

УДК 519.216

*Т.А. Алиев, Н.Ф. Мусаева, М.Т. Сулейманова, Б.И. Газызаде*

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ШУМА\*

### Введение

Известно, что решение задач слежения, мониторинга, контроля, диагностики, прогноза, идентификации, управления и т.д., которые являются достаточно трудными сами по себе, существенно усложняются, когда необходимо учитывать влияние помех [1–4]. В этом случае помеха  $\varepsilon(t)$ , которая накладывается на полезный сигнал  $x(t)$  и называется шумом:

$$g(t) = x(t) + \varepsilon(t), \quad (1)$$

существенно искажает результаты и тем самым не обеспечивает адекватность решения.

Причинами и источниками шумов могут быть самые разнообразные факторы. При этом если известна природа возникновения шума и она регулярная, то существует множество методов ее устранения [5–8].

Однако шумы весьма разнообразны как по своему происхождению, так и по физическим свойствам. Поскольку шумы подразделяются на внутренние и внешние, то методы борьбы с ними несколько отличаются. Внутренние шумы появляются в системах приема, передачи и обработки сигналов от влияния различных дестабилизирующих факторов, например от изменения температуры, повышенной влажности, нестабильности источников питания, влияния механических вибраций на гальванические соединения и т.п. [5, 6]. Для борьбы с внутренними шумами используются методы подавления шумов; создаются приемники, нечувствительные к шумам; минимизируется передача шумов через каналы связи и т.д. [5–8].

Внешние шумы возникают при действии наружных помех. Например, источниками внешних помех являются атмосферные помехи в результате грозы, молнии, ветра, всплесков солнечной энергии, пурги или песчаной бури и т.д. [5, 6]. Внешними шумами также являются космические шумы, которые возникают при действии космических объектов и других внеземных источников [3]. Индустриальные помехи, которые тоже относятся к внешним шумам, появляются от действия двигателей, переключателей, генераторов, моторов и другого промышленного и транспортного оборудования, от действия медицинских ус-

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Научного фонда Государственной нефтяной компании Азербайджана SOCAR на 2013–2015 гг. Договор SOCAREF2013.  
© Т.А. АЛИЕВ, Н.Ф. МУСАЕВА, М.Т. СУЛЕЙМАНОВА, Б.И. ГАЗЫЗАДЕ, 2015

тановок и т.д. [5, 6]. В этих случаях, если удастся, пытаются уменьшить уровень действия подобного оборудования или применяют методы фильтрации шумов [5, 6].

Кроме того, для борьбы как с внутренними, так и внешними шумами используется множество методов фильтрации, в результате применения которых выбираются параметры фильтра, позволяющие достигнуть минимального отношения энергии помехи к полезному сигналу [7, 8] и т.д.

Однако среди множества различных шумов существуют и такие, которые возникают от влияния различных дестабилизирующих факторов, таких как дефекты, износы, коррозии, трещины, поломки и другие неисправности оборудования, устройства, конструкций, двигателя, механизма, мотора и т.д. [9]. Для решения этих задач разработаны методы вычисления характеристик помехи зашумленных сигналов [10–12]. В таких случаях помеха оповещает о начале возникновения дефектов или неполадок. Такие случайные помехи, как правило, появляются уже на начальной стадии зарождения дефекта, когда о самом дефекте на практике пока еще ничего неизвестно и его невозможно выявить, например, шумы от наличия на стыке двух металлов загрязнений или водяных паров, шумы от влияния микрокаверн в стенках скважины при каротаже и т.д. [5]. Информация о существовании дефектов поступает гораздо позже, лишь при достижении ими явно выраженной формы, когда требуется соответствующий ремонт. Поэтому если вовремя обнаружить подобные шумы и вычислить их характеристики, то они могут стать информативными, так как позволят выяснить природу возникновения дефектов на ранней стадии и таким образом предотвратить возможные поломки, отказы, аварии и т.д. В этом случае информация о помехах представляет собой полезную информацию о возникшей аномальной ситуации, а сама помеха рассматривается как носитель этой информации.

При этом известно, что шумы носят случайный характер и представляют собой более высокочастотную по сравнению с полезным сигналом случайную функцию со случайной амплитудой и фазой. Кроме того, традиционно предполагают, что помеха является белым шумом и описывается нормальным законом распределения с нулевым математическим ожиданием [5–7].

Однако только этой информации недостаточно, чтобы решать задачи слежения, мониторинга, контроля, диагностики, прогноза, идентификации, управления и т.д., так как такие основные характеристики случайной помехи, как функция плотности распределения, ее максимальное значение и точки перегиба, остаются неизвестными. В то же время именно эти характеристики содержат достаточный объем информации о свойствах помехи и являются исчерпывающими для решения перечисленных задач [9].

Для вычисления перечисленных характеристик в теории анализа случайных сигналов существуют соответствующие формулы. Однако для их практического применения необходимо знать дискретные значения аддитивной случайной помехи  $\varepsilon(t)$ , которую невозможно выделить из зашумленного сигнала  $g(t)$ .

В то же время выделение полезных составляющих из зашумленных зарегистрированных сигналов или определение характеристик шумов и помех для извлечения из них полезной информации — одна из основных задач первичной обработки сигналов [4, 8]. Поэтому в рассматриваемой работе предлагается технология определения по дискретным наблюдениям, представляющим аддитивную смесь ненаблюдаемых полезного сигнала и нормально распределенной случайной помехи  $\varepsilon(t)$  с нулевым математическим ожиданием, функции плотности распределения помехи и вытекающих из нее характеристик.

## 1. Постановка задачи

Известно, что в системах слежения, мониторинга, контроля, диагностики, прогноза, управления, идентификации и т.д. сигналы  $\varepsilon(t)$ , поступающие от датчиков, состоят из суммы основного сигнала  $x(t)$  и мешающих сигналов  $\varepsilon(t)$ , т.е. шумов и помех различной природы, т.е. их можно представить в виде (1).

При этом, если полезный сигнала  $x(t)$  и помеха  $\varepsilon(t)$  не коррелированы между собой, то функция плотности распределения  $f(g) = f(x, \varepsilon)$  зашумленного сигнала  $g(t)$  согласно композиции законов распределения представляется в виде [5, 6]:

$$f(g) = f(x, \varepsilon) = f(x) \cdot f(\varepsilon),$$

где  $f(x)$ ,  $f(\varepsilon)$  — функции плотности распределения соответственно полезного сигнала  $x(t)$  и помехи  $\varepsilon(t)$ .

