbol{\xi}(A)$ и $\boldsymbol{\xi}(B)$ независимы.

Для пятого слагаемого в (61) выполняется

$$\begin{aligned}&E\left\{\left[\sum_{r=1}^{h}\sum_{s=1}^{h}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(A,r)[\mathbf{C}_{kr}(A,S)]^{\mathrm{T}}\,\mathbf{R}^{\mathrm{T}}(B,S;k)\,\mathbf{R}(B,S;q)\,\mathbf{C}_{qs}(A,S)\,\boldsymbol{\xi}(A,s)\right]\right\}=\\&\qquad=\sum_{r=1}^{h}\sum_{s=1}^{h}\mathrm{tr}\,[\,[\mathbf{C}_{kr}(A,S)]^{\mathrm{T}}\,\mathbf{R}^{\mathrm{T}}(B,S;k)\,\mathbf{R}(B,S;q)\,\mathbf{C}_{qs}(A,S)[\mathbf{\Sigma}_{\xi}]_{sr}].\end{aligned} \tag{63}$$

Учитывая

$$\mathbf{C}_{kr}(A,S)=[\,(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\,\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S))^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\,\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,]_{kr}, \tag{64}$$

$$\mathbf{C}_{qs}(A,S)=[\,(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\,\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S))^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\,\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,]_{qs}, \tag{65}$$

используя $[\mathbf{C}_{kr}(A,S)]^{\mathrm{T}} = [\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(A,S)]_{rk}$ и симметричность матрицы $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}$, получаем

$$\sum_{r=1}^{h}\sum_{s=1}^{h} \mathrm{tr}\,[[\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S))^{-1}]_{rk}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}(B,S;k)\mathbf{R}(B,S;q)\times$$

$$\times[(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S))^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}]_{qs}[\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}]_{sr}] = \mathrm{tr}[\underline{\underline{\mathbf{R}}}(B,S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\times$$

$$\times\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S))^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(B,S)]_{kq}. \tag{66}$$

Подставляя в (61) выражения (62) и (66), имеем

$$\boldsymbol{\Omega}_{kq}(B\,|\,A,S) = \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}(B\,|\,A,S;k)\boldsymbol{\delta}(B\,|\,A,S;q) + n(B)(\sigma_{\varepsilon}(k,q) + \psi_{kq}(0) + \sigma_{\zeta}(k,q)) +$$

$$+\,\mathrm{tr}[\underline{\underline{\mathbf{R}}}(B,S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S))^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(B,S)]_{kq} =$$

$$= [\boldsymbol{\Delta}(B\,|\,A,S)]_{kq} + n(B)(\sigma_{\varepsilon}(k,q) + \psi_{kq}(0) + \sigma_{\zeta}(k,q)) + \mathrm{tr}[\mathbf{P}(B,A,S)]_{kq}, \tag{67}$$

где $\boldsymbol{\Delta}(B\,|\,A,S)$ — матрица отклонений, обусловленных выбором структуры S вместо $\overset{\circ}{S}$:

$$[\boldsymbol{\Delta}(B\,|\,A,S)]_{kq} = \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}(B\,|\,A,S;k)\boldsymbol{\delta}(B\,|\,A,S;q),\quad k,q = 1,2,...,h; \tag{68}$$

$$\mathbf{P}(B,A,S) = \underline{\underline{\mathbf{R}}}(B,S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S))^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(B,S). \tag{69}$$

Введем обозначения для матриц:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_{11}(0) & \psi_{12}(0) & \cdots & \psi_{1h}(0) \\ \psi_{21}(0) & \psi_{22}(0) & \cdots & \psi_{2h}(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{h1}(0) & \psi_{h2}(0) & \cdots & \psi_{hh}(0) \end{bmatrix}, \tag{70}$$

$$\mathbf{T}_{P}(S) = \begin{bmatrix} \mathrm{tr}[\mathbf{P}(B,A,S;1,1)] & \mathrm{tr}[\mathbf{P}(B,A,S;1,2)] & \cdots & \mathrm{tr}[\mathbf{P}(B,A,S;1,h)] \\ \mathrm{tr}[\mathbf{P}(B,A,S;2,1)] & \mathrm{tr}[\mathbf{P}(B,A,S;2,2)] & \cdots & \mathrm{tr}[\mathbf{P}(B,A,S;2,h)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{tr}[\mathbf{P}(B,A,S;h,1)] & \mathrm{tr}[\mathbf{P}(B,A,S;h,2)] & \cdots & \mathrm{tr}[\mathbf{P}(B,A,S;h,h)] \end{bmatrix}. \tag{71}$$

Тогда для ковариационной матрицы $\boldsymbol{\Omega}(B\,/\,A,S)$ окончательно получаем

$$\boldsymbol{\Omega}(B\,|\,A,S) = \boldsymbol{\Delta}(B\,|\,A,S) + n(B)(\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon} + \boldsymbol{\Sigma}_{\psi} + \boldsymbol{\Sigma}_{\zeta}) + \mathbf{T}_{P}(S). \tag{72}$$

Для случая совпадения структуры S с $\overset{\circ}{S}$ выполняется $(k,q = 1,2,...,h)$

$$\boldsymbol{\Omega}_{kq}(B\,|\,A,\overset{\circ}{S}) = n(B)(\sigma_{\varepsilon}(k,q) + \psi_{kq}(0) + \sigma_{\zeta}(k,q)) + \mathrm{tr}[\mathbf{P}(B,A,\overset{\circ}{S})]_{kq}, \tag{73}$$

$$\boldsymbol{\Omega}(B\,|\,A,\overset{\circ}{S}) = n(B)(\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon} + \boldsymbol{\Sigma}_{\psi} + \boldsymbol{\Sigma}_{\zeta}) + \mathbf{T}_{P}(\overset{\circ}{S}), \tag{74}$$

где матрицы $\mathbf{P}(B,A,\overset{\circ}{S})$ и $\mathbf{T}_{P}(\overset{\circ}{S})$ могут быть записаны аналогично (69) и (71).

4. Исследование системного критерия регулярности МГУА

Установим свойства системного критерия регулярности МГУА. С этой целью исследуем, как изменяется математическое ожидание критерия в зависимости от состава множества регрессоров. В случае истинной структуры для математического ожидания критерия регулярности, используя (74), получаем

 ISSN 0572-2691

$$E\{ARS(\overset{o}{S})\} = \frac{1}{h} E\{\ln(\det[\mathbf{W}(B \mid A, \overset{o}{S})])\} = \frac{1}{h}\ln(\det[\mathbf{\Omega}(B \mid A, \overset{o}{S})]\prod_{k=1}^{h}(n-k)) =$$

$$= \frac{1}{h}\ln(\det[n(B)(\mathbf{\Sigma}_\varepsilon + \mathbf{\Sigma}_\psi + \mathbf{\Sigma}_\zeta) + \mathbf{T}_P(\overset{o}{S})]\prod_{k=1}^{h}(n-k)). \quad (75)$$

Для критерия регулярности модели с текущей структурой S, используя (72), имеем

$$E\{ARS(S)\} = \frac{1}{h} E\{\ln(\det[\mathbf{W}(B \mid A, S)])\} = \frac{1}{h}\ln(\det[\mathbf{\Omega}(B \mid A, S)]\prod_{k=1}^{h}(n-k)) =$$

$$= \frac{1}{h}\ln(\det[\mathbf{\Delta}(B \mid A, S) + n(B)(\mathbf{\Sigma}_\varepsilon + \mathbf{\Sigma}_\psi + \mathbf{\Sigma}_\zeta) + \mathbf{T}_P(S)]\prod_{k=1}^{h}(n-k)). \quad (76)$$

При расчете математических ожиданий определителей матриц $\mathbf{W}(B \mid A, \overset{o}{S})$ и $\mathbf{W}(B \mid A, S)$ в (75) и (76) учтено, что они в соответствии с определением [26, с. 236-237] имеют распределение Уишарта.

Случай недостающего регрессора. Рассмотрим случай, когда в текущей структуре пропущен один регрессор. Предположим для простоты, что это регрессор для переменной с номером h, и он является максимально удаленным предыдущим значением этой переменной, участвующим в формировании ее текущего значения, т.е. между структурными матрицами выполняется соотношение

$$\overset{o}{\mathbf{S}}(h, h) = [\,\mathbf{S}(h, h) \mid \mathbf{s}\,], \quad (77)$$

где $\overset{o}{\mathbf{S}}(h, h)$ — структурная $(p \times \overset{o}{m}(h, h))$-матрица истинной модели (авторегрессионного уравнения) для переменной с номером h; $\mathbf{S}(h, h)$ — структурная $(p \times (m(h, h) - 1))$-матрица текущей модели для переменной с номером h; $\mathbf{s}$ — $(p \times 1)$-вектор, для которого выполняется

$$\mathbf{s} = (0, 0, ..., 1)^{\mathrm{T}}. \quad (78)$$

Другими словами, в модели функционирования (4) для h-й переменной в формировании величины $\overset{*}{x}_i(h)$ участвует величина $\overset{*}{x}_{i-p}(h)$, но в текущую модель она не включена.

