

УДК 004.942; 519.876.5

*А.Н. Трофимчук, В.А. Васянин*

### МОДЕЛИРОВАНИЕ УПАКОВКИ, РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И МАРШРУТИЗАЦИИ МЕЛКОПАРТИОННЫХ ПОТОКОВ В МНОГОПРОДУКТОВОЙ СЕТИ

#### Введение

Как правило, существующие и проектируемые территориально распределенные коммуникационные сети (транспортные сети — ТС, сети передачи данных — СПД и др.) имеют иерархическую структуру. Число уровней иерархии может определяться административным делением территории, структурой органов территориального управления, принятой технологией обработки и распределения потоков грузов, информации и пр. В большинстве случаев такие сети состоят из распределенной магистральной сети, и низовых сетей — зональных и внутренних.

Под многопродуктовой сетью понимается сеть, в которой каждый узел может обмениваться корреспонденциями (продуктами, требованиями) со всеми остальными узлами. Корреспонденция характеризуется узлом-источником, узлом-стоком и величиной, которая для ТС задается числом тарно-штучных грузов в упаковке унифицированного размера, а для СПД — числом бит, байт, мегабайт и т.д. в передаваемых данных (сообщениях). Корреспонденции могут быть заданы, например, матрицей мелкопартионных дискретных потоков, в которой строки соответствуют узлам-источникам, столбцы — узлам-стокам, а элементы матрицы определяют величину корреспонденций. В магистральной сети и зональных сетях все корреспонденции должны транспортироваться в транспортных средствах или передаваться по каналам связи в транспортных блоках заданного размера (емкости, объема). Размер транспортного блока измеряется количеством вмещающихся в него единиц корреспонденций (например, 40 тарно-штучных грузов, 1000 мегабайт). В ТС тарно-штучные грузы для облегчения (автоматизации) погрузочно-разгрузочных работ и обработки сопроводительной документации, как правило, перевозятся в контейнерах, на поддонах, в пакетах стандартных размеров. В современных магистральных опорных СПД сообщения упаковываются в виртуальные транспортные блоки, размер которых кратен пропускной способности каналов связи. Все магистральные узлы являются сортировочными центрами, в которых корреспонденции сначала сортируются по адресам (узлам) назначения, а затем упаковываются в транспортные блоки. Поскольку величины некоторых корреспонденций значительно меньше размера транспортного блока, они при сортировке могут несколько раз и в разных узлах объединяться (упаковываться) с корреспонденциями, имеющими другие адреса назначения. При таком объединении корреспонденций в узлах сети уменьшается количество направлений их сортировки и количество транспортных блоков, необходимых для их упаковки, но в отдельных узлах появляются дополнительные объемы сортировки корреспонденций, не достигших адресов своего назначения. Кроме того, увеличивается время на доставку получателю тех корреспонденций, которые проходят дополнительную сортировку в транзитных узлах следования. На уровнях внутренних сетей потоки корреспонденций в транспортных блоках могут не образовываться (см. технологию обработки потоков в иерархической сети в разд. 1).

© А.Н. ТРОФИМЧУК, В.А. ВАСЯНИН, 2015

В большинстве известных работ, непосредственно посвященных распределению многопродуктовых потоков и связанных с задачами анализа и синтеза многопродуктовых сетей, предлагаются линейные и нелинейные модели и соответствующие методы решения в основном для непрерывных переменных и параметров элементов сети. Кроме того, рассматриваемые модели, как правило, сильно агрегированные, в них не предусматривается возможность объединения потоков корреспонденций (группообразования корреспонденций с разными адресами назначения), не учитывается целый ряд физических характеристик и параметров, присущих реальным системам. Анализ литературных источников показывает, что дискретные задачи, связанные с сортировкой, упаковкой и распределением мелкопартионных потоков, исследованы очень слабо. Авторам известно только несколько работ в этом направлении [1, 2], в которых рассматриваются подобные задачи и приводятся упрощенные математические модели процессов обработки и перевозки мелкопартионных грузов, в которых не учитывается ряд существенных особенностей и ограничений, имеющих место в реальных транспортных системах.

В работе [3] приведена математическая модель NP-трудной обобщенной задачи упаковки и распределения потоков в иерархической многопродуктовой сети, в которой учтены особенности обработки мелкопартионных потоков и предложен эвристический подход к ее решению, основанный на последовательном решении более простых подзадач.

Цель настоящей публикации — описание методики, позволяющей находить субоптимальное решение и в интерактивном режиме осуществлять выбор иерархической структуры сети и определять основные технико-экономические показатели ее функционирования при изменении исходных данных и параметров. Методика может использоваться для текущего (среднесрочного) планирования процессов обработки и транспортировки мелкопартионных потоков корреспонденций и нацелена главным образом на оптимизацию использования имеющихся ресурсов сети.