Если априори о законе распределения  $f(g)$  зашумленного сигнала  $g(t)$  ничего неизвестно, то его всегда можно определить на основе критерия согласия о мере согласованности теоретического и статистического распределения [13]. Но при этом практически не удастся отделить функцию плотности распределения  $f(x)$  полезного сигнала  $x(t)$  от функции плотности распределения  $f(\varepsilon)$  помехи  $\varepsilon(t)$ . В то же время по виду и динамике изменения функции плотности распределения  $f(\varepsilon)$  помехи  $\varepsilon(t)$  можно судить об изменениях, происходящих в техническом состоянии исследуемого объекта, т.е. извлечь необходимую полезную информацию.

В системах слежения, мониторинга, контроля, диагностики, прогноза, управления, идентификации и т.д. на начальной стадии возникновения дефектов, неисправностей, неполадок и т.д. помехи подчинены нормальному закону распределения с нулевым средним, т.е. являются гауссовыми процессами. Это объясняется тем, что согласно теореме Ляпунова распределение суммы независимых случайных величин (при некоторых достаточно широких условиях) сходится к нормальному, независимо от характера распределения слагаемых [13]. У таких помех вероятность того, что амплитуда выброса превысит значение утроенной величины среднего квадратического значения, мала. Гауссов шум возникает при суммировании независимых белых шумов и часто встречается в практических задачах. Плотность распределения гауссова процесса определяется по выражению [13]

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma(\varepsilon)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\varepsilon - m_\varepsilon)^2}{2\sigma^2(\varepsilon)}}, \quad (2)$$

где  $\sigma(\varepsilon)$  — среднее квадратическое отклонение помехи,  $m_\varepsilon$  — математическое ожидание помехи.

Однако со временем при увеличении степени неисправности сначала меняется форма нормальной кривой распределения, а затем по мере приобретения дефектом явно выраженной формы меняется и сам закон распределения, отличающийся от нормального. Поэтому возникает проблема определения функции плотности нормального распределения  $f(\varepsilon)$  помехи  $\varepsilon(t)$ . Это позволит выявить динамику изменения формы нормальной кривой  $f(\varepsilon)$  помехи  $\varepsilon(t)$  во времени, определить максимум и координаты точек перегиба функции плотности нормального распределения  $f(\varepsilon)$  помехи  $\varepsilon(t)$ .

Если составить матрицу информативных признаков, элементами которой являются перечисленные характеристики, по комбинациям их значений можно определить не только начальный период зарождения дефекта, но и моменты, когда необходимо провести профилактические работы, текущий или капитальный ремонт. Поэтому ниже предлагается технология определения функции плотности нормального распределения  $f(\varepsilon)$  помехи  $\varepsilon(t)$  зашумленного сигнала  $g(t)$ .

## 2. Технология вычисления параметров нормального распределения шума зашумленного сигнала

Известно, что нормальное распределение  $f(\varepsilon)$  помехи  $\varepsilon(t)$  зашумленного сигнала  $g(t)$  характеризуется двумя параметрами: математическим ожиданием  $m_\varepsilon$  и средним квадратическим отклонением  $\sigma(\varepsilon) = \sqrt{D(\varepsilon)}$  (или корнем квадратным из момента второго порядка). Так как помеха  $\varepsilon(t)$  распределена по нормальному закону с нулевым средним  $m_\varepsilon \approx 0$ , то задача сводится к вычислению только параметра  $\sigma(\varepsilon)$ . Для вычисления параметра  $\sigma(\varepsilon)$  воспользуемся выражением для вычисления корреляционной функции  $R_{gg}(\tau)$  зашумленного сигнала  $g(t)$ .

Известно, что для стационарного случайного сигнала  $g(t)$ , обладающего свойством эргодичности, корреляционная функция определяет вероятность того, что, имея в момент времени  $t$  значение  $g_1$ , в момент времени  $t + \tau$  она будет иметь значение  $g_2$ , т.е. характеризует взаимную связь между  $g(t)$  и  $g(t + \tau)$  и вычисляется по выражению [14]

$$R_{gg}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{g}(t) \overset{\circ}{g}(t + \tau) dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\overset{\circ}{x}(t) + \overset{\circ}{\varepsilon}(t)) (\overset{\circ}{x}(t + \tau) + \overset{\circ}{\varepsilon}(t + \tau)) dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{x}(t + \tau) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{\varepsilon}(t + \tau) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{\varepsilon}(t) \overset{\circ}{x}(t + \tau) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{\varepsilon}(t) \overset{\circ}{\varepsilon}(t + \tau) dt,$$

где центрированные значения вычисляются по выражениям  $\overset{\circ}{g}(t) = g(t) - m_g$ ,  $\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - m_x$ ;  $m_g$ ,  $m_x$  — математические ожидания соответственно  $g(t)$  и  $x(t)$ .

Учитывая, что полезный сигнал  $x(t)$  и помеха  $\varepsilon(t)$  независимы, т.е.

$$\frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{\varepsilon}(t + \tau) dt \approx 0, \quad \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{\varepsilon}(t) \overset{\circ}{x}(t + \tau) dt \approx 0,$$

можно написать:

$$R_{gg}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{g}(t) \overset{\circ}{g}(t + \tau) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{x}(t + \tau) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{\varepsilon}(t) \overset{\circ}{\varepsilon}(t + \tau) dt = R_{xx}(\tau) + R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau). \quad (3)$$

Таким образом, корреляционная функция  $R_{gg}(\tau)$  зашумленного сигнала  $g(t)$  состоит из суммы корреляционных функций  $R_{xx}(\tau)$  и  $R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau)$  соответственно полезного сигнала  $x(t)$  и помехи  $\varepsilon(t)$ . При этом на практике полезный сигнал  $x(t)$  более низкочастотный по сравнению с помехой  $\varepsilon(t)$ . Поэтому для полезного сигнала  $x(t)$  при  $\tau \neq 0$ , когда  $\tau = \Delta t$  мало по сравнению с временем  $T$ ,  $x(t + \Delta t)$  незначительно отличается от  $x(t)$ . Следовательно, вероятность того, что значение  $x(t + \Delta t)$  мало отличается от значения  $x(t)$ , близка к единице:

$$P(x(t) \approx x(t + \Delta t)) \approx 1.$$

Тогда отношение  $\frac{R_{xx}(\tau = \Delta t)}{R_{xx}(0)}$  также близко к единице, т.е. [14]  $\frac{R_{xx}(\tau = \Delta t)}{R_{xx}(0)} \approx 1$ , что равносильно приближенному равенству

$$R_{xx}(0) \approx R_{xx}(\tau = \Delta t). \quad (4)$$

В то же время в силу того, что гауссова случайная помеха  $\varepsilon(t)$  возникает при суммировании независимых белых шумов, она имеет время корреляции  $\tau = 0$  и корреляционная функция  $R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau)$  представляет собой  $\delta$ -функцию [14], т.е.