Используя (75), (76), вычислим разность математических ожиданий системного критерия регулярности для структур S и $\overset{o}{S}$:

$$\Delta_1(S, \overset{o}{S}) = E\{ARS(S)\} - E\{ARS(\overset{o}{S})\} = \frac{1}{h}\ln\left(\frac{\det[\mathbf{\Omega}_1(B \mid A, S)]}{\det[\mathbf{\Omega}(B \mid A, \overset{o}{S})]}\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\ln\left(\frac{\det[[n(B)(\mathbf{\Sigma}_\varepsilon + \mathbf{\Sigma}_\psi + \mathbf{\Sigma}_\zeta) + \mathbf{T}_P(S)] + \mathbf{\Delta}(B \mid A, S)]}{\det[n(B)(\mathbf{\Sigma}_\varepsilon + \mathbf{\Sigma}_\psi + \mathbf{\Sigma}_\zeta) + \mathbf{T}_P(\overset{o}{S})]}\right). \quad (79)$$

Вычислим $(h \times h)$-матрицу $\mathbf{\Delta}(B \mid A, S)$ в (79), для которой выполняется

$$\mathbf{\Delta}(B \mid A, S) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{O}_{(h-1)\times(h-1)} & \mathbf{0}_{h-1} \\ \hline \mathbf{0}_{h-1}^{\mathrm{T}} & \Delta_{hh} \end{array}\right], \quad (80)$$

где $\Delta_{hh} = \mathbf{\delta}^{\mathrm{T}}(B \mid A, S; h)\,\mathbf{\delta}(B \mid A, S; h)$; $\mathbf{\delta}(B \mid A, S; h)$ — введенное в (56) смещение, обусловленное выбором текущей структуры S вместо истинной структуры $\overset{o}{S}$.

Для объединенного вектора смещения $\boldsymbol{\delta}(B \mid A, S)$ выполняется

$$\boldsymbol{\delta}(B \mid A, S) = \mathring{\mathbf{y}}(B) - \underline{\underline{\mathbf{R}}}(B, S)\,\mathbf{C}(A, S)\,\mathring{\mathbf{y}}(A) = \underline{\underline{\mathbf{R}}}(B, \mathring{S})\,\mathring{\boldsymbol{\theta}} - \underline{\underline{\mathbf{R}}}(B, S)\,\mathbf{C}(A, S)\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, \mathring{S})\,\mathring{\boldsymbol{\theta}} =$$

$$= \underline{\underline{\mathbf{R}}}(B, \mathring{S})\,\mathring{\boldsymbol{\theta}} - \underline{\underline{\mathbf{R}}}(B, S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, S)\,\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, S))^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, S)\,\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, \mathring{S})\,\mathring{\boldsymbol{\theta}}. \qquad (81)$$

Для матриц регрессоров, соответствующих наборам $\mathring{S}$ и S в (77), выполняется

$$\mathbf{R}(\mathring{S}, k) = \mathbf{R}(S, k), \;\; k = 1, 2, \ldots, h-1, \qquad (82)$$

$$\mathbf{R}(\mathring{S}, h, q) = \mathbf{R}(S, h, q), \;\; q = 1, 2, \ldots, h-1, \qquad (83)$$

$$\mathbf{R}(\mathring{S}, h, h) = \mathbf{X}\,\mathring{\mathbf{S}}(h, h) = \mathbf{X}[\mathbf{S}(h, h) \,\vdots\, \mathbf{s}] = [\,\mathbf{X}\,\mathbf{S}(h, h) \,\vdots\, \mathbf{X}\mathbf{s}\,] = [\mathbf{R}(S, h, h) \,\vdots\, \mathbf{m}], \qquad (84)$$

где $\mathbf{m}$ — $(n \times 1)$-вектор наблюдений пропущенного регрессора.

Для матриц $\underline{\underline{\mathbf{R}}}(\mathring{S})$ и $\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)$ с учетом (82)–(84) получаем

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}(\mathring{S}) = [\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S) \,\vdots\, \boldsymbol{\delta}_R\,], \;\; \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}} = (\mathbf{0}_n^{\mathrm{T}}, \mathbf{0}_n^{\mathrm{T}}, \ldots, \mathbf{m}^{\mathrm{T}}). \qquad (85)$$

Запишем (81) с учетом (85):

$$\boldsymbol{\delta}(B \mid A, S) = [\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(B, S) \,\vdots\, \boldsymbol{\delta}_R(B)]\,\mathring{\boldsymbol{\theta}} - \underline{\underline{\mathbf{R}}}(B, S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, S)\,\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, S))^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, S)\,\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1} \times$$

$$\times \left[\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, S) \,\vdots\, \boldsymbol{\delta}_R(A)\right]\mathring{\boldsymbol{\theta}} = [\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(B, S) \,\vdots\, \boldsymbol{\delta}_R(B)\,]\,\mathring{\boldsymbol{\theta}} -$$

$$- [\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(B,S) \,\vdots\, \underline{\underline{\mathbf{R}}}(B,S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S))^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\boldsymbol{\delta}_R(A)\,]\,\mathring{\boldsymbol{\theta}} =$$

$$= [\mathbf{O}_{N \times (\mathring{M}-1)} \,\vdots\, \boldsymbol{\delta}_R(B) - \underline{\underline{\mathbf{R}}}(B, S)(\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, S)\,\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, S))^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, S)\,\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\boldsymbol{\delta}_R(A)]\,\mathring{\boldsymbol{\theta}} =$$

$$= [\mathbf{O}_{N \times (\mathring{M}-1)} \,\vdots\, \boldsymbol{\delta}_R(B) - \mathbf{P}(B, A, S)\,\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\boldsymbol{\delta}_R(A)]\,\mathring{\boldsymbol{\theta}}, \qquad (86)$$

$$\mathbf{P}(B, A, S) = \underline{\underline{\mathbf{R}}}(B, S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, S)\,\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, S))^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, S). \qquad (87)$$

Учитывая (86) и (87) для величины Δ_{hh}, введенной в (80), получаем

$$\Delta_{hh} = \mathring{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}} \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{O}_{(\mathring{M}-1) \times (\mathring{M}-1)} & \mathbf{0}_{\mathring{M}-1} \\ \hdashline \mathbf{0}^{\mathrm{T}}_{\mathring{M}-1} & \begin{array}{l} (\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(B) - \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\,\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\mathbf{P}^{\mathrm{T}}(B, A, S)) \times \\ \times (\boldsymbol{\delta}_R(B) - \mathbf{P}(B, A, S)\,\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\boldsymbol{\delta}_R(A)) \end{array} \end{array}\right] \mathring{\boldsymbol{\theta}}. \qquad (88)$$

Для $(\mathring{M}, \mathring{M})$-го элемента матрицы в (88) выполняется $(\mathring{M} = \mathring{m}(1) + \mathring{m}(2) + \ldots + \mathring{m}(h))$

$$a = (\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(B) - \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\,\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\mathbf{P}^{\mathrm{T}}(B, A, S))(\boldsymbol{\delta}_R(B) - \mathbf{P}(B, A, S)\,\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\boldsymbol{\delta}_R(A)) =$$

$$= \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(B)\,\boldsymbol{\delta}_R(B) - \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(B)\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(B, S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, S)\,\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, S))^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, S)\,\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\boldsymbol{\delta}_R(A) -$$

$$- \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\,\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, S)\,\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, S))^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(B, S)\,\boldsymbol{\delta}_R(B) +$$

$$+ \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\,\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, S)\,\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, S))^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(B, S) \times$$

$$\times \underline{\underline{\mathbf{R}}}(B, S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, S)\,\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, S))^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, S)\,\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\boldsymbol{\delta}_R(A). \qquad (89)$$

ISSN 0572-2691

Далее, используем то обстоятельство, что обучающая (A) и проверочная (B) выборки получены особым способом как пара реализаций функционирования объекта с близкими начальными условиями, качественно одинаковым характером переходных процессов и близкими состояниями в конечные моменты времени.