### 1. Математические модели задач упаковки, распределения и маршрутизации мелкопартионных потоков

Пусть  $G(N, P)$  — иерархическая магистральная сеть с множеством неориентированных дуг  $P$ ,  $p = |P|$ , и множеством узлов  $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$ ,  $n = |N|$ , где  $N_1, N_2, N_3$  — множества узлов первого, второго и третьего типа соответственно,  $\cup$  — знак объединения множеств,  $|\cdot|$  — знак мощности множества. Узлы сети соответствуют пунктам сортировки, отправления, назначения и перегрузки потоков, а дуги — участкам дорог для ТС или каналам связи для СПД, связывающим узлы сети. В [4] предложены структурная схема автоматизированной информационно-аналитической системы (АИАС) поддержки принятия решений для многопродуктовой коммуникационной сети с мелкопартионными потоками и принципы организации сортировки и транспортировки потоков в зонально-узловой структуре сети. Согласно этим принципам в сети выделены магистральный, зональный и внутренний уровни и четыре типа узлов  $i, j, k, m$  (рис. 1). Предполагается, что известны географические координаты всех узлов, т.е. топология сети задана.

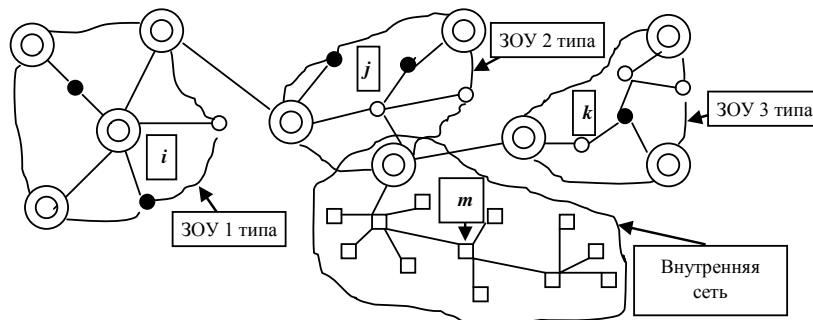


Рис. 1

Зоны обслуживания узла (ЗОУ) любого типа строятся по следующим правилам: 1) от узла проводятся все простые (в терминах теории графов) пути через узлы второго и третьего типа до первых встретившихся узлов первого типа и тупиковых (висячих) узлов второго и третьего типа; 2) определенные по правилу 1 узлы первого типа и тупиковые узлы соединяются условной границей зоны обслуживания узла.

Определенные таким образом области ЗОУ представляют зональные уровни иерархической сети или зональные сети. Внутренние уровни сети представлены централизованными подсетями с различными структурами и содержат только узлы четвертого типа и один главный магистральный узел.

Типы узлов могут быть заданы проектировщиком сети или определяться при решении задачи выбора структуры сети [5, 6]. В последнем случае по критерию минимума приведенных затрат на функционирование сети определяется состав и количество узлов каждого типа в автоматизированном режиме.

На магистральном уровне транспортировка потоков корреспонденций возможна только в транспортных блоках. Узел первого типа может отправлять транспортные блоки в любые другие узлы первого типа, а также в узлы второго и третьего типа, находящиеся в зоне его обслуживания. Узлы второго и третьего типа могут отправлять транспортные блоки только в ближайшие узлы первого типа и в узлы второго и третьего типа, находящиеся в их зоне обслуживания. Входящие потоки в транспортных блоках в узлы второго и третьего типа могут поступать только от узлов, расположенных в зоне обслуживания этих узлов. В узлах второго и третьего типа количество магистральных направлений сортировки мелкопартионных потоков ограничено зоной обслуживания узла, в то время как узлы первого типа могут сортировать мелкопартионные потоки во все магистральные узлы в зоне своего обслуживания и во все другие узлы первого типа в магистральной сети. Узлы второго и третьего типа отличаются функциональными возможностями, уровнем технической оснащенности, числом обслуживающего персонала и пр., в этих узлах запрещена сортировка транзитных мелкопартионных потоков (кроме потоков между узлами четвертого типа во внутренней сети). В узлах третьего типа, в отличие от узлов второго типа, запрещена обработка транзитных потоков транспортных блоков.

Узлы четвертого типа явно не входят в рассматриваемые модели. Предполагается, что исходящие и входящие потоки этих узлов обрабатываются в главном узле (первого, второго или третьего типа) внутренней сети. Исходящие потоки в узлах четвертого типа не сортируются по адресам назначения, а доставляются в главный узел внутренней сети и сортируются вместе с исходящими потоками из главного узла. Процедура преобразования потоков узлов четвертого типа в потоки на магистральной сети тривиальна, так как все узлы четвертого типа обслуживаются только одним главным узлом внутренней сети. Таким образом, принимается, что потоки узлов четвертого типа учтены в потоках между узлами магистральной сети.