$$R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) = \begin{cases} R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau = 0) & \text{при } \tau = 0, \\ 0 & \text{при } \tau \neq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Поэтому, если вычислить оценки корреляционной функции  $R_{gg}(\tau)$  зашумленного сигнала при  $\tau = 0$  и  $\tau = \Delta t$ , получим следующее. При  $\tau = 0$  формула (3) представляется в виде

$$R_{gg}(\tau = 0) = \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{g}(t) \overset{\circ}{g}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{x}(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{\varepsilon}(t) \overset{\circ}{\varepsilon}(t) dt = R_{xx}(\tau = 0) + R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau = 0),$$

где  $R_{xx}(\tau = 0)$ ,  $R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau = 0)$  — оценки автокорреляционных функций соответственно полезного сигнала  $x(t)$  и помехи  $\varepsilon(t)$  при нулевом временном сдвиге  $\tau = 0$ . Иначе говоря, эти оценки представляют собой моменты второго порядка соответственно полезного сигнала  $x(t)$  и помехи  $\varepsilon(t)$ :

$$R_{xx}(\tau = 0) = D(x), \quad R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau = 0) = D(\varepsilon). \quad (6)$$

Таким образом, корреляционная функция  $R_{gg}(\tau)$  зашумленного сигнала  $g(t)$  при  $\tau = 0$  состоит из суммы моментов второго порядка  $D(x)$ ,  $D(\varepsilon)$  соответственно полезного сигнала и помехи.

При достаточно малом по сравнению с временем наблюдения  $T$  временном интервале  $\tau = \Delta t$  оценка автокорреляционной функции  $R_{gg}(\tau = \Delta t)$  зашумленно-го сигнала  $g(t)$  приобретает вид

$$\begin{aligned} R_{gg}(\tau = \Delta t) &= \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{g}(t) \overset{\circ}{g}(t + \Delta t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{x}(t + \Delta t) dt + \\ &+ \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{\varepsilon}(t) \overset{\circ}{\varepsilon}(t + \Delta t) dt = R_{xx}(\tau = \Delta t) + R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau = \Delta t). \end{aligned}$$

Если найти разницу между оценками автокорреляционной функции зашумленного сигнала  $g(t)$  при  $\tau = 0$  и  $\tau = \Delta t$ , то получим

$$R_{gg}(\tau = 0) - R_{gg}(\tau = \Delta t) = R_{xx}(\tau = 0) + R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau = 0) - R_{xx}(\tau = \Delta t) - R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau = \Delta t).$$

С учетом выражений (4)–(6) имеем

$$R_{gg}(\tau = 0) - R_{gg}(\tau = \Delta t) \approx R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau = 0).$$

Тогда оценку момента второго порядка  $D^*(\varepsilon)$  помехи  $\varepsilon(t)$  зашумленного сигнала  $g(t)$  можно вычислить по выражению  $D^*(\varepsilon) \approx R_{gg}(\tau = 0) - R_{gg}(\tau = \Delta t)$

$$\text{или } D^*(\varepsilon) \approx R_{\varepsilon\varepsilon}^*(\tau = 0) = \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{g}(t) \overset{\circ}{g}(t) dt - \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{g}(t) \overset{\circ}{g}(t + \Delta t) dt.$$

Следовательно, среднее квадратическое отклонение  $\sigma^*(\varepsilon)$  помехи  $\varepsilon(t)$  можно вычислить по выражению

$$\sigma^*(\varepsilon) = \sqrt{D^*(\varepsilon)} \approx \sqrt{R_{gg}(\tau=0) - R_{gg}(\tau=\Delta t)} \quad (7)$$

или

$$\sigma^*(\varepsilon) = \sqrt{D^*(\varepsilon)} \approx \sqrt{R_{\varepsilon\varepsilon}^*(\tau=0)} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{g}(t) \overset{\circ}{g}(t) dt - \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{g}(t) \overset{\circ}{g}(t+\Delta t) dt}. \quad (8)$$

Таким образом, параметр  $\sigma^*(\varepsilon)$  нормального распределения помехи  $\varepsilon(t)$  можно вычислить, определив корень квадратный из разности оценок автокорреляционной функции  $R_{gg}(\tau)$  зашумленного сигнала при нулевом  $\tau=0$  и единичном  $\tau=\Delta t$  временных сдвигах.

### 3. Технология нахождения аналитического выражения функции плотности нормального распределения шума с нулевым средним

Ниже будет показано, что, используя вычисленную оценку  $\sigma^*(\varepsilon)$  параметра нормального распределения помехи  $\varepsilon(t)$ , можно определить следующие ее характеристики.

1. Функцию плотности распределения  $f^*(\varepsilon)$  нормально распределенной помехи  $\varepsilon(t)$  зашумленного сигнала  $g(t)$  с математическим ожиданием  $m_\varepsilon \approx 0$  с учетом формулы (2) можно найти по выражению

$$f^*(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma^*(\varepsilon)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\varepsilon - m_\varepsilon)^2}{2(\sigma^*(\varepsilon))^2}}. \quad (9)$$

Очевидно, что с учетом выражений (7), (8), формулу (9) для аналитического представления функции плотности нормального распределения шума с нулевым средним  $m_\varepsilon \approx 0$  можно представить в виде

$$f^*(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma^*(\varepsilon)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2(\sigma^*(\varepsilon))^2}}$$

или

$$f^*(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(R_{gg}(0) - R_{gg}(\Delta t))}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2(R_{gg}(0) - R_{gg}(\Delta t))}},$$

а также

$$f^*(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \left( \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{g}(t) \overset{\circ}{g}(t) dt - \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{g}(t) \overset{\circ}{g}(t+\Delta t) dt \right)}} \cdot E(\varepsilon),$$

$$E(\varepsilon) = e^{-\frac{\varepsilon^2}{2 \left( \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{g}(t) \overset{\circ}{g}(t) dt - \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{g}(t) \overset{\circ}{g}(t+\Delta t) dt \right)}}.$$

2. Зная оценку среднего квадратического отклонения помехи  $\sigma^*(\varepsilon)$ , также можно определить максимум функции плотности нормального распределения  $f_{\max}(\varepsilon)$  помехи  $\varepsilon(t)$  зашумленного сигнала  $g(t)$ :

$$f_{\max}(m_\varepsilon) = \frac{1}{\sigma(\varepsilon)\sqrt{2\pi}}. \quad (10)$$

С учетом условия  $m_\varepsilon \approx 0$  и выражений (7), (8) формулу (10) можно представить в виде

$$f_{\max}^*(0) = \frac{1}{\sigma^*(\varepsilon)\sqrt{2\pi}}$$

или

$$f_{\max}^*(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(R_{gg}(0) - R_{gg}(\Delta t))}},$$