Введем в рассмотрение разности:

$$a = (\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(B) - \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}(B, A, S))(\boldsymbol{\delta}_R(B) - \mathbf{P}(B, A, S)\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\boldsymbol{\delta}_R(A)) =$$

$$\mathbf{G}(X) = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}(B)\mathbf{X}(B) - \mathbf{X}^{\mathrm{T}}(A)\mathbf{X}(A), \tag{90}$$

$$g(\mathbf{m}) = \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(B)\boldsymbol{\delta}_R(B) - \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\boldsymbol{\delta}_R(A) = \mathbf{m}^{\mathrm{T}}(B)\mathbf{m}(B) - \mathbf{m}^{\mathrm{T}}(A)\mathbf{m}(A), \tag{91}$$

$$\mathbf{G}(R, S) = \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(B, S)\underline{\underline{\mathbf{R}}}(B, S) - \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, S)\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, S) =$$

$$= \left[\begin{array}{c:c:c:c} \begin{array}{l}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}(B, S, 1)\mathbf{R}(B, S, 1) - \\ - \mathbf{R}^{\mathrm{T}}(A, S, 1)\mathbf{R}(A, S, 1)\end{array} & \mathbf{O}_{(m(1)\times m(2))} & \cdots & \mathbf{O}_{(m(1)\times m(h))} \\ \hdashline \mathbf{O}_{(m(2)\times m(1))} & \begin{array}{l}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}(B, S, 2)\mathbf{R}(B, S, 2) - \\ - \mathbf{R}^{\mathrm{T}}(A, S, 2)\mathbf{R}(A, S, 2)\end{array} & \cdots & \mathbf{O}_{(m(2)\times m(h))} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \mathbf{O}_{(m(h)\times m(1))} & \mathbf{O}_{(m(h)\times m(2))} & \cdots & \begin{array}{l}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}(B, S, h)\mathbf{R}(B, S, h) - \\ - \mathbf{R}^{\mathrm{T}}(A, S, h)\mathbf{R}(A, S, h)\end{array} \end{array}\right], \tag{92}$$

т.е. представляет собой матрицу размера $M \times M$, имеет блочно-диагональный вид, состоит из $(h \times h)$ блоков и (k, q)-блок имеет размеры $m(k) \times m(q)$;

$$\mathbf{g}^{\mathrm{T}}(R, S) = \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(B)\underline{\underline{\mathbf{R}}}(B, S) - \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, S) =$$

$$= (\mathbf{0}_{m(1)}^{\mathrm{T}}, \mathbf{0}_{m(2)}^{\mathrm{T}}, \ldots, \mathbf{m}^{\mathrm{T}}(B)\mathbf{R}(B, S, h) - \mathbf{m}^{\mathrm{T}}(A)\mathbf{R}(A, S, h)), \tag{93}$$

т.е. представляет собой вектор размера $1 \times M$, состоит из h блоков и только один h-й блок — ненулевой $m(h)$-мерный вектор.

Влияние скаляра $g(R)$, вектора $\mathbf{g}(R, S)$, матрицы $\mathbf{G}(R, S)$ на упрощение структуры по числу регрессоров оценено методом статистических испытаний в отдельном исследовании.

Учитывая (90)–(93), для (89) получаем

$$a = \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(A, S)\mathbf{M}(A, S)]\boldsymbol{\delta}_R(A) + \rho_1(\mathbf{m}), \tag{94}$$

где $\mathbf{M}(A, S)$ — $(N(A) \times N(A))$-матрица, состоящая из $(h \times h)$ блоков:

$$\mathbf{M}(A, S) = [\mathbf{I}_N - \underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, S)\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, S))^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, S)\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}], \tag{95}$$

а для скаляра $\rho_1(\mathbf{m})$ выполняется

$$\rho_1(\mathbf{m}) = g(\mathbf{m}) - \mathbf{g}^{\mathrm{T}}(R, S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, S)\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, S))^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, S)\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\boldsymbol{\delta}_R(A) - \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A) \times$$

$$\times \boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, S)\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, S))^{-1}\mathbf{g}(R, S) + \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, S) \times$$

$$\times (\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, S)\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, S))^{-1}\mathbf{G}(R, S) \times (\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, S)\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, S))^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, S) \times$$

$$\times \boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\boldsymbol{\delta}_R(A) = g(\mathbf{m}) - \mathbf{g}^{\mathrm{T}}(R, S)\mathbf{C}(A, S)\boldsymbol{\delta}_R(A) - \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(A, S)\mathbf{g}(R, S) +$$

$$+ \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(A, S)\mathbf{G}(R, S)\mathbf{C}(A, S)\boldsymbol{\delta}_R(A). \tag{96}$$

Учитывая (77), (94), (95) и соотношения

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(1) \\ \hdashline \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(2) \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(h) \end{pmatrix}, \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(h) = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\theta}_1(h) \\ \hdashline \overset{\circ}{\theta}_2(h) \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \overset{\circ}{\theta}_{\overset{\circ}{m}(h)}(h) \end{pmatrix}, \tag{97}$$

получаем

$$\Delta_{hh} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}{}^{\mathrm{T}} \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{O}_{(\overset{\circ}{M}-1)\times(\overset{\circ}{M}-1)} & \mathbf{0}_{\overset{\circ}{M}-1} \\ \hdashline \mathbf{0}^{\mathrm{T}}_{\overset{\circ}{M}-1} & \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\,\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(A,S)\,\mathbf{M}(A,S)\,\boldsymbol{\delta}_R(A) + \rho_1(\mathbf{m}) \end{array} \right] \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}} =$$

$$= \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}{}^{\mathrm{T}} \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{O}_{(\overset{\circ}{M}-1)\times(\overset{\circ}{M}-1)} & \mathbf{0}_{\overset{\circ}{M}-1} \\ \hdashline \mathbf{0}^{\mathrm{T}}_{\overset{\circ}{M}-1} & \mathbf{m}^{\mathrm{T}}(A)[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(A,S)\,\mathbf{M}(A,S)]_{hh}\,\mathbf{m}(A) + \rho_1(\mathbf{m}) \end{array} \right] \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}} =$$

$$= (\overset{\circ}{\theta}_{\overset{\circ}{m}(h)}(h))^2 \cdot \mathbf{m}^{\mathrm{T}}(A)\,\mathbf{H}_{hh}(A,S)\,\mathbf{m}(A) + (\overset{\circ}{\theta}_{\overset{\circ}{m}(h)}(h))^2 \cdot \rho_1(\mathbf{m}), \tag{98}$$

$$\mathbf{H}(A,S) = \mathbf{M}^{\mathrm{T}}(A,S)\,\mathbf{M}(A,S) = [\,\mathbf{I}_N - \boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\,\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1} \times$$

$$\times\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S))^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)][\,\mathbf{I}_N - \underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\,\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S))^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\,\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}]\,. \tag{99}$$

Итак, в (86)–(99) установлено

$$\Delta_{hh} = \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}(B\,|\,A,S;h)\,\boldsymbol{\delta}(B\,|\,A,S;h) = (\overset{\circ}{\theta}_{\overset{\circ}{m}(h)}(h))^2\ \mathbf{m}^{\mathrm{T}}(A)\,\mathbf{H}_{hh}(A,S)\,\mathbf{m}(A) +$$

$$+ (\overset{\circ}{\theta}_{\overset{\circ}{m}(h)}(h))^2 \rho_1(\mathbf{m}). \tag{100}$$

Введем $(h\times 1)$-вектор $\mathbf{b} = (0, 0, ..., 0, (\Delta_{hh})^{1/2})^{\mathrm{T}}$ такой, что $\mathbf{b}\,\mathbf{b}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Delta}(B/A,S)$, и, применяя правило $\det[\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}] = \det[\mathbf{A}](1 + \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b})$, вычислим определитель в числителе (79):

$$c = \det[[n(B)(\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon + \boldsymbol{\Sigma}_\psi + \boldsymbol{\Sigma}_\zeta) + \mathbf{T}_P(S)] + \boldsymbol{\Delta}(B/A,S)] = \det[n(B)(\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon + \boldsymbol{\Sigma}_\psi + \boldsymbol{\Sigma}_\zeta) + \mathbf{T}_P(S)] \times$$

$$\times \{1 + (0, 0, ..., 0, (\Delta_{hh})^{1/2})\mathbf{A}^{-1}(0, 0, ..., 0, (\Delta_{hh})^{1/2})^{\mathrm{T}}\} = \det[n(B)(\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon + \boldsymbol{\Sigma}_\psi + \boldsymbol{\Sigma}_\zeta) +$$

$$\mathbf{T}_P(S)]\{1 + (\Delta_{hh})^{1/2}[[n(B)(\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon + \boldsymbol{\Sigma}_\psi + \boldsymbol{\Sigma}_\zeta) + \mathbf{T}_P(S)]^{-1}]_{hh}(\Delta_{hh})^{1/2}\}. \tag{101}$$

Используя (101), для разности (79) получаем

$$\Delta_1(S, \overset{\circ}{S}) = \frac{1}{h}\ln\left(\frac{\begin{array}{l} \det[n(B)(\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon + \boldsymbol{\Sigma}_\psi + \boldsymbol{\Sigma}_\zeta) + \mathbf{T}_P(S)] \times \\ \times\{1 + (\Delta_{hh})^{1/2}[[n(B)(\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon + \boldsymbol{\Sigma}_\psi + \boldsymbol{\Sigma}_\zeta) + \mathbf{T}_P(S)]^{-1}]_{hh}(\Delta_{hh})^{1/2}\} \end{array}}{\det[n(B)(\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon + \boldsymbol{\Sigma}_\psi + \boldsymbol{\Sigma}_\zeta) + \mathbf{T}_P(\overset{\circ}{S})]} \right). \tag{102}$$