Величина входящих во все узлы внешних мелкопартионных потоков изменяется во времени, а сами потоки, как правило, не подчиняются какому-либо известному вероятностному закону распределения. Поэтому для определения среднесуточных потоков, заданных матрицей корреспонденций (которые фигурируют в математических моделях), в АИАС используются современные методы математического моделирования и прогнозирования на основе временных рядов данных, полученных для достаточно длительного отрезка времени (например, на протяжении года). Такие методы реализованы в многочисленных пакетах программ обработки статистических и экспериментальных данных и поддержки принятия решений и позволяют получить высококачественные прогнозы для нелинейных и нестационарных процессов [7]. Нестационарность входящих потоков и других процессов, происходящих в сети, а также возможность с помощью АИАС оперативно управлять обработкой и распределением потоков в реальном масштабе времени и послужили отправной точкой для выбора авторами детерминированных постановок задач. Для определенности в моделях задач в качестве дискретности времени от-

правления потоков для ТС и СПД принимаются одни сутки и одна секунда соответственно. Величина потоков корреспонденций, распределяемых по сети, задана среднесуточными значениями в единицах потока, рассчитанными для конкретных периодов времени, на протяжении которых потоки остаются относительно стабильными.

Итак, задана целочисленная матрица  $A = \|a_{ij}\|_{n \times n}$ , в которой значения  $a_{ij}$  равны сумме мелкопартионных потоков корреспонденций между узлами четвертого типа внутренней сети  $i$ -го узла. Эти потоки не подлежат распределению по магистральной сети, но должны учитываться при расчете затрат на сортировку мелкопартионных потоков в узлах первого, второго и третьего типа. Принимается, что число узлов четвертого типа во внутренней сети каждого  $i$ -го узла первого, второго и третьего типа, а значит, и число направлений сортировки  $q_{BH}^i$  из этих узлов на внутренние узлы четвертого типа известны и относительно постоянны. Корреспонденции  $a_{ij}$  из источников  $i$  в стоки  $j$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $i \neq j$ , упаковываются в транспортные блоки (контейнеры) размера  $\omega$  и отправляются получателям. Предполагается, что при сортировке в узлах любая корреспонденция может объединяться с другими корреспонденциями только целиком.

Введем переменные  $x_{ij}$  и  $u_{ij}$ , определяющие соответственно величину потока корреспонденций из  $i$  в  $j$  в единицах измерения мелкопартионных потоков и в транспортных блоках,  $u_{ij} = \lceil x_{ij} / \omega \rceil$ , где знаки  $\lceil \cdot \rceil$  означают округление числа до большего целого. Обозначим  $S$  множество пар индексов потоков  $(i, j)$ , определенное на декартовом произведении  $n \times n$ .

**Задача 1.** Распределение и объединение мелкопартионных потоков корреспонденций из узлов второго и третьего типа в зональных сетях. Математическая модель задачи и алгоритмы ее решения приведены в [8]. Согласно принципам зонально-узловой сортировки исходящие мелкопартионные потоки корреспонденций из узлов второго и третьего типа рассортировываются в узлы первого типа, лежащие на границе зон их обслуживания. Для решения задачи сеть  $G(N, P)$  преобразуется в сеть  $G_D(N, P_D)$ , где  $P_D$  — множество ориентированных дуг с длинами, равными длинам кратчайших путей от всех узлов  $i \in N_2 \cup N_3$  до узлов первого типа, находящихся в зоне обслуживания  $i$ -го узла, и кратчайших путей между всеми узлами первого типа. Далее для распределения всех потоков узлов второго и третьего типа на сети  $G_D$  решается задача линейного программирования с блочно-диагональной структурой ограничений. Структурные особенности задачи позволяют использовать для ее решения метод декомпозиции Данцига–Вулфа. Для практического решения задачи в [8] также предложены приближенные алгоритмы, основанные на методах построения кратчайших путей. В результате решения формируются: преобразованная матрица мелкопартионных потоков корреспонденций  $X = \|x_{ij}\|_{n \times n}$ ; элементы справочной матрицы объединения мелкопартионных потоков для узлов второго и третьего типа (матрицы  $C$ , см. далее по тексту). В строках и столбцах преобразованной матрицы  $X$  для узлов второго и третьего типа ненулевые значения будут присутствовать только для узлов первого типа, которые находятся в зоне обслуживания узлов второго и третьего типа, а в потоках между узлами первого типа будут учтены все потоки узлов второго и третьего типа.

**Задача 2.** Распределение и объединение мелкопартионных потоков корреспонденций между узлами первого типа в магистральной сети. На вход задачи после решения задачи 1 поступают частично преобразованная матрица потоков  $X$  и частично сформированная (только для исходящих потоков из узлов второго и третьего типа) справочная матрица объединения потоков  $C$ .