а также

$$f_{\max}^*(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \left( \frac{1}{T} \int_0^T g(t) \overset{\circ}{g}(t) dt - \frac{1}{T} \int_0^T g(t) \overset{\circ}{g}(t + \Delta t) dt \right)}}.$$

3. Кроме того, используя выражения для вычисления оценки среднего квадратического отклонения помехи  $\sigma^*(\varepsilon)$ , также можно определить координаты первой и второй точек перегиба функции плотности нормального распределения  $f(\varepsilon)$ . Известно, что координаты точек перегиба функции плотности нормального распределения  $f(\varepsilon)$  определяются по выражениям

$$\left( m_\varepsilon - \sigma(\varepsilon); \frac{1}{\sigma(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}} \right) \text{ и } \left( m_\varepsilon + \sigma(\varepsilon); \frac{1}{\sigma(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}} \right). \quad (11)$$

С учетом условия  $m_\varepsilon \approx 0$  и формул (7), (8), выражение (11) можно представить в виде

$$\left( -\sigma^*(\varepsilon); \frac{1}{\sigma^*(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}} \right) \text{ и } \left( \sigma^*(\varepsilon); \frac{1}{\sigma^*(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}} \right).$$

Тогда координаты точек перегиба вычисляются по формулам: для первой точки перегиба по оси абсцисс:

$$A1 = -\sqrt{(R_{gg}(0) - R_{gg}(\Delta t))}$$

или

$$A1 = -\sqrt{\left( \frac{1}{T} \int_0^T g(t) \overset{\circ}{g}(t) dt - \frac{1}{T} \int_0^T g(t) \overset{\circ}{g}(t + \Delta t) dt \right)};$$

для второй точки перегиба по оси абсцисс:

$$A2 = \sqrt{(R_{gg}(0) - R_{gg}(\Delta t))}$$

или

$$A2 = \sqrt{\left( \frac{1}{T} \int_0^T g(t) \overset{\circ}{g}(t) dt - \frac{1}{T} \int_0^T g(t) \overset{\circ}{g}(t + \Delta t) dt \right)};$$

для первой и второй точек перегиба по оси ординат:

$$O = \frac{1}{\sqrt{2(R_{gg}(0) - R_{gg}(\Delta t))\pi e}}$$

или

$$O = \frac{1}{\sqrt{2 \left( \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{g}(t) \overset{\circ}{g}(t) dt - \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{g}(t) \overset{\circ}{g}(t + \Delta t) dt \right)} \pi e}$$

Таким образом, разработаны алгоритмы вычисления функции плотности распределения  $f^*(\varepsilon)$ , ее максимума  $f_{\max}^*(0)$ , а также точек перегиба  $\left( -\sigma^*(\varepsilon); \frac{1}{\sigma^*(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}} \right)$  и  $\left( \sigma^*(\varepsilon); \frac{1}{\sigma^*(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}} \right)$  нормально распределенной помехи  $\varepsilon(t)$  с математическим ожиданием  $m_\varepsilon \approx 0$  зашумленного сигнала  $g(t)$ .

#### 4. Алгоритм вычисления по аналитическому выражению дискретных значений функции плотности нормального распределения помехи с нулевым средним

Ниже предлагается алгоритм, позволяющий по аналитическому выражению вычислить дискретные значения функции плотности распределения  $f^*(\varepsilon)$  нормально распределенной помехи  $\varepsilon(t)$  с математическим ожиданием  $m_\varepsilon \approx 0$ , максимум  $f_{\max}^*(0)$  и точки перегиба с координатами

$$\left( -\sigma^*(\varepsilon); \frac{1}{\sigma^*(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}} \right) \text{ и } \left( \sigma^*(\varepsilon); \frac{1}{\sigma^*(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}} \right).$$

Пусть от датчика, размещенного в зоне действия влияющих на объект факторов и воспринимающего цифровую информацию от этого объекта, поступает аддитивный зашумленный цифровой сигнал  $g(\Delta t)$ , состоящий из полезного сигнала  $x(\Delta t)$  и помехи  $\varepsilon(\Delta t)$ . Сигнал  $g(\Delta t)$  дискретизирован шагом  $\Delta t$ , выбранным в соответствии с условием  $\Delta t = 1/2\omega_\varepsilon$ , где  $\omega_\varepsilon$  — частота среза помехи.

Тогда алгоритм определения функции плотности распределения  $f^*(\varepsilon)$  помехи  $\varepsilon(t)$  представляется следующим образом:

1. Вычисляется оценка автокорреляционной функции централизованного зашумленного сигнала  $\overset{\circ}{g}(t)$  при  $\mu=0$ :

$$R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu=0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \overset{\circ}{g}(i\Delta t) \overset{\circ}{g}(i\Delta t), \quad (12)$$

где  $\mu=0, 1, \dots$

2. Вычисляется оценка автокорреляционной функции централизованного зашумленного сигнала  $\overset{\circ}{g}(t)$  при  $\mu=1 \cdot \Delta t$ :

$$R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu=1 \cdot \Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \overset{\circ}{g}(i\Delta t) \overset{\circ}{g}((i+1)\Delta t). \quad (13)$$

3. Вычисляется среднее квадратическое отклонение  $\sigma^*(\varepsilon)$  помехи  $\varepsilon(t)$  зашумленного сигнала  $g(t)$ :

$$\sigma^*(\varepsilon) = \sqrt{R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu=0) - R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu=\Delta t)} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \overset{\circ}{g}(i\Delta t) \overset{\circ}{g}(i\Delta t) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \overset{\circ}{g}(i\Delta t) \overset{\circ}{g}((i+1)\Delta t)}. \quad (14)$$

4. Вычисляются дискретные значения функции плотности распределения  $f^*(\varepsilon(i\Delta t))$  помехи  $\varepsilon(i\Delta t)$ ,  $i=1, 2, \dots$ , в интервале  $m_\varepsilon \pm 3\sigma^*(\varepsilon)$ , т.е. при  $m_\varepsilon - 3\sigma^*(\varepsilon) \leq \varepsilon(i\Delta t) \leq m_\varepsilon + 3\sigma^*(\varepsilon)$  имеем

$$f^*(\varepsilon(i\Delta t)) = \frac{1}{\sigma^*(\varepsilon)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\varepsilon(i\Delta t) - m_\varepsilon)^2}{2(\sigma^*(\varepsilon))^2}}. \quad (15)$$