Продолжая вычисление разности математических ожиданий системного критерия регулярности для структур S и $\overset{\circ}{S}$, установим соотношение $(h\times h)$-матриц $\mathbf{T}_P(S)$ и $\mathbf{T}_P(\overset{\circ}{S})$ в (102). В соответствии с (71) для их разности выполняется

 ISSN 0572-2691

$$[\,\mathbf{T}_P(S)-\mathbf{T}_P(\overset{\mathrm{o}}{S})\,]_{kq}=\mathrm{tr}\,[\,\mathbf{P}(B,A,S;k,q)-\mathbf{P}(B,A,\overset{\mathrm{o}}{S};k,q)\,]=$$

$$=\mathrm{tr}\,[\,\mathbf{P}(B,A,S)-\mathbf{P}(B,A,\overset{\mathrm{o}}{S})\,]_{kq}\,,\;\; k,q=1,2\,...h. \tag{103}$$

Учитывая (85), вычислим

$$\mathbf{P}(B,A,S)-\mathbf{P}(B,A,\overset{\mathrm{o}}{S})=\underline{\underline{\mathbf{R}}}(B,S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S))^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(B,S)-$$

$$-\underline{\underline{\mathbf{R}}}(B,\overset{\mathrm{o}}{S})(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,\overset{\mathrm{o}}{S})\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,\overset{\mathrm{o}}{S}))^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(B,\overset{\mathrm{o}}{S})=\underline{\underline{\mathbf{R}}}(B,S)[\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\times$$

$$\times\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S)\,]^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(B,S)-[\underline{\underline{\mathbf{R}}}(B,S)\,\vdots\,\boldsymbol{\delta}_R(B)]\times$$

$$\times\left[\begin{bmatrix}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\\ \hdashline \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\end{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}[\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S)\,\vdots\,\boldsymbol{\delta}_R(A)]\right]^{-1}\begin{bmatrix}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(B,S)\\ \hdashline \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(B)\end{bmatrix}=\underline{\underline{\mathbf{R}}}(B,S)[\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\times$$

$$\times\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S)\,]^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(B,S)-\left[\underline{\underline{\mathbf{R}}}(B,S)\,\vdots\,\boldsymbol{\delta}_R(B)\right]\times$$

$$\times\left[\begin{array}{c:c}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S) & \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R(A)\\ \hdashline \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S) & \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R(A)\end{array}\right]^{-1}\begin{bmatrix}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(B,S)\\ \hdashline \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(B)\end{bmatrix}. \tag{104}$$

Для перемножения блочных матриц в (104) применим формулу обращения блочной матрицы (она является частным случаем формулы Фробениуса [27, с. 302]):

$$\mathbf{A}^{-1}=\left[\begin{array}{c:c}\mathbf{B} & \mathbf{c}\\ \hdashline \mathbf{d}^{\mathrm{T}} & e\end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{c:c}\mathbf{B}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}\mathbf{c}\,f^{-1}\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1} & -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{c}\,f^{-1}\\ \hdashline -f^{-1}\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1} & f^{-1}\end{array}\right],\;\; f=e-\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{c}\,. \tag{105}$$

В данном случае выполняется

$$\mathbf{B}=\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S),\;\;\mathbf{c}=\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R(A), \tag{106}$$

$$\mathbf{d}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S),\;\; e=\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R(A)\,, \tag{107}$$

$$f=\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R(A)-\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S))^{-1}\times$$

$$\times\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R(A)=\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\mathbf{M}(A,S)\boldsymbol{\delta}_R(A)\,. \tag{108}$$

Продолжая (104) и учитывая (105)–(107), получаем

$$\mathbf{P}(B,A,S)-\mathbf{P}(B,A,\overset{\mathrm{o}}{S})=[\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(B,S)\,\vdots\,\boldsymbol{\delta}_R(B)]\times$$

$$\times\left[\begin{array}{c:c}\mathbf{B}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R(A)f^{-1}\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S)\mathbf{B}^{-1} & -\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R(A)f^{-1}\\ \hdashline -f^{-1}\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S)\mathbf{B}^{-1} & f^{-1}\end{array}\right]\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(B,S)\\ \hdashline \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(B)\end{bmatrix}=-f^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(B,S)\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R(A)\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\times$$

$$\times\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S)\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(B,S)+f^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(B,S)\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R(A)\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(B)+$$

$$+f^{-1}\boldsymbol{\delta}_R(B)\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S)\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(B,S)-f^{-1}\boldsymbol{\delta}_R(B)\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(B). \tag{109}$$

Учитывая (109), для (103) получаем

$$[\mathbf{T}_P(S)-\mathbf{T}_P(\overset{\circ}{S})]_{kq}=\mathrm{tr}\,[\,\mathbf{P}(B,A,S)-\mathbf{P}(B,\overset{\circ}{A},S)]_{kq}=-f^{-1}g(\mathbf{m})-f^{-1}\mathbf{m}^{\mathrm{T}}(A)\,\mathbf{m}(A)+$$

$$+f^{-1}\mathbf{g}^{\mathrm{T}}(R,k)[\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\,\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}]_{kh}\,\mathbf{m}(A)+f^{-1}\mathbf{m}^{\mathrm{T}}(A)[\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S)]_{kk}\times$$

$$\times[\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\,\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}]_{kh}\,\mathbf{m}(A)+f^{-1}\mathbf{m}^{\mathrm{T}}(A)[\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S)\,\mathbf{B}^{-1}]_{hq}\,\mathbf{g}(R,q)+$$

$$+f^{-1}\mathbf{m}^{\mathrm{T}}(A)[\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S)\,\mathbf{B}^{-1}]_{hq}[\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)]_{qq}\,\mathbf{m}(A)-f^{-1}\mathbf{m}^{\mathrm{T}}(A)\times$$

$$\times[\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S)\,\mathbf{B}^{-1}]_{hq}\,\mathbf{G}(R,S,q,k)[\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\,\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}]_{kh}\,\mathbf{m}(A)-f^{-1}\mathbf{m}^{\mathrm{T}}(A)\times$$

$$\times[\,\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S)\,\mathbf{B}^{-1}]_{hq}[\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)]_{qq}\,[\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S)]_{kk}\,[\,\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\,\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}]_{kh}\,\mathbf{m}(A)=$$

$$=-f^{-1}\mathbf{m}^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(A,S)]_{hq}[\,\mathbf{M}(A,S)]_{kh}\,\mathbf{m}-f^{-1}f_{kq}(\mathbf{m}). \qquad (110)$$

Здесь $\mathbf{M}(A,S)$ — $(N(A)\times N(A))$-матрица, состоящая из $(h\times h)$ блоков, введена в (94), (95); а для $f_{kq}(\mathbf{m})$ — (k,q)-го элемента (h,h)-матрицы $\mathbf{F}(\mathbf{m})$, выполняется

$$f_{kq}(\mathbf{m})=\mathbf{F}_{kq}(\mathbf{m})=g(\mathbf{m})-\mathbf{g}^{\mathrm{T}}(R,k)[\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\,\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}]_{kh}\,\mathbf{m}(A)-$$

$$-\mathbf{m}^{\mathrm{T}}(A)[\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S)\,\mathbf{B}^{-1}]_{hq}\,\mathbf{g}(R,q)+\mathbf{m}^{\mathrm{T}}(A)[\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S)\,\mathbf{B}^{-1}]_{hq}\,\mathbf{G}(R,q,k)\times$$

$$\times[\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\,\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}]_{kh}\,\mathbf{m}(A)=\mathrm{g}(\mathbf{m})-\mathbf{g}^{\mathrm{T}}(R,k)[\mathbf{C}(A,S)]_{kh}\,\mathbf{m}(A)-\mathbf{m}^{\mathrm{T}}(A)\times$$

$$\times[\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(A,S)]_{hq}\,\mathbf{g}(R,q)+\mathbf{m}^{\mathrm{T}}(A)[\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(A,S)]_{hq}\,\mathbf{G}(R,q,k)[\mathbf{C}(A,S)]_{kh}\,\mathbf{m}(A). \qquad (111)$$