Постановка задачи заключается в следующем. Требуется минимизировать функцию

$$\sum_{ij \in S} C_{tr}^{ij}(u_{ij}, d_{ij}) + \sum_{i=1}^n C_{sort}^i(a_i, q_i) + \sum_{i=1}^n C_{load}^i(u_i), \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n x_{ji} - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ji}, \quad i = \overline{1, n}; \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^n (x_{ij} + x_{ji}) - \sum_{j=1, j \neq i}^n (a_{ij} + a_{ji}) \right\} \leq h_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Здесь

$$u_{ij} = \lceil x_{ij} / \omega \rceil, \quad a_i = a_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n (a_{ij} + a_{ji}) + \frac{\left\{ \sum_{j=1}^n (x_{ij} + x_{ji}) - \sum_{j=1, j \neq i}^n (a_{ij} + a_{ji}) \right\}}{2}, \quad i = \overline{1, n};$$

$$x_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + \sum_{rs \in \Omega_{ij}} a_{rs}, & \text{если потоки } \{a_{rs}\} \text{ объединены с потоком } a_{ij}, \\ 0, & \text{если поток } a_{ij} \text{ объединен с каким-либо другим потоком,} \\ \text{или } i = j \text{ для } ij \in S; \end{cases}$$

$\Omega_{ij}$  — множество индексов  $rs$  потоков  $\{a_{rs}\}$ , объединенных с потоком  $a_{ij}$  (множество  $\Omega_{ij}$  может быть пустым);

$$q_i = q_{BH}^i + \sum_{j=1}^n \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{ij} \neq 0, \\ 0, & \text{если } x_{ij} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \end{cases}$$

$a_i$ ,  $x_{ij}$  и  $q_i$  определяются с учетом частично преобразованной матрицы  $X$ .

При решении задачи также учитываются ограничения (которые трудно выразить через потоковые переменные) на время доставки мелкопартионных корреспонденций адресату  $t_{ij} \leq T_{ij}$ ,  $ij \in S$ , и число их объединений с другими корреспонденциями  $v_{ij} \leq v_{\max}$ ,  $ij \in S$ .

В формулах введены следующие обозначения:  $C_{tr}^{ij}(u_{ij}, d_{ij})$  — в общем случае нелинейная и невыпуклая функция транспортных затрат, зависящая от количества транспортных блоков  $u_{ij} = \lceil x_{ij} / \omega \rceil$  и длины  $d_{ij}$  пути их транспортировки (передачи) между узлами  $i$  и  $j$ ;  $C_{sort}^i$  — нелинейная функция затрат на сортировку мелкопартионных потоков корреспонденций в узле  $i$ ;  $C_{load}^i$  — нелинейная функция затрат на обработку транспортных блоков в узле  $i$ ;  $h_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , — максимальная пропускная способность  $i$ -го узла в единицах измерения мелкопартионных потоков. Пропускная способность задается для транзитных потоков, так как исходящие и входящие потоки для каждого узла должны быть обработаны безусловно. Для узлов второго и третьего типа  $h_i = 0$ ;  $u_i = \sum_{j=1}^n (u_{ij} + u_{ji})$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $t_{ij}$ ,  $T_{ij}$ ,  $ij \in S$  — расчетное среднее и допустимое максимальное время на доставку корреспонденции  $a_{ij}$  из  $i$  в  $j$ . При расчете времени доставки используются параметры, явно не входящие

в модель: заданное время на сортировку мелкопартионных потоков в узлах сети, время на транзитную перегрузку транспортных блоков в узлах сети, средняя скорость движения транспортных средств или передачи сообщений и др. (см. разд. 3);  $v_{ij}$ ,  $ij \in S$ ,  $v_{\max}$  — число объединений корреспонденции  $a_{ij}$  с другими корреспонденциями при ее транспортировке (передаче) из узла  $i$  в узел  $j$  и максимально допустимое число таких объединений.

В задаче 2 рассматриваются только мелкопартионные потоки между всеми узлами первого типа, поскольку потоки узлов второго и третьего типа уже преобразованы. Сущность процесса преобразования потоков при решении задачи заключается в том, что над потоками  $x_{ij}$  итеративно выполняются следующие операции:  $x'_{ik} = x_{ik} + x_{ij}$ ,  $x'_{kj} = x_{kj} + x_{ij}$ ,  $c_{ij} = k$ ,  $x_{ij} = 0$ , где  $k$  — узел первого типа, через который выполняется преобразование;  $c_{ij}$  — элементы справочной матрицы объединения потоков  $C = \|c_{ij}\|_{n \times n}$  [9], которые определяются так:

$$c_{ij} = \begin{cases} k, & \text{если поток } x_{ij} \text{ объединяется с потоком } x_{ik}, \\ j, & \text{если поток } x_{ij} \text{ направляется в узел } j, \\ 0, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Наиболее принципиальными моментами, возникающими при построении алгоритмов решения задачи, являются: выбор потока  $x_{ij}$ , подлежащего преобразованию; определение узла  $k$ , через который следует выполнить преобразование. В работах [10, 11] предложены различные эвристические алгоритмы решения задачи 2, а также проведено экспериментальное сравнение их вычислительной эффективности.