Учитывая, что  $m_\varepsilon \approx 0$ , функцию плотности распределения  $f^*(\varepsilon(i\Delta t))$  следует вычислять в интервале  $-3\sigma^*(\varepsilon) \leq \varepsilon(i\Delta t) \leq +3\sigma^*(\varepsilon)$  по следующим выражениям:

$$f^*(\varepsilon(i\Delta t)) = \frac{1}{\sigma^*(\varepsilon)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2(i\Delta t)}{2(\sigma^*(\varepsilon))^2}} \quad (16)$$

или

$$f^*(\varepsilon(i\Delta t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(R_{gg}(\mu=0) - R_{gg}(\mu=\Delta t))}} e^{-\frac{\varepsilon^2(i\Delta t)}{2(R_{gg}(\mu=0) - R_{gg}(\mu=\Delta t))}}, \quad (17)$$

а также

$$f^*(\varepsilon(i\Delta t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i\Delta t) g(i\Delta t) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i\Delta t) g((i+1)\Delta t) \right)}} \cdot E(\varepsilon(i\Delta t)), \quad (18)$$

$$E(\varepsilon(i\Delta t)) = e^{-\frac{\varepsilon^2(i\Delta t)}{2 \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i\Delta t) g(i\Delta t) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i\Delta t) g((i+1)\Delta t) \right)}}.$$

5. Определяется максимум функции плотности нормального распределения  $f_{\max}^*(\varepsilon(i\Delta t))$  помехи  $\varepsilon(i\Delta t)$  зашумленного сигнала  $g(i\Delta t)$ , который находится в точке  $m_\varepsilon \approx 0$ , т.е. при  $\varepsilon(i_{\max}\Delta t) = 0$ :

$$f_{\max}^*(0) = \frac{1}{\sigma^*(\varepsilon)\sqrt{2\pi}} \quad (19)$$

или

$$f_{\max}^*(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(R_{gg}(\mu=0) - R_{gg}(\mu=\Delta t))}}, \quad (20)$$

а также

$$f_{\max}^*(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i\Delta t) g(i\Delta t) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i\Delta t) g((i+1)\Delta t) \right)}}. \quad (21)$$

6. Определяются координаты первой и второй точек перегиба

$$\left( -\sigma^*(\varepsilon); \frac{1}{\sigma^*(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}} \right) \text{ и } \left( \sigma^*(\varepsilon); \frac{1}{\sigma^*(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}} \right)$$

функции плотности нормального распределения  $f^*(\varepsilon(i\Delta t))$  помехи  $\varepsilon(i\Delta t)$ :

- для первой точки перегиба по оси абсцисс:

$$A1 = -\sqrt{\frac{R_{gg}(\mu=0) - R_{gg}(\mu=\Delta t)}{gg}}$$

или

$$A1 = -\sqrt{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i\Delta t)g(i\Delta t) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i\Delta t)g((i+1)\Delta t)\right)}, \quad (22)$$

- для второй точки перегиба по оси абсцисс:

$$A2 = \sqrt{\frac{R_{gg}(\mu=0) - R_{gg}(\mu=\Delta t)}{gg}}$$

или

$$A2 = \sqrt{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i\Delta t)g(i\Delta t) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i\Delta t)g((i+1)\Delta t)\right)}, \quad (23)$$

- для первой и второй точек перегиба по оси ординат:

$$O = \frac{1}{\sqrt{2(R_{gg}(\mu=0) - R_{gg}(\mu=\Delta t))\pi e}}$$

или

$$O = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i\Delta t)g(i\Delta t) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i\Delta t)g((i+1)\Delta t)\right)\pi e}}. \quad (24)$$

## 5. Технология проведения вычислительных экспериментов

Для проверки эффективности технологии вычисления функции плотности нормального распределения  $f^*(\varepsilon)$  помехи  $\varepsilon(t)$  зашумленного сигнала  $g(t)$ , максимума  $f_{\max}^*(\varepsilon)$  этой функции, а также точек перегиба

$$\left(m_{\varepsilon}^* - \sigma^*(\varepsilon); \frac{1}{\sigma^*(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}}\right), \left(m_{\varepsilon}^* + \sigma^*(\varepsilon); \frac{1}{\sigma^*(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}}\right)$$

проведены вычислительные эксперименты с использованием средств компьютерной математики MATLAB. Вычислительные эксперименты проводились следующим образом.

Формировались полезные сигналы  $x(t)$  в виде суммы гармонических колебаний. С помощью генератора случайных чисел формировалась нормально распределенная помеха  $\varepsilon(i\Delta t)$  с различными заданными значениями параметров распределения  $m_{\varepsilon} \approx 0$ ,  $\sigma(\varepsilon)$ . Предполагалось, что это есть истинная помеха. Формировались зашумленные сигналы  $g(i\Delta t) = x(i\Delta t) + \varepsilon(i\Delta t)$ . Суть экспериментов сводилась к тому, что вычислялась функция плотности распределения помехи  $f^*(\varepsilon)$  по разработанным алгоритмам с использованием значений сформированного зашумленного сигнала  $g(i\Delta t)$ . Полученная функция плотности распределения помехи сравнивалась с функцией плотности распределения помехи  $f(\varepsilon)$ , построенной с помощью сформированных дискретных значений помехи  $\varepsilon(i\Delta t)$ .

По выражениям (2), (10), (11) вычислялась функция плотности распределения  $f(\varepsilon)$ , максимум  $f_{\max}(m_{\varepsilon})$  функции плотности распределения и точки переги-

ба  $\left( m_\varepsilon - \sigma(\varepsilon); \frac{1}{\sigma(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}} \right)$ ,  $\left( m_\varepsilon + \sigma(\varepsilon); \frac{1}{\sigma(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}} \right)$  сформированной помехи  $\varepsilon(t)$ , заданной для получения зашумленного сигнала  $g(t)$ . Затем вычислялись функция плотности распределения  $f^*(\varepsilon)$  помехи  $\varepsilon(t)$ , ее максимум  $f_{\max}^*(m_\varepsilon)$ , точки перегиба  $\left( m_\varepsilon^* - \sigma^*(\varepsilon); \frac{1}{\sigma^*(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}} \right)$ ,  $\left( m_\varepsilon^* + \sigma^*(\varepsilon); \frac{1}{\sigma^*(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}} \right)$  по предложенным в работе алгоритмам (12)–(18), (19)–(21), (22)–(24) и проводился сравнительный анализ. Для этого были определены:

1) величина относительной погрешности среднего квадратического отклонения  $\sigma(\varepsilon)$ :

$$\Delta\sigma(\varepsilon) = |\sigma(\varepsilon) - \sigma^*(\varepsilon)| / |\sigma(\varepsilon)| \cdot 100\%;$$