Из (110), (111) следует (во второй строке (112) буквы A и S опущены)

$$\mathbf{T}_P(S)-\mathbf{T}_P(\overset{\circ}{S})=\mathrm{tr}_{\otimes}[\mathbf{P}(B,A,S)]-\mathrm{tr}_{\otimes}[\mathbf{P}(B,A,\overset{\circ}{S})]=$$

$$=-f^{-1}\left[\begin{array}{c:c:c:c}
\mathbf{m}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{h1}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{1h}\,\mathbf{m} & \mathbf{m}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{h1}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{2h}\,\mathbf{m} & \cdots & \mathbf{m}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{h1}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{hh}\,\mathbf{m}\\ \hdashline
\mathbf{m}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{h2}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{1h}\,\mathbf{m} & \mathbf{m}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{h2}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{2h}\,\mathbf{m} & \cdots & \mathbf{m}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{h2}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{hh}\,\mathbf{m}\\ \hdashline
\vdots & \vdots & \ddots & \\ \hdashline
\mathbf{m}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{hh}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{1h}\,\mathbf{m} & \mathbf{m}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{hh}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{2h}\,\mathbf{m} & \cdots & \mathbf{m}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{hh}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{hh}\,\mathbf{m}
\end{array}\right]-f^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{m})=$$

$$=-f^{-1}\cdot\overline{\overline{\mathbf{m}}}^{\mathrm{T}}(A)\,\mathbf{M}_{h\bullet}(A,S)[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(A,S)]_{\bullet h}\,\overline{\overline{\mathbf{m}}}(A)-f^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{m}), \qquad (112)$$

$$\overline{\overline{\mathbf{m}}}(A)=\left[\begin{array}{c:c:c:c}
\mathbf{m}(A) & \mathbf{0}_n & \cdots & \mathbf{0}_n\\ \hdashline
\mathbf{0}_n & \mathbf{m}(A) & \cdots & \mathbf{0}_n\\ \hdashline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \hdashline
\mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \cdots & \mathbf{m}(A)
\end{array}\right],\mathbf{M}_{h\bullet}(A,S)=\left[\begin{array}{c}
\mathbf{M}_{h1}(A,S)\\ \hdashline
\mathbf{M}_{h2}(A,S)\\ \hdashline
\vdots\\ \hdashline
\mathbf{M}_{hh}(A,S)
\end{array}\right], \qquad (113)$$

$$[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(A,S)]_{\bullet h}=[\,[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(A,S)]_{1h}\,\vdots\,[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(A,S)]_{2h}\,\vdots\cdots\vdots\,[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(A,S)]_{hh}]. \qquad (114)$$

Вычислим определитель в знаменателе (102), выполнив подстановку из (112):

$$\mathbf{T}_P(\overset{\circ}{S})=\mathbf{T}_P(S)+f^{-1}\overline{\overline{\mathbf{m}}}^{\mathrm{T}}(A)[\,\mathbf{M}_{h\bullet}(A,S)][\,\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(A,S)\,]_{\bullet h}\,\overline{\overline{\mathbf{m}}}(A)+f^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{m}). \qquad (115)$$

Применяя формулу $\det[\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}]=\det[\mathbf{A}]\cdot\det[\mathbf{I}_h+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}]$ из [27, с. 302], получаем

$$\det[\,n(B)(\mathbf{\Sigma}_\varepsilon+\mathbf{\Sigma}_\psi+\mathbf{\Sigma}_\zeta)+\mathbf{T}_P(\overset{\mathrm{o}}{S})]=\det[\,n(B)(\mathbf{\Sigma}_\varepsilon+\mathbf{\Sigma}_\psi+\mathbf{\Sigma}_\zeta)+\mathbf{T}_P(S)+$$

$$+f^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{m})+f^{-1}\overline{\overline{\mathbf{m}}}^{\,\mathrm{T}}(A)\,\mathbf{M}_{h\bullet}(A,S)[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(A,S)]_{\bullet h}\overline{\overline{\mathbf{m}}}(A)]=\det[\,n(B)\times$$

$$\times(\mathbf{\Sigma}_\varepsilon+\mathbf{\Sigma}_\psi+\mathbf{\Sigma}_\zeta)+\mathbf{T}_P(S)+f^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{m})]\times\det[\mathbf{I}_h+f^{-1}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(A,S)]_{\bullet h}\overline{\overline{\mathbf{m}}}(A)\times$$

$$\times[n(B)(\mathbf{\Sigma}_\varepsilon+\mathbf{\Sigma}_\psi+\mathbf{\Sigma}_\zeta)+\mathbf{T}_P(S)+f^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{m})]^{-1}\overline{\overline{\mathbf{m}}}^{\,\mathrm{T}}(A)\mathbf{M}_{h\bullet}(A,S)]. \tag{116}$$

Подставляя (116) в (102), получаем

$$\Delta_1(S,\overset{\mathrm{o}}{S})=\frac{1}{h}\ln(1+[[\,n(B)(\mathbf{\Sigma}_\varepsilon+\mathbf{\Sigma}_\psi+\mathbf{\Sigma}_\zeta)+\mathbf{T}_P(S)+f^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{m})]^{-1}]_{hh}\times$$

$$\times(\overset{\mathrm{o}}{\theta}_{\overset{\mathrm{o}}{m}(h)}(h))^2(\mathbf{m}^{\mathrm{T}}(A)\,\mathbf{H}_{hh}(A,S)\,\mathbf{m}(A)+\rho_1(\mathbf{m})))\;/\;(\det[\mathbf{I}_h+f^{-1}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(A,S)]_{\bullet h}\times$$

$$\times\overline{\overline{\mathbf{m}}}(A)\,[\,n(B)(\mathbf{\Sigma}_\varepsilon+\mathbf{\Sigma}_\psi+\mathbf{\Sigma}_\zeta)+\mathbf{T}_P(S)+f^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{m})]^{-1}\overline{\overline{\mathbf{m}}}^{\,\mathrm{T}}(A)\mathbf{M}_{h\bullet}(A,S)]). \tag{117}$$

Если $\Delta_1(S,\overset{\mathrm{o}}{S})>0$, то структура $\overset{\mathrm{o}}{S}$ лучше S; если $\Delta_1(S,\overset{\mathrm{o}}{S})<0$, то структура S лучше $\overset{\mathrm{o}}{S}$; если $\Delta_1(S,\overset{\mathrm{o}}{S})=0$, то структура S лучше $\overset{\mathrm{o}}{S}$ по дополнительному принципу простоты.

Выполнение $\Delta_1(S,\overset{\mathrm{o}}{S})\le 0$ является условием так называемой редукции (упрощения) оптимальной по структуре модели. Из (117) для условия редукции получаем

$$(1+[[\,n(B)(\mathbf{\Sigma}_\varepsilon+\mathbf{\Sigma}_\psi+\mathbf{\Sigma}_\zeta)+\mathbf{T}_P(S)+f^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{m})]^{-1}]_{hh}(\overset{\mathrm{o}}{\theta}_{\overset{\mathrm{o}}{m}(h)}(h))^2\times$$

$$\times(\mathbf{m}^{\mathrm{T}}(A)\,\mathbf{H}_{hh}(A,S)\,\mathbf{m}(A)+\rho_1(\mathbf{m})))\;/\;(\det[\mathbf{I}_h+f^{-1}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(A,S)]_{\bullet h}\overline{\overline{\mathbf{m}}}(A)\times$$

$$\times[n(B)(\mathbf{\Sigma}_\varepsilon+\mathbf{\Sigma}_\psi+\mathbf{\Sigma}_\zeta)+\mathbf{T}_P(S)+f^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{m})]^{-1}]\times\overline{\overline{\mathbf{m}}}^{\,\mathrm{T}}(A)\mathbf{M}_{h\bullet}(A,S)])\le 1, \tag{118}$$

где $\mathbf{T}_P(S)$ — $(h\times h)$-матрица, введена в (69), (71); $\mathbf{M}(A,S)$ — $(N\times N)$-матрица, введена в (95); $\rho_1(\mathbf{m})$ и f — скалярные величины, определены в (96) и (108) соответственно; $\mathbf{F}(A,S)$ — $(h\times h)$-матрица, введена в (111).

К сожалению, получить условие редукции (118) в простом виде удается только при дополнительных предположениях.

Оценивание степени влияния скаляра $\rho_1(\mathbf{m})$ и матрицы $f^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{m})$ на условие редукции. Оценивание такого влияния в условиях схемы квазиповторных наблюдений проведено на основе метода статистических испытаний. Исследование проводилось в четыре этапа. На первом этапе проведено 200 испытаний в соответствии с экспериментом, описанным в работе [22]. На втором этапе по графикам временных рядов трех выходных переменных из 200 испытаний визуально отобрано 50 испытаний, которые попали в класс с условным названием «затухающие колебания». На третьем этапе рассмотрены все возможные пары испытаний, в которых первое испытание из пары назначалось обучающей выборкой A, а второе испытание — проверочной выборкой B. Всего рассмотрено $50 \times 50 - 50 = 2450$ пар. Для каждой пары рассчитаны все величины, входящие в формулы (21)–(115), в том числе величины, входящие в условие редукции (118): $\rho_0(\mathbf{m})$, $\rho_1(\mathbf{m})$, $\mathbf{F_0} = n(B)(\mathbf{\Sigma}_\varepsilon + \mathbf{\Sigma}_\psi + \mathbf{\Sigma}_\zeta) + \mathbf{T}_P(S)$, $f^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{m})$. На четвертом этапе по результатам 2450 испытаний построены эмпирические гистограммы распределений скаляров $\rho_0(\mathbf{m})$ и $\rho_1(\mathbf{m})$, определителей матриц $\mathbf{F_0}$ и $f^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{m})$, (h, h)-элементов матриц $[\mathbf{F_0}]^{-1}$, $[f^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{m})]^{-1}$ и $[\mathbf{F_0} + f^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{m})]^{-1}$; рассчитаны эмпирические средние и среднеквадратичные отклонения исследуемых величин (приведены в таблице).