Основные результаты решения задачи следующие: потоковая матрица  $U = \|u_{ij}\|_{n \times n}$  в транспортных блоках; матрица предварительных оценок времени доставки мелкопартионных потоков адресатам; справочная матрица объединения мелкопартионных потоков. Эти результаты используются как входные данные для решения задачи распределения и маршрутизации потоков транспортных блоков. Справочная матрица объединения потоков является главным результатом решения задач 1 и 2. Она полностью определяет схему сортировки мелкопартионных потоков корреспонденций во всех узлах сети и адресует потоки транспортных блоков, которые будут распределены по маршрутам транспортных средств или по каналам связи. В узлах реальной транспортной сети или сети передачи данных справочная матрица используется для автоматизированного управления оборудованием, осуществляющим процессы сортировки адресных грузов, или как таблица слияния сообщений в виртуальные контейнеры.

При решении задачи 2 рассчитываются только предварительные оценки транспортных затрат и затрат на обработку транспортных блоков. Реальные оценки этих затрат могут быть получены только после решения задачи распределения и маршрутизации сформированных транспортных блоков на транспортной сети или сети передачи данных (в затратах на обработку транспортных блоков в узлах сети учитываются только исходящие и входящие потоки, транзитные потоки не учитываются; для транспортных сетей не учитываются затраты на перевозку и обработку порожних контейнеров). Затраты на сортировку мелкопартионных потоков в узлах сети отражают реальные затраты.

Задачи 1 и 2 используются при решении задачи выбора иерархической структуры сети [5, 6]. Если начальная структура сети не задана (не определены узлы первого, второго и третьего типа), то типы и зоны обслуживания узлов определяются при ее решении.

**Задача 3.** Балансировка матрицы потоков в транспортных блоках (или задача развозки порожних контейнеров). Такая задача возникает для транспортных сетей в случае, если мелкопартионные грузы перевозятся в многооборотной таре — жестких контейнерах. На вход задачи поступает матрица потоков  $U = \|u_{ij}\|_{n \times n}$ , полученная после решения задачи 2. Матрица  $U$  не сбалансирована, поскольку для большинства узлов не выполняется условие

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n (u_{ij} - u_{ji}) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Задача сводится к классической транспортной задаче и решается известными методами по критерию минимума расстояния от узлов источников до узлов потребителей порожних контейнеров. Для балансировки матрицы  $U$  потоки порожних контейнеров добавляются к потокам загруженных контейнеров с такими же адресами назначения.

**Задача 4.** Распределение и маршрутизация потоков транспортных блоков. На вход задачи поступают: исходная  $A = \|a_{ij}\|_{n \times n}$  и преобразованная  $X = \|x_{ij}\|_{n \times n}$  матрицы мелкопартионных потоков, справочная матрица объединения потоков  $C = \|c_{ij}\|_{n \times n}$ , несбалансированная или сбалансированная матрица потоков  $U = \|u_{ij}\|_{n \times n}$  в транспортных блоках и другие данные, полученные после решения задачи 2.

Пусть  $\{m_k\}$ ,  $k = \overline{1, l}$ , — заданное множество проектируемых маршрутов транспортных средств или каналов связи. Каждый маршрут транспортного средства состоит из последовательности узлов и дуг сети  $G$ , соединяющей начальный и конечный узлы маршрута. Каналы связи могут быть простыми, представленными одной дугой в сети  $G$ , или коммутированными (выделенными), и состоять из нескольких дуг, как и маршруты транспортных средств. Предполагается, что в множестве  $\{m_k\}$  кроме проектируемых маршрутов для каждой неориентированной дуги сети  $G$  имеется прямой и обратный маршруты и в процессе решения задачи в множество  $\{m_k\}$  могут включаться новые маршруты, генерируемые по определенным правилам. Множество  $\{m_k\}$  может содержать несколько маршрутов, соединяющих любую пару узлов.

Определим  $G_M(N, P_M)$  — маршрутную мультисеть (построенную транзитивным замыканием узлов всех маршрутов из  $\{m_k\}$ ), где  $N$  — множество узлов сети,  $P_M$  — множество ее ориентированных маршрутных дуг. Между любыми узлами  $i$  и  $j$  сети  $G_M$  существует маршрутная дуга, если они связаны хотя бы одним маршрутом из  $\{m_k\}$ . Введем переменные:  $u_{ij, k}^{\alpha\beta}$  — неизвестный поток транспортных блоков из  $i$  в  $j$ , проходящий по дуге  $p_{\alpha\beta} \in P_M$ , полученной из маршрута  $m_k$  ( $u_{ij, k}^{\alpha\beta}$  определяют дуговые потоки в транспортных блоках на маршрутной сети  $G_M$ );  $u_{ij, k}^{\eta\xi}$  — поток транспортных блоков из  $i$  в  $j$ , проходящий по дуге  $p_{\eta\xi} \in P$  на маршруте  $m_k$ . Потоки  $u_{ij, k}^{\eta\xi}$  определяются из потоков  $u_{ij, k}^{\alpha\beta}$  оператором  $\Phi: u_{ij, k}^{\alpha\beta} \Rightarrow \{u_{ij, k}^{\eta\xi}\}$ ,  $p_{\alpha\beta} \in P_M$ ,  $p_{\eta\xi} \in P$ ,  $ij \in S$ ,  $k = \overline{1, l}$ , отображающим поток по маршрутной дуге маршрута  $m_k$  в сети  $G_M$  на соответствующее подмножество дуг маршрута  $m_k$  в сети  $G$ .