2) величины относительных погрешностей дискретных значений функции плотности распределения  $f(\varepsilon(i\Delta t))$  помехи  $\varepsilon(i\Delta t)$ ,  $i=1, 2, \dots$ , в интервале  $-3\sigma^*(\varepsilon) \leq \varepsilon(i\Delta t) \leq 3\sigma^*(\varepsilon)$  по выражению

$$\Delta f(\varepsilon(i\Delta t)) = |f(\varepsilon(i\Delta t)) - f^*(\varepsilon(i\Delta t))| / |f(\varepsilon(i\Delta t))| \cdot 100\%;$$

3) величина относительной погрешности максимума  $f_{\max}(m_\varepsilon)$  функции плотности распределения по выражению

$$\Delta f_{\max}(m_\varepsilon) = |f_{\max}(m_\varepsilon) - f_{\max}^*(m_\varepsilon)| / |f_{\max}(m_\varepsilon)| \cdot 100\%;$$

4) величины относительных погрешностей первой и второй точек перегиба  $\left( m_\varepsilon - \sigma(\varepsilon); \frac{1}{\sigma(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}} \right)$ ,  $\left( m_\varepsilon + \sigma(\varepsilon); \frac{1}{\sigma(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}} \right)$  по оси абсцисс и ординат по выражениям:

- по оси абсцисс для первой точки  $(m_\varepsilon - \sigma(\varepsilon))$ :

$$\Delta a1 = |(m_\varepsilon - \sigma(\varepsilon)) - (m_\varepsilon^* - \sigma^*(\varepsilon))| / |(m_\varepsilon - \sigma(\varepsilon))| \cdot 100\%,$$

- по оси абсцисс для второй точки  $(m_\varepsilon + \sigma(\varepsilon))$ :

$$\Delta a2 = |(m_\varepsilon + \sigma(\varepsilon)) - (m_\varepsilon^* + \sigma^*(\varepsilon))| / |(m_\varepsilon + \sigma(\varepsilon))| \cdot 100\%,$$

- по оси ординат  $\left( \frac{1}{\sigma(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}} \right)$ :

$$\Delta o = \left| \left( \frac{1}{\sigma(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}} \right) - \left( \frac{1}{\sigma^*(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}} \right) \right| / \left( \frac{1}{\sigma(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}} \right) \cdot 100\%,$$

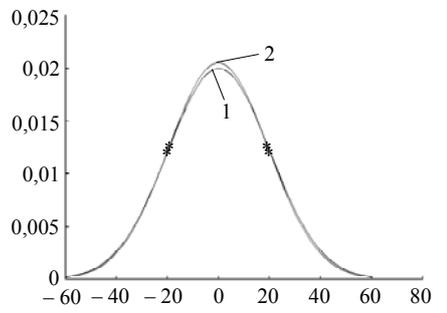
где значение  $m_\varepsilon$  вычислялось по выражению  $m_\varepsilon = \sum_{i=1}^N \varepsilon(i\Delta t) / N$ , а значение  $m_\varepsilon^*$  задавалось, исходя из заданного предположения  $m_\varepsilon^* = 0$ .

## 6. Результаты и сравнительный анализ вычислительных экспериментов

Ниже приводятся результаты одного из множества вычислительных экспериментов. Полезный сигнал сформирован в виде суммы гармонических колебаний  $X(i\Delta t) = 60 \sin(1,4t + 0,3) + 15 \cos(0,9t) + 40 \sin(1,6t + 1,5) + 45 \cos(1,1t + 0,3) +$

$+ 20\sin(2,5t + 0,7) - 80\cos(2,3t + 1,5) + 300$ . Помеха  $\varepsilon(t)$  подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием  $m_\varepsilon \approx 0,15$  и средним квадратическим отклонением  $\sigma(\varepsilon) \approx 20$ .

На рисунке представлены графики заданной функции плотности распределения помехи (линия 1) и вычисленной по предложенной в работе технологии (линия 2), звездочками обозначены точки перегиба.



Из анализа результатов сделаны следующие выводы.

1. Во всех экспериментах заданные  $\sigma(\varepsilon)$  и вычисленные  $\sigma^*(\varepsilon)$  оценки средних квадратических отклонений помехи практически совпадают (см. табл. 1, строка 1, столбцы 1–3):  $\sigma(\varepsilon) \approx \sigma^*(\varepsilon)$  и величина относительной погрешности  $\Delta\sigma(\varepsilon)$  составляет 2,7 %.

2. Во всех экспериментах заданные  $m_\varepsilon$  и принятые по условию задачи  $m_\varepsilon^* = 0$  оценки математических ожиданий помехи практически совпадают (табл. 1, строка 1, столбцы 4–6):  $m_\varepsilon \approx m_\varepsilon^*$  и величина относительной погрешности  $\Delta m_\varepsilon$  составляет 15 %.

Таблица 1

	1	2	3	4	5	6
1	Среднее квадратическое отклонение			Математическое ожидание помехи		
	$\sigma(\varepsilon)$	$\sigma^*(\varepsilon)$	$\Delta\sigma(\varepsilon)$	$m_\varepsilon$	$m_\varepsilon^*$	$\Delta m_\varepsilon$
	20,009	19,475	2,7448	0,15128	0,0	15,13
2	Максимум функции плотности нормального распределения помехи			Точка перегиба по оси ординат		
	$f_{\max}(m_\varepsilon)$	$f_{\max}^*(m_\varepsilon)$	$\Delta f_{\max}(m_\varepsilon)$	$\frac{1}{\sigma(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}}$	$\frac{1}{\sigma^*(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}}$	$\Delta o$
	0,019947	0,020485	2,6947	0,012099	0,012425	2,6269
3	Первая точка перегиба по оси абсцисс			Вторая точка перегиба по оси абсцисс		
	$m_\varepsilon - \sigma(\varepsilon)$	$m_\varepsilon^* - \sigma^*(\varepsilon)$	$\Delta a1$	$m_\varepsilon + \sigma(\varepsilon)$	$m_\varepsilon^* + \sigma^*(\varepsilon)$	$\Delta a2$
	-19,849	-19,475	1,921	20,151	19,475	3,4746