Таблица

Величина	Среднее	Среднеквадратичное отклонение
$\rho_0(\mathbf{m})$	608,76	80,31
$\rho_1(\mathbf{m})$	27,00	114,98
$\rho_0(\mathbf{m})+\rho_1(\mathbf{m})$	636,76	82,13
$\det[\mathbf{F_0}]$	4,4293e+08	2,4432e+07
$\det[f^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{m})]$	-1,3711e-01	2,4478e+00
$\det[\mathbf{F_0} + f^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{m})]$	4,4613e+08	1,2406e+08
$([\mathbf{F_0}]^{-1})_{hh}$	1,3135e-03	3.8114e-05
$([\mathbf{F_0} + f^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{m})]^{-1})_{hh}$	1,3148e-03	3.9754e-05

Из анализа гистограмм и статистических характеристик следует:

1) матрицей $f^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{m})$ в условии редукции (118) можно пренебречь;

2) наличие скаляра $\rho_1(\mathbf{m})$ в условии (118) вносит смещение в сторону увеличения (при отрицательном $\rho_1(\mathbf{m})$) или в сторону уменьшения (при положительном $\rho_1(\mathbf{m})$) критического значения коэффициента $\overset{\circ\circ}{\theta}_{m(h)}(h)$, при котором наступает редукция. Но принципиальная возможность редукции (упрощения) оптимальной по сложности модели при наличии $\rho_1(\mathbf{m})$ сохраняется.

Косвенное подтверждение истинности условия редукции. Установим, какой вид принимает условие (118), если предположить, что в законе функционирования объекта (1) выполняется $p = 1$, т.е. порядок авторегрессии равен единице. В этом случае для (k, q)-го блока матрицы $\mathbf{\Psi}_1$ в соответствии с (35) выполняется (величина $\psi_{kq}(0)$ введена в (36))

$$\mathbf{\Psi}_1(k, q) = \psi_{kq}(0)\,\mathbf{I}_n, \quad k, q = 1, 2, ..., h. \tag{119}$$

Для блочной матрицы $\mathbf{\Psi}_1$ выполняется (матрица $\mathbf{\Sigma}_\psi$ введена в (70))

$$\mathbf{\Psi}_1 = \mathbf{\Sigma}_\psi \otimes \mathbf{I}_n. \tag{120}$$

Для ковариационной матрицы $\mathbf{\Sigma}_\xi$, состоящей из $(h \times h)$ блоков, выполняется (см. (34))

$$\mathbf{\Sigma}_\xi = \mathbf{\Sigma}_\varepsilon \otimes \mathbf{I}_n + \mathbf{\Sigma}_\psi \otimes \mathbf{I}_n + \mathbf{\Sigma}_\zeta \otimes \mathbf{I}_n. \tag{121}$$

ISSN 0572-2691

С учетом (121) для $(h \times h)$-матрицы $\mathbf{T}_P(S)$ в (71) выполняется

$$\mathbf{T}_P(S) = \begin{bmatrix} \sigma_\xi(1,1)\,m(1) & \sigma_\xi(1,2)\,m(1) & \cdots & \sigma_\xi(1,h)\,m(1) \\ \sigma_\xi(2,1)\,m(2) & \sigma_\xi(2,2)\,m(2) & \cdots & \sigma_\xi(2,h)\,m(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_\xi(h,1)\,m(h) & \sigma_\xi(h,2)\,m(h) & \cdots & \sigma_\xi(h,h)\,m(h) \end{bmatrix} \quad (122)$$

или

$$\mathbf{T}_P(S) = \operatorname{diag}\{m(1), m(2), ..., m(h)\} \times \mathbf{\Sigma}_\xi, \quad (123)$$

а матрица $\mathbf{T}_P(\overset{o}{S})$ получается из $\mathbf{T}_P(S)$ заменой $m(k)$ на $\overset{o}{m}(k)$, $k = 1, 2, ..., h$.

С учетом условия $p = 1$ для знаменателя (118) выполняется

$$\det[\mathbf{I}_h + f^{-1}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(A,S)]_{\bullet h}\overline{\overline{\mathbf{m}}}(A)[n(B)\mathbf{\Sigma}_\xi + \mathbf{T}_P(S) + f^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{m})]^{-1}\overline{\overline{\mathbf{m}}}^{\mathrm{T}}(A)\times$$

$$\times \mathbf{M}_{h\bullet}(A,S)] = \frac{\det[n(B)\mathbf{\Sigma}_\xi + \mathbf{T}_P(\overset{o}{S})]}{\det[n(B)\mathbf{\Sigma}_\xi + \mathbf{T}_P(S) + f^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{m})]}. \quad (124)$$

Подставляя (124) в (118), получаем

$$(\det[n(B)\mathbf{\Sigma}_\xi + \mathbf{T}_P(S) + f^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{m})] \times \{1 + [[n(B)\mathbf{\Sigma}_\xi + \mathbf{T}_P(S) + f^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{m})]^{-1}]_{hh} \times$$

$$\times(\overset{o}{\theta}_{\overset{o}{m}(h)}(h))^2\,(\mathbf{m}^{\mathrm{T}}(A)\,\mathbf{H}_{hh}(A,S)\,\mathbf{m}(A) + \rho_1(\mathbf{m}))\}) \,/\, (\det[n(B)\cdot\mathbf{\Sigma}_\xi + \mathbf{T}_P(\overset{o}{S})]) \le 1. \quad (125)$$

Проводя вычисления аналогично [25], учитывая соотношения $m(k) = \overset{o}{m}(k)$, $k = 1, 2, ..., h-1$, и $m(h) = \overset{o}{m}(h) - 1$, которые следуют из (77), и, пренебрегая влиянием матрицы $f^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{m})$, получаем

$$(\det[\mathbf{\Sigma}_\xi]\prod_{k=1}^{h}(n(B) + m(k))\{1 + (n(B) + m(h))^{-1}[\mathbf{\Sigma}_\xi^{-1}]_{hh}(\overset{o}{\theta}_{\overset{o}{m}(h)}(h))^2 \times$$

$$\times(\mathbf{m}^{\mathrm{T}}(A)\,\mathbf{H}_{hh}(A,S)\,\mathbf{m}(A) + \rho_1(\mathbf{m}))\}) \,/\, (\det[\mathbf{\Sigma}_\xi]\prod_{k=1}^{h}(n(B) + \overset{o}{m}(k))) \le 1 \quad (126)$$

или

$$(\overset{o}{\theta}_{\overset{o}{m}(h)}(h))^2(\mathbf{m}^{\mathrm{T}}(A)\,\mathbf{H}_{hh}(A,S)\,\mathbf{m}(A) + \rho_1(\mathbf{m})) \le ([\mathbf{\Sigma}_\xi^{-1}]_{hh})^{-1}. \quad (127)$$

Отличие условия (127) от результата (95) работы [23] состоит только в наличии члена $\rho_1(\mathbf{m})$, что косвенно подтверждает истинность условия редукции (118).

Редукция модели, оптимальной по составу регрессоров, означает, что при выполнении соотношения между параметрами модели (127) следует исключить регрессор $\mathbf{m}$ из модели для h-й переменной. Редуцированная модель будет иметь меньшую ошибку прогнозирования выходных переменных на новых выборках наблюдений по сравнению с моделью, построенной на истинной структуре.

Из (127) следует, что возможность редукции модели может быть обусловлена пятью причинами:

— малостью нормы коэффициента $\overset{o}{\theta}_{\overset{o}{m}(h)}(h)$;

— малостью нормы вектора наблюдений регрессора $\mathbf{m}(A)$;

— малым объемом выборок наблюдений $n(B)$;

— высокой степенью линейной зависимости регрессора $\mathbf{m}(A)$ с другими регрессорами в матрице $\mathbf{R}(A,S,h) = \mathbf{X}(A)\,\mathbf{S}(h)$;

— большим значением величины $([\mathbf{\Sigma}_\xi^{-1}]_{hh})^{-1}$.