Формальная запись задачи имеет следующий вид: требуется минимизировать функцию

$$\sum_{k=1}^l C_{tr}^k \left( \left( \sum_{\eta\xi \in q_k} \sum_{ij \in S} u_{ij,k}^{\eta\xi} \right), d_k \right) + \sum_{\beta=1}^n C_{load}^{\beta} \left( \sum_{\alpha=1}^n \sum_{k=1}^l \sum_{ij \in S} (u_{ij,k}^{\alpha\beta} + u_{ij,k}^{\beta\alpha}) \right) \quad (4)$$

при ограничениях:

$$\sum_{\beta=1}^n \sum_{k=1}^l u_{ij,k}^{\alpha\beta} - \sum_{\beta=1}^n \sum_{k=1}^l u_{ij,k}^{\beta\alpha} = \begin{cases} u_{ij} & \text{при } i = \alpha, \\ 0 & \text{при } i \neq \alpha, j \neq \alpha, \\ -u_{ij} & \text{при } j = \alpha \text{ для } \alpha = \overline{1, n}, ij \in S; \end{cases} \quad (5)$$

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{k=1}^l \sum_{ij \in S} (u_{ij,k}^{\alpha\beta} + u_{ij,k}^{\beta\alpha}) - \sum_{j=1}^n (u_{\beta j} + u_{j\beta}) \leq 2b_{\beta}, \quad \beta = \overline{1, n}; \quad (6)$$

$$\sum_{ij \in S} u_{ij,k}^{\eta\xi} \leq W_{\eta\xi}^k \text{ для всех } \eta\xi \in q_k, k = \overline{1, l}; \quad (7)$$

$$\sum_{\beta=1}^n \sum_{ij \in S} (u_{ij,k}^{\alpha\beta} + u_{ij,k}^{\beta\alpha}) \leq b_{\alpha}^k, \quad \alpha \in v_k, k = \overline{1, l}; \quad (8)$$

$$t_{av} = 1/u_{\Sigma} \sum_{k=1}^l \sum_{\eta\xi \in q_k} f_{\eta\xi}^k / (W_{\eta\xi}^k - f_{\eta\xi}^k) \leq T_{\max}, \text{ где } u_{\Sigma} = \sum_{ij \in S} u_{ij}, f_{\eta\xi}^k = \sum_{ij \in S} u_{ij,k}^{\eta\xi}; \quad (9)$$

$$u_{ij,k}^{\alpha\beta} \geq 0, u_{ij,k}^{\eta\xi} \geq 0 \text{ — целые числа.} \quad (10)$$

К указанным ограничениям могут быть добавлены ограничения на запрет разветвления потоков:

$$u_{ij,k}^{\alpha\beta} = \begin{cases} u_{ij}, & \text{если поток проходит по дуге } \alpha\beta \in m_k, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (11)$$

При решении задачи также учитываются ограничения  $t_{ij} \leq T_{ij}, ij \in S$ , на время доставки мелкопартионных корреспонденций адресату.

В формулах приняты следующие обозначения:  $C_{tr}^k$  — нелинейная и, в общем случае, несепарабельная функция транспортных затрат от количества транспортных блоков, передаваемых по маршруту  $m_k$ , и длины маршрута  $d_k$ . Длина маршрута  $d_k$  равна сумме длин составляющих его дуг;  $q_k$  — упорядоченное множество дуг из  $P$ , составляющих маршрут  $m_k$ ;  $b_{\beta}, \beta = \overline{1, n}$ , — максимальная пропускная способность  $\beta$ -го узла в транспортных блоках. Так же, как и для  $h_i$ , пропускная способность  $b_{\beta}$  задается для транзитных потоков. Для узлов третьего типа  $b_{\beta} = 0$ ;  $W_{\eta\xi}^k$  — грузоподъемность транспортного средства или пропускная способность канала связи на маршруте  $m_k$  на дуге  $\eta\xi \in P$  в транспортных блоках,  $W_{\eta\xi}^k \in \{w_1, w_2, \dots, w_v\}$ , где  $w_1, w_2, \dots, w_v$  — целые, упорядоченные по возрастанию положительные числа;  $b_{\alpha}^k$  — ограничения на максимальное суммарное число транспортных блоков, которое можно обработать в транзитном узле  $\alpha$  на маршруте  $m_k$ ;  $v_k$  — упорядоченное множество узлов из  $N$  на маршруте  $m_k$ ;  $t_{av}, T_{\max}$  — расчетная средняя и допустимая максимальная задержка в передаче транспортных блоков в сети.