3. В интервале  $-\sigma^*(\varepsilon) \leq \varepsilon(i \cdot \Delta t) \leq \sigma^*(\varepsilon)$  наиболее вероятных значений величины относительных погрешностей  $\Delta f(\varepsilon(i \cdot \Delta t))$  колеблются в пределах 0–3 %. В интервалах  $-2\sigma^*(\varepsilon) \leq \varepsilon(i \cdot \Delta t) \leq -\sigma^*(\varepsilon)$  и  $\sigma^*(\varepsilon) \leq \varepsilon(i \cdot \Delta t) \leq 2\sigma^*(\varepsilon)$  часто встречаемых значений помехи  $\varepsilon(i \cdot \Delta t)$  величины относительных погрешностей колеблются в пределах 0–9 %. В интервалах  $-3\sigma^*(\varepsilon) \leq \varepsilon(i \cdot \Delta t) \leq -2\sigma^*(\varepsilon)$  и  $2\sigma^*(\varepsilon) \leq \varepsilon(i \cdot \Delta t) \leq 3\sigma^*(\varepsilon)$  редко встречаемых значений помехи  $\varepsilon(i \cdot \Delta t)$  величины относительных погрешностей не превышают 7–20 %. Увеличение относительных погрешностей ближе к «хвостам» объясняется тем, что абсолютные значения функции плотности распределения исчисляются в тысячных и выше долях единицы. Таким образом, во всех экспериментах заданные  $f(\varepsilon)$  и вычисленные  $f^*(\varepsilon)$  оценки функции плотности нормального распределения помехи практически совпадают (табл. 2):  $f(\varepsilon(i\Delta t)) \approx f^*(\varepsilon(i\Delta t))$ .

Таблица 2

Функция плотности нормального распределения помехи							
$i\Delta t$				$i\Delta t$			
	1 $f(\varepsilon(i\Delta t))$	2 $f^*(\varepsilon(i\Delta t))$	3 $\Delta f(\varepsilon(i\Delta t))$ %		4 $f(\varepsilon(i\Delta t))$	5 $f^*(\varepsilon(i\Delta t))$	6 $\Delta f(\varepsilon(i\Delta t))$ %
1	0,00022159	0,00018223	17,762	61	0,019947	0,020485	2,6947
2	0,00025713	0,0002131	17,124	62	0,019922	0,020449	2,6467
3	0,00029763	0,00024854	16,491	63	0,019848	0,020361	2,5848
4	0,00034364	0,00028912	15,866	64	0,019724	0,020219	2,5088
5	0,00039577	0,00033543	15,247	65	0,019552	0,020025	2,4189
6	0,00045468	0,00038813	14,636	66	0,019333	0,019781	2,3151
7	0,00052105	0,00044793	14,032	67	0,019069	0,019488	2,1974
8	0,00059561	0,00051559	13,435	68	0,018762	0,01915	2,0659
9	0,00067915	0,0005919	12,847	69	0,018414	0,018767	1,9207
10	0,00077247	0,00067772	12,266	70	0,018026	0,018344	1,7617
11	0,00087642	0,00077393	11,693	71	0,017603	0,017883	1,5891
12	0,00099187	0,00088148	11,129	72	0,017147	0,017388	1,4029
13	0,0011197	0,0010013	10,574	73	0,016661	0,016862	1,2033
14	0,0012609	0,0011345	10,027	74	0,016149	0,016309	0,99017
15	0,0014164	0,001282	9,4891	75	0,015613	0,015732	0,76375
16	0,001587	0,0014448	8,9607	76	0,015057	0,015136	0,5241
17	0,0017737	0,001624	8,4417	77	0,014485	0,014524	0,27131
18	0,0019775	0,0018206	7,9323	78	0,013899	0,0139	0,0054853
19	0,0021992	0,0020357	7,4328	79	0,013304	0,013268	0,27327
20	0,0024396	0,0022702	6,9432	80	0,012703	0,012631	0,56485
21	0,0026995	0,0025251	6,4639	81	0,012099	0,011993	0,86912
22	0,0029797	0,0028011	5,9949	82	0,011494	0,011358	1,186
23	0,0032808	0,0030991	5,5365	83	0,010893	0,010728	1,5153
24	0,0036032	0,0034199	5,0888	84	0,010297	0,010106	1,8569
25	0,0039475	0,0037639	4,6521	85	0,0097093	0,0094947	2,2107
26	0,0043139	0,0041315	4,2264	86	0,0091325	0,0088971	2,5766
27	0,0047025	0,0045232	3,812	87	0,0085684	0,0083153	2,9543
28	0,0051132	0,0049389	3,409	88	0,0080192	0,007751	3,3438
29	0,005546	0,0053787	3,0176	89	0,0074864	0,007206	3,7449
30	0,0060005	0,0058422	2,6379	90	0,0069715	0,0066817	4,1575
31	0,0064759	0,0063289	2,2701	91	0,0064759	0,0061792	4,5813
32	0,0069715	0,0068381	1,9143	92	0,0060005	0,0056995	5,0162
33	0,0074864	0,0073688	1,5707	93	0,005546	0,0052431	5,4621
34	0,0080192	0,0079198	1,2393	94	0,0051132	0,0048106	5,9187
35	0,0085684	0,0084896	0,9204	95	0,0047025	0,0044022	6,386
36	0,0091325	0,0090764	0,61405	96	0,0043139	0,0040178	6,8636
37	0,0097093	0,0096782	0,32038	97	0,0039475	0,0036573	7,3515
38	0,010297	0,010293	0,039502	98	0,0036032	0,0033204	7,8494
39	0,010893	0,010917	0,22846	99	0,0032808	0,0030066	8,3572
40	0,011494	0,01155	0,4834	100	0,0029797	0,0027153	8,8746
41	0,012099	0,012186	0,72522	101	0,0026995	0,0024457	9,4015
42	0,012703	0,012824	0,95382	102	0,0024396	0,0021972	9,9377
43	0,013304	0,01346	1,1691	103	0,0021992	0,0019686	10,483
44	0,013899	0,01409	1,371	104	0,0019775	0,0017592	11,037
45	0,014485	0,01471	1,5594	105	0,0017737	0,001568	11,6
46	0,015057	0,015318	1,7342	106	0,001587	0,0013938	12,171
47	0,015613	0,015909	1,8955	107	0,0014164	0,0012358	12,75
48	0,016149	0,016479	2,043	108	0,0012609	0,0010927	13,338
49	0,016661	0,017024	2,1767	109	0,0011197	0,00096371	13,933
50	0,017147	0,017541	2,2967	110	0,00099187	0,00084769	14,536
51	0,017603	0,018026	2,4028	111	0,00087642	0,00074367	15,146
52	0,018026	0,018476	2,495	112	0,00077247	0,0006507	15,764
53	0,018414	0,018887	2,5732	113	0,00067915	0,00056785	16,388
54	0,018762	0,019257	2,6375	114	0,00059561	0,00049424	17,019
55	0,019069	0,019582	2,6878	115	0,00052105	0,00042905	17,657
56	0,019333	0,01986	2,724	116	0,00045468	0,00037147	18,3
57	0,019552	0,020089	2,7463	117	0,00039577	0,00032077	18,95
58	0,019724	0,020267	2,7544	118	0,00034364	0,00027626	19,606
59	0,019848	0,020393	2,7486	119	0,00029763	0,00023731	20,267
60	0,019922	0,020466	2,7287	120	0,00025713	0,0002033	20,934

6. Во всех экспериментах заданный  $f_{\max}(m_\varepsilon)$  и вычисленный  $f_{\max}^*(m_\varepsilon)$  максимумы функции плотности нормального распределения помехи практически совпадают (см. табл. 1, строка 2, столбцы 1–3), т.е.  $f_{\max}(m_\varepsilon) \approx f_{\max}^*(m_\varepsilon)$  и величина относительной погрешности  $\Delta f_{\max}(m_\varepsilon)$  не превышает 2,69 %.