Случай избыточного регрессора. Рассмотрим случай, когда в текущую структуру включен излишний регрессор. Предположим для простоты, что это регрессор для переменной с номером h является максимально удаленным предыдущим значением этой переменной (определяется заданным параметром p в (1)) и не участвует в формировании ее текущего значения, т.е. между структурными матрицами выполняется соотношение

$$\mathbf{S}(h, h) = [\overset{o}{\mathbf{S}}(h, h) \,\vdots\, \mathbf{s}], \tag{128}$$

где $\overset{o}{\mathbf{S}}(h, h)$ — структурная $(p \times \overset{o}{m}(h, h))$-матрица истинной модели (авторегрессионного уравнения) для переменной с номером h; $\mathbf{S}(h, h)$ — структурная $(p \times (m(h, h) + 1))$-матрица текущей модели для переменной с номером h; $\mathbf{s}$ — $(p \times 1)$-вектор, для которого выполняется

$$\mathbf{s} = (0, 0, ..., 1)^{\mathrm{T}}. \tag{129}$$

Другими словами, в модели функционирования объекта (4) для h-й переменной в формировании $\overset{*}{x}_i(h)$ не участвует величина $\overset{*}{x}_{i-p}(h)$, но в текущую модель она включена.

Сначала вычислим математическое ожидание критерия регулярности. В рассматриваемом случае избыточного регрессора $(h \times h)$-матрица $\mathbf{\Delta}(B \mid A, S)$ в (68) является нулевой матрицей. Для доказательства этого факта достаточно показать, что вектор смещения $\boldsymbol{\delta}(B \mid A, S)$ для случая избыточного регрессора нулевой. Действительно, различие в структурных матрицах (128), (129) приводит к выполнению:

$$\mathbf{R}(S, k) = \mathbf{R}(\overset{o}{S}, k), \;\; k = 1, 2, ..., h-1, \tag{130}$$

$$\mathbf{R}(S, h, q) = \mathbf{R}(\overset{o}{S}, h, q), \;\; q = 1, 2, ..., h-1, \tag{131}$$

$$\mathbf{R}(S, h, h) = \mathbf{X}\,\mathbf{S}(h, h) = \mathbf{X}[\overset{o}{\mathbf{S}}(h, h) \,\vdots\, \mathbf{s}] = [\mathbf{X}\overset{o}{\mathbf{S}}(h, h) \,\vdots\, \mathbf{X}\mathbf{s}] = [\mathbf{R}(\overset{o}{S}, h, h) \,\vdots\, \mathbf{r}], \tag{132}$$

где $\mathbf{r}$ — $(n \times 1)$-вектор наблюдений избыточного регрессора.

Для матриц $\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)$ и $\underline{\underline{\mathbf{R}}}(\overset{o}{S})$ с учетом (130)–(132) получаем

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S) = [\underline{\underline{\mathbf{R}}}(\overset{o}{S}) \,\vdots\, \boldsymbol{\delta}_R], \;\; \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}} = (\mathbf{0}_n^{\mathrm{T}}, \mathbf{0}_n^{\mathrm{T}}, ..., \mathbf{r}^{\mathrm{T}}). \tag{133}$$

Для вектора смещения $\boldsymbol{\delta}(B \mid A, S)$ в случае избыточного регрессора выполняется

$$\boldsymbol{\delta}(B \mid A, S) = \overset{o}{\mathbf{y}}(B) - \underline{\underline{\mathbf{R}}}(B, S)\mathbf{C}(A, S)\overset{o}{\mathbf{y}}(A) = \underline{\underline{\mathbf{R}}}(B, \overset{o}{S})\overset{o}{\boldsymbol{\theta}} - \underline{\underline{\mathbf{R}}}(B, S)\mathbf{C}(A, S)\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, \overset{o}{S})\overset{o}{\boldsymbol{\theta}} =$$

$$= \underline{\underline{\mathbf{R}}}(B, \overset{o}{S})\overset{o}{\boldsymbol{\theta}} - [\underline{\underline{\mathbf{R}}}(B, \overset{o}{S}) \,\vdots\, \boldsymbol{\delta}_R(B)]\left(\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, \overset{o}{S}) \\ \hdashline \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A) \end{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}[\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, \overset{o}{S}) \,\vdots\, \boldsymbol{\delta}_R(A)]\right)^{-1} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, \overset{o}{S}) \\ \hdashline \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\, \underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, \overset{o}{S})\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}. \tag{134}$$

Далее, проведя вычисления аналогично (80)–(101), получаем $\Delta_{hh} = 0$.

Для случая избыточного регрессора аналогично результатам (107)–(111) получаем

$$[\mathbf{T}_P(S) - \mathbf{T}_P(\overset{o}{S})]_{kq} = \mathrm{tr}[\mathbf{P}(B, A, S) - \mathbf{P}(B, A, \overset{o}{S})]_{kq} =$$

$$= f^{-1}(\overset{o}{S})\mathbf{r}^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(A, \overset{o}{S})]_{hq}[\mathbf{M}(A, \overset{o}{S})]_{kh}\mathbf{r} + f^{-1}(\overset{o}{S})f_{kq}(\mathbf{r}), \tag{135}$$

ISSN 0572-2691

$$f(\overset{o}{S}) = \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\boldsymbol{\delta}_R(A) - \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(\overset{o}{S})(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(\overset{o}{S})\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(\overset{o}{S}))^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(\overset{o}{S})\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\boldsymbol{\delta}_R(A) =$$

$$= \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}(A)\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\mathbf{M}(A, \overset{o}{S})\boldsymbol{\delta}_R(A) \qquad (136)$$

— положительная величина, поскольку матрицы $\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}$ и $\mathbf{M}(A, \overset{o}{S})$ положительно определены; $\mathbf{M}(A, \overset{o}{S})$ — $(N \times N)$-матрица, состоящая из $(h \times h)$ блоков, аналогична (94), (95); $\mathbf{r}$ — $(n \times 1)$-вектор и $\boldsymbol{\delta}_R(A)$ — $(N \times 1)$-вектор, определенные в (129)–(133); для $f_{kq}(\mathbf{r})$ — (k, q)-го элемента (h, h)-матрицы $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, выполняется

$$f_{kq}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_{kq}(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}) - \mathbf{g}^{\mathrm{T}}(R, k)[\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, \overset{o}{S})\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}]_{kh}\,\mathbf{r}(A) - \mathbf{r}^{\mathrm{T}}(A)\times$$
$$\times[\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, \overset{o}{S})\mathbf{B}^{-1}]_{hq}\,\mathbf{g}(R, q) + \mathbf{r}^{\mathrm{T}}(A)[\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A, \overset{o}{S})\mathbf{B}^{-1}]_{hq}\,\mathbf{G}(R, q, k)\times$$
$$\times[\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A, \overset{o}{S})\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}]_{kh}\,\mathbf{r}(A). \qquad (137)$$

Из (135) следует (во второй строке (138) буквы A и $\overset{o}{S}$ опущены)

$$\mathbf{T}_P(S) - \mathbf{T}_P(\overset{o}{S}) = \mathrm{tr}_\otimes[\mathbf{P}(B, A, S)] - \mathrm{tr}_\otimes[\mathbf{P}(B, A, \overset{o}{S})] =$$

$$= f^{-1}(\overset{o}{S})\left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{h1}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{1h}\,\mathbf{r} & \mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{h1}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{2h}\,\mathbf{r} & \cdots & \mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{h1}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{hh}\,\mathbf{r} \\ \hline \mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{h2}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{1h}\,\mathbf{r} & \mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{h2}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{2h}\,\mathbf{r} & \cdots & \mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{h2}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{hh}\,\mathbf{r} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \\ \hline \mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{hh}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{1h}\,\mathbf{r} & \mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{hh}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{2h}\,\mathbf{r} & \cdots & \mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{hh}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{hh}\,\mathbf{r} \end{array}\right] +$$

$$+ f^{-1}(\overset{o}{S})\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f^{-1}(\overset{o}{S})\,\overline{\overline{\mathbf{r}}}^{\mathrm{T}}(A)\,\mathbf{M}_{h\bullet}(A, \overset{o}{S})[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(A, \overset{o}{S})]_{\bullet h}\,\overline{\overline{\mathbf{r}}}(A) + f^{-1}(\overset{o}{S})\,\mathbf{F}(\mathbf{r}), \qquad (138)$$

где обозначения $\overline{\overline{\mathbf{r}}}(A)$, $\mathbf{M}_{h\bullet}(A, \overset{o}{S})$, $[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(A, \overset{o}{S})]_{\bullet h}$ аналогичны (113), (114).