Первая составляющая целевой функции определяет транспортные затраты, вторая — затраты на обработку транспортных блоков (контейнеров). Условия (6)



представляют собой ограничения на пропускные способности узлов, (7) — грузоподъемность транспортных средств или пропускную способность каналов связи, (8) — объемы обработки транспортных блоков в узлах следования транспортных средств или в коммутированных узлах сети передачи данных, (9) — средняя задержка в передаче транспортных блоков в сети. Условия (5) обеспечивают неразрывность потока.

Для решения задачи 4 предложена группа алгоритмов, основанных на эвристических подходах к решению многомерной задачи о ранце и эффективной технике представления структур данных [12].

## 2. Методика решения задач

По существу, методика решения задач представляет собой информационную (компьютерную) технологию, состоящую из сценариев действий проектировщика и программной системы (Use Case) при выборе структуры, исходных данных и параметров проектируемой сети. Предполагается, что сценарии реализованы в виде многооконного и многослойного графического интерфейса, позволяющего в картографическом виде просматривать структуру сети и ее отдельные фрагменты; исходящие и входящие потоки в узлах сети; значения всех заданных ограничений и параметров оптимизации; результаты оптимизации для различных вариантов решения задачи и пр. Проектировщик в режиме диалога может изменять значения исходных данных и параметров задачи, получать множество решений и выбирать из них наиболее подходящее. При этом он всегда может сравнить варианты решения по оценке технико-экономических показателей функционирования сети в зависимости от выбранных параметров и критериев предпочтения. Приведем кратко основные этапы методики.

**Этап 1.** Для заданной топологии сети  $G(N, P)$  с потоками  $A = \|a_{ij}\|_{n \times n}$ : указать тип каждого узла (первый, второй, третий). Типы узлов можно не указывать, тогда они будут определяться автоматически при оптимизации структуры сети. Задать функции затрат на сортировку мелкопартионных потоков ( $C_{sort}^i$ ) и обработку транспортных блоков ( $C_{load}^i$ ) в узлах сети; для всех узлов в сети указать ограничения на пропускные способности  $h_i$  и  $b_i$ ; установить ограничения на время доставки мелкопартионных потоков между всеми узлами сети ( $T_{ij}$ ) и ограничение на среднюю задержку потоков транспортных блоков в сети ( $T_{max}$ ); установить максимальное нормированное время обработки (сортировки) мелкопартионных потоков ( $T_a$ ) и максимальное нормированное время транзитной обработки транспортных блоков ( $T_b$ ) в узлах сети. Параметры  $T_a$  и  $T_b$  явно не входят в модель, но используются при расчете значений  $t_{ij}$ ; задать размер транспортного блока —  $\omega$  и максимальное число объединений мелкопартионных потоков корреспонденций —  $v_{max}$ ; задать множество проектируемых маршрутов —  $\{m_k\}$ ,  $k = \overline{1, l}$ . Для каждого маршрута указать ограничения на грузоподъемность транспортного средства или пропускную способность канала связи —  $W_{\eta\xi}^k$ ; ограничения на максимальное суммарное число транспортных блоков, которое можно обработать в узле  $\alpha$  —  $b_\alpha^k$ ; среднюю скорость и периодичность движения транспортных средств или передачи информации; функцию затрат —  $C_{tr}^k$ . По желанию проектировщика сети может быть указана необходимость автоматической генерации множества маршрутов, из которых будут отобраны наиболее рациональные, соответствующие заданным ограничениям и параметрам задачи.

**Этап 2.** Для заданной топологии сети, исходных данных и параметров решить задачу выбора структуры сети. Решение может выполняться в двух режимах: при экспертном задании и автоматическом выборе типов узлов. В любом случае будут решаться задачи 1 и 2 для различных составов типов узлов, пока не будет найдена структура сети, при которой минимизируются суммарные приведенные затраты (1) на ее функционирование. Для любого режима оптимизации после получения и анализа результатов решения проектировщик может выборочно (последовательно или одновременно) изменять параметры  $T_a$ ,  $T_b$ ,  $\omega$ ,  $v_{\max}$ ,  $W_{\eta\xi}^k$ , среднюю скорость движения транспортных средств (скорость передачи информации по каналам связи принимается постоянной и равна 25000 км/с), коэффициент прогнозирования потоков. При решении задачи 2 могут быть ослаблены ограничения (3) на пропускные способности узлов и ограничения на время доставки мелкопартионных потоков корреспонденту адресату  $t_{ij} \leq T_{ij}$ ,  $ij \in S$ . Учитывая, что значения  $T_{ij}$  могут быть изначально заданы некорректно, так как заранее неизвестно, по каким путям будут переданы потоки, осуществляется проверка соответствия заданных значений  $T_{ij}$  расчетным  $T_{ij}^r$ , полученным при условном распределении всех потоков по кратчайшим путям по критерию — минимум транзитных узлов на пути следования потока, минимум длины пути. При некорректном задании отдельных значений  $T_{ij}$  необходимо ввести соответствующую поправку для корректировки этих значений. Начальное задание  $T_{ij}$  может быть выполнено автоматически путем расчета времени передачи всех потоков по кратчайшим путям по указанному выше критерию и последующим увеличением полученных значений на вводимую константу. Изменение времени доставки мелкопартионных потоков на величину поправки (например, кратную  $T_a$ ) означает разрешение дополнительных объединений потоков на всех возможных путях их передачи. При решении задачи 2 время доставки рассчитывается предварительно. Окончательный расчет времени доставки выполняется при решении задачи распределения и маршрутизации транспортных блоков, когда определяются фактические пути транспортировки (передачи) потоков. После выбора окончательного варианта решения задачи 2 для транспортной сети может быть решена задача развозки порожних контейнеров.