7. Во всех экспериментах заданная  $m_\varepsilon - \sigma(\varepsilon)$  и вычисленная  $m_\varepsilon^* - \sigma^*(\varepsilon)$  первые точки перегиба по оси абсцисс функции плотности нормального распределения помехи практически совпадают (см. табл. 1, строка 3, столбцы 1–3):  $m_\varepsilon - \sigma(\varepsilon) \approx m_\varepsilon^* - \sigma^*(\varepsilon)$  и величина относительной погрешности  $\Delta a1$  составляет 1,9 %.

8. Во всех экспериментах заданная  $m_\varepsilon + \sigma(\varepsilon)$  и вычисленная  $m_\varepsilon^* + \sigma^*(\varepsilon)$  вторые точки перегиба по оси абсцисс функции плотности нормального распределения помехи практически совпадают (см. табл. 1, строка 3, столбцы 4–6):  $m_\varepsilon + \sigma(\varepsilon) \approx m_\varepsilon^* + \sigma^*(\varepsilon)$  и величина относительной погрешности  $\Delta a2$  составляет 3,47 %.

9. Во всех экспериментах заданная  $\frac{1}{\sigma(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}}$  и вычисленная  $\frac{1}{\sigma^*(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}}$  точки перегиба по оси ординат функции плотности нормального распределения помехи практически совпадают (см. табл. 1, строка 2, столбцы 4–6), т.е.  $\frac{1}{\sigma(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}} \approx \frac{1}{\sigma^*(\varepsilon)\sqrt{2\pi e}}$  и величина относительной погрешности  $\Delta o$  составляет 2,6274 %.

Таким образом, вычислительные эксперименты показали, что функция плотности распределения, ее максимальное значение и точки перегиба заданной помехи и функция плотности распределения, ее максимальное значение и точки перегиба, вычисленные с использованием разработанной технологии, практически совпадают.

### Заключение

Предложенные в работе технологии дают возможность судить о динамике изменения функции плотности распределения аддитивной помехи, что является достаточно исчерпывающей информацией о характере помехи. Разработанные технологии в системах слежения, мониторинга, контроля, диагностики, прогноза, идентификации, управления и т.д. обеспечивают качественное протекание технологического процесса, а также своевременно выявляют зарождающиеся изменения и определяют время проведения профилактических работ, текущих и капитальных ремонтов.

*Т.А. Алиев, Н.Ф. Мусаева, М.Т. Сулейманова, Б.И. Газизаде*

### АНАЛІТИЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ЩІЛЬНОСТІ НОРМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ ШУМУ

Розроблено технології і алгоритми знаходження аналітичного виразу функцій щільності нормального розподілу шуму, технології обчислення параметрів розподілу шуму з нульовим середнім. Проведено обчислювальні експерименти. Відзначено важливість та необхідність застосування отриманих результатів у системах слідкування, моніторингу, контролю, діагностики, прогнозу, ідентифікації, керування та ін.

## ANALYTIC REPRESENTATION OF THE DENSITY FUNCTION OF NORMAL DISTRIBUTION OF NOISE

Technologies and algorithms for finding the analytic representation of the density function of normal distribution of noise have been developed. Technologies for calculating the distribution parameters for a noise with zero mean have been developed, Computational experiments have been conducted. The importance and relevance of using the obtained results in systems of tracking, monitoring, control, diagnostics, forecasting, identification, management, etc. has been pointed out.

1. *Кунцевич В.М.* Синтез управления нелинейными объектами в условиях параметрической неопределенности и наличия помех измерений // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления. — ВСПУ-2014. — М., 2014.
2. *Кунцевич В.М.* Синтез управления нелинейными объектами в условиях неопределенности // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2013. — № 6. — С. 6–16.
3. *Волосов В.В., Хлебников М.В., Шевченко В.Н.* Алгоритм прецизионного управления ориентацией космического аппарата при действии неконтролируемого возмущения // Там же. — 2011. — № 2. — С. 114–121.
4. *Сальников Н.Н., Сирик С.В.* Алгоритм оценивания параметров линейной регрессии при ограниченных помехах в измерениях всех переменных // Там же. — 2013. — № 2. — С. 35–48.
5. *Отт Г.* Методы подавления шумов и помех в электронных системах. — М.: Мир. 1979. — 318 с.
6. *Харкевич А.А.* Борьба с помехами. — М.: Наука. 1965. — 276 с.
7. *Вишняков А.Н., Цыпкин Я.З.* Обнаружение нарушений закономерностей по наблюдаемым данным при наличии помех // Автоматика и телемеханика. — 1991. — 12. — С. 128–137.
8. *Черно А.А.* Управление резонансным электромагнитным вибрационным приводом с использованием алгоритма цифровой фильтрации на основе дискретного преобразования Фурье // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2014. — № 4. — С. 111–125.
9. *Aliev T.A., Musaeva N.F., Guluyev G.A., Sattarova U.E., Rzaeva N.E.* System of monitoring of period of hidden transition of compressor station to emergency state // Journal of Automation and Information Sciences. — 2011. — 43(11). — С. 66–81.
10. *Musaeva N.F.* Robust method of estimation with «contaminated» coarse errors // Automatic Control and Computer Sciences. — 2003. — 37, N 6. — P. 50–63.
11. *Musaeva N.F.* Technology for determining the magnitude of robustness as an estimate of statistical characteristic of noisy signal // Ibid. — 2005. — 39, N 5. — P. 53–62.
12. *Aliev T.A., Musaeva N.F., Sattarova U.E.* The technology of forming the normalized correlation matrices of the matrix equations of multidimensional stochastic objects // Journal of Automation and Information Sciences. — 2013. — 45(1), N 6. — P. 1–15.
13. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. — М.: Наука. 1969. — 576 с.
14. *Техническая кибернетика.* Кн. 2. / Под ред. В.В. Солодовникова — М.: Машиностроение. 1967. — 682 с.

*Получено 17.04.2015*