Теперь рассмотрим разность

$$\Delta_2(S, \overset{o}{S}) = E\{ARS(S)\} - E\{ARS(\overset{o}{S})\} =$$

$$= \frac{1}{h}\ln\left(\frac{\det[\boldsymbol{\Omega}_2(B \mid A, S)]}{\det[\boldsymbol{\Omega}(B \mid A, \overset{o}{S})]}\right) = \frac{1}{h}\ln\left(\frac{\det[[n(B)(\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon + \boldsymbol{\Sigma}_\psi + \boldsymbol{\Sigma}_\zeta) + \mathbf{T}_P(S)]]}{\det[n(B)(\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon + \boldsymbol{\Sigma}_\psi + \boldsymbol{\Sigma}_\zeta) + \mathbf{T}_P(\overset{o}{S})]}\right). \qquad (139)$$

Учитывая (138), пренебрегая влиянием $f^{-1}(\overset{o}{S})\,\mathbf{F}(\mathbf{r})$ и применяя формулу для вычисления определителя матрицы $\det[\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}] = \det[\mathbf{A}]\det[\mathbf{I}_h + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}]$ из [27, с. 302], получаем

$$\det[n(B)(\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon + \boldsymbol{\Sigma}_\psi + \boldsymbol{\Sigma}_\zeta) + \mathbf{T}_P(S)] \approx \det[n(B)(\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon + \boldsymbol{\Sigma}_\psi + \boldsymbol{\Sigma}_\zeta) + \mathbf{T}_P(\overset{o}{S})]\det[\mathbf{I}_h +$$
$$+ f^{-1}(\overset{o}{S})[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(A, \overset{o}{S})]_{\bullet h}\,\overline{\overline{\mathbf{m}}}(A)[n(B)(\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon + \boldsymbol{\Sigma}_\psi + \boldsymbol{\Sigma}_\zeta) + \mathbf{T}_P(\overset{o}{S})]^{-1}\,\overline{\overline{\mathbf{m}}}^{\mathrm{T}}(A)\,\mathbf{M}_{h\bullet}(A, \overset{o}{S})]. \qquad (140)$$

Подставляя (140) в (139), имеем

$$\Delta_2(S, \overset{o}{S}) \approx\approx \frac{1}{h}\ln(\det[\mathbf{I}_h + f^{-1}(\overset{o}{S})[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(A, \overset{o}{S})]_{\bullet h}\,\overline{\overline{\mathbf{r}}}(A)[n(B)\times$$
$$\times\cdot(\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon + \boldsymbol{\Sigma}_\psi + \boldsymbol{\Sigma}_\zeta) + \mathbf{T}_P(\overset{o}{S})]^{-1}\,\overline{\overline{\mathbf{r}}}^{\mathrm{T}}(A)\mathbf{M}_{h\bullet}(A, \overset{o}{S})]) > 0. \qquad (141)$$

Матрица $[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(A,\overset{\mathrm{o}}{S})]_{\bullet h}\bar{\bar{\mathbf{r}}}(A)[\,n(B)(\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon}+\boldsymbol{\Sigma}_{\psi}+\boldsymbol{\Sigma}_{\zeta})+\mathbf{T}_{P}(\overset{\mathrm{o}}{S})]^{-1}\bar{\bar{\mathbf{r}}}^{\mathrm{T}}(A)\mathbf{M}_{h\bullet}(A,\overset{\mathrm{o}}{S})]$ положительно определена, а величина $f^{-1}(\overset{\mathrm{o}}{S})$ положительна, поэтому величина (141) положительна.

Из (141) следует, что в случае избыточного регрессора истинная структура $\overset{\mathrm{o}}{S}$ всегда лучше структуры S, а регрессор $\mathbf{r}$ действительно не следует включать в модель.

Заключение

По принципам МГУА построен и исследован критерий структурной идентификации для моделирования в классе систем авторегрессионных уравнений. Получены условия редукции (упрощения) системы авторегрессионных уравнений, оптимальной по составу регрессоров. Разработанный критерий является системным критерием структурной идентификации, при построении которого предполагается совместное оценивание коэффициентов системы авторегрессионных уравнений. В частном случае независимого оценивания коэффициентов в разных авторегрессионных уравнениях предложенный критерий представляет собой сумму критериев регулярности отдельных авторегрессионных уравнений, т.е. является обобщением системного критерия регулярности, традиционно применяемого в МГУА.

О.П. Саричев

МОДЕЛЮВАННЯ В КЛАСІ СИСТЕМ АВТОРЕГРЕСІЙНИХ РІВНЯНЬ В УМОВАХ СТРУКТУРНОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Для моделювання в класі систем авторегресійних рівнянь розроблено системний критерій регулярності методу групового урахування аргументів з розбиттям спостережень на навчальні й перевірні підвибірки. Доведено існування оптимальної множини регресорів. Встановлено умову редукції оптимальної системи регресійних рівнянь, що залежить від параметрів системи авторегресійних рівнянь та обсягів вибірок.

A.P. Sarychev

MODELING IN A CLASS OF AUTOREGRESSION EQUATIONS SYSTEMS IN CONDITIONS OF STRUCTURAL UNCERTAINTY

For modeling in a class of autoregression equations systems the system criterion of regularity of Group Method of Data Handling with subdividing of observations into training and testing subsamples is offered. It is proved, that the optimum set of regressors exists. The condition of a reduction of optimum system of autoregression equations is obtained. This condition depends on parameters of autoregression equations system and the size of samples.

1. *Ивахненко А.Г.* Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем. — Киев: Наук. думка, 1982. — 296 с.
2. *Self-organizing* methods in modelling: GMDH type algorithms / Ed. by S.J. Farlow. — New York; Basel : Marcel Decker Inc., 1984. — 350 p.
3. *Ивахненко А.Г., Степашко В.С.* Помехоустойчивость моделирования. — Киев: Наук. думка, 1985. — 216 с.

4. *Ивахненко А.Г., Мюллер Й.А.* Самоорганизация прогнозирующих моделей. — Киев: Техніка, 1985. — 223 с.
5. *Ивахненко А.Г., Юрачковский Ю.П.* Моделирование сложных систем по экспериментальным данным. — М. : Радио и связь, 1987. — 120 с.
6. *Madala H.R., Ivakhnenko A.G.* Inductive learning algorithms for complex system modeling. — London, Tokyo : CRC Press Inc., 1994. — 370 p.
7. *Muller J.-A., Lemke F.* Self-organizing data mining. Extracting knowledge from data. — Hamburg : Libri, 2000. — 250 p.
8. *Сарычев А.П.* Идентификация состояний структурно-неопределенных систем. — Днепропетровск : Институт технической механики, 2008. — 268 с.
9. *Современные* методы идентификации систем / Под ред. П. Эйкхоффа. — М. : Мир, 1983. — 400 с.
10. *Сильвестров А.Н., Чинаев П.И.* Идентификация и оптимизация автоматических систем. — М. : Энергоатомиздат, 1987. — 199 с.
11. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя. — М. : Наука, 1991. — 432 с.
12. *Green W.H.* Econometric analysis. — New Jersey : Fifth edition, 2002. — 1056 p.
13. *Söderström T., Soverini U., Mahata K.* Perspectives on errors-in-variables estimation for dynamic systems // Signal Processing. — 2002. — **82**, N 8. — P. 1139–1154.
14. *Кунцевич В.М.* О точности построения аппроксимирующих моделей при ограниченных помехах измерений // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 5. — С. 125–133.
15. *Кунцевич В.М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — Киев : Наук. думка, 2006. — 264 с.
16. *Markovsky I., Van Huffel S.* Overview of total least squares methods // Signal Processing. — 2007. — **87**. — P. 2283–2302.
17. *Söderström T.* Errors-in-variables methods in system identification // Automatica. — 2007. — **43 (6)**. — P. 939–958.
18. *Губарев В.Ф., Гуммель А.В., Жуков А.О.* Особенности и взаимосвязь задач идентификации и управления в условиях неопределенности // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2008. —№ 5. — С. 23–38.
19. *Губарев В.Ф., Жуков А.О.* Исследование метода итеративной идентификации многомерных дискретных систем // Там же. — 2010. — № 1. — С. 50–62.
20. *Кременецкий И.А., Сальников Н.Н.* Нестохастический подход к определению размерности и параметров линейных авторегрессионных моделей по результатам измерения входных и выходных переменных // Там же. — 2010. — № 1. — С. 63–75.
21. *Губарев В.Ф., Мельничук С.В.* Идентификация многомерных систем по параметрам установившегося режима // Там же. — 2012. — № 5. — С. 26–42.
22. *Сарычев А.П.* Идентификация параметров систем авторегрессионных уравнений при известных ковариационных матрицах // Там же. — 2012. — № 3. — С. 14–30.
23. *Сарычев А.П.* Исследование методом статистических испытаний итерационной процедуры для идентификации параметров системы авторегрессионных уравнений // Системні технології. — 2014. — Вип. 3 (92). — С. 77–89.
24. *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ. — М. : Мир, 1980. — 456 с.
25. *Сарычев А.П.* Моделирование в классе систем регрессионных уравнений на основе метода группового учета аргументов // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2013. — № 2. — С. 8–24.
26. *Андерсон Т.* Введение в многомерный статистический анализ. — М. : Физматгиз. — 1963. — 500 с.
27. *Ермаков С.М., Жиглявский А.А.* Математическая теория оптимального эксперимента. — М. : Наука, 1987. — 320 с.

Получено 02.12.2013
После доработки 10.11.2014