Все три задачи объединены в одном инструментальном блоке решения.

**Этап 3.** Решить задачу 4 для транспортной сети или сети передачи данных. Для каждого типа сети имеется несколько режимов работы блока оптимизации, которые связаны с разрешением или запрещением разветвления потоков транспортных блоков (11) при их распределении по маршрутам транспортных средств или каналам связи; введением новых маршрутов в случае невозможности распределения всех потоков при заданных маршрутах и ограничениях; генерацией множества шаблонов маршрутов и выбором из них наиболее рациональных для распределения всех потоков при заданных ограничениях; выборочным ослаблением ограничений (6)–(9) и  $t_{ij} \leq T_{ij}$ ,  $ij \in S$ . При распределении и маршрутизации потоков с ограничением (9) решается задача выбора грузоподъемности транспортных средств или пропускных способностей каналов связи, содержательная постановка и математическая модель которой приведены в [13], а также описана методика и формулы для расчета  $t_{ij}$  и  $t_{av}$ . Использование различных режимов работы дает возможность проектировщику анализировать и оценивать варианты решения задачи на различных стадиях проектирования сети при имеющихся или планируемых ресурсах. При использовании адекватных функций затрат проектировщик может оперировать реальными среднегодовыми приведенными затратами, необходимыми для приобретения и эксплуатации оборудования при выбранных структуре, исходных данных и параметрах проектируемой сети.

### 3. Численный эксперимент

Для проведения эксперимента была сгенерирована датчиком псевдослучайных чисел автотранспортная сеть контейнерных перевозок  $G$  с числом узлов  $n = 120$  и числом исходящих дуг из каждого узла (степенью узлов)  $val = 5$ . Длины дуг генерировались в пределах от 80 до 300 км, а величина исходящих мелкопартионных потоков грузов из узлов первого типа задавалась в пределах от 1 до 9 единиц, из узлов 2 и 3 типа — в пределах от 1 до 5 единиц. Для сети  $G$  было сгенерировано 28 узлов второго типа и 92 узла первого типа. Предполагалось, что маршруты  $\{m_k\}$ ,  $k = \overline{1, l}$ , транспортных средств совпадают с дугами сети и движение по маршрутам разрешено в обе стороны, поэтому было сгенерировано  $l = \frac{120 \cdot 5}{2} = 300$  проектируемых маршрутов.

Принимались следующие значения параметров: размер контейнера  $\omega = 40$  единицам мелкопартионных грузов; время на обработку (сортировку) мелкопартионных грузов в узлах сети  $T_a = 24$  ч; грузоподъемность автотранспортных средств  $W_{\eta\xi}^k$  на всех дугах  $\eta\xi \in q_k$  всех маршрутов  $\{m_k\}$ ,  $k = \overline{1, l}$ , принималась одинаковой, равной  $W$ , и варьировалась в пределах  $W \in \{40, 20, 10\}$  контейнеров; время на транзитную перегрузку контейнеров в узлах сети  $T_b = 12$  ч; время стоянки транспортных средств в конечных узлах маршрутов  $T_{end} = 22$  ч; периодичность движения транспортных средств  $T_{move} = 24$  ч; средняя скорость движения транспортных средств  $V_{move} = 80$  км/час; суточные пропускные способности узлов по обработке транзита  $h_i$  и  $b_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , принимались равными 5000 единиц мелкопартионных грузов и 500 контейнеров соответственно; время доставки мелкопартионных грузов адресату  $t_{ij}$  рассчитывалось в сутках, поэтому максимальное время доставки задавалось в сутках и принималось  $T_{ij} = 15$  сут. для всех  $ij \in S$ ; максимальное число объединений мелкопартионных грузов  $v_{max}$  не ограничивалось; средняя задержка контейнеров в сети  $t_{av}$  рассчитывалась, а их максимальная задержка  $T_{max}$  не ограничивалась; разветвление потоков контейнеров запрещено.

Для расчета среднегодовых приведенных затрат на транспортировку и обработку потоков использовались формулы для автотранспортных сетей, приведенные в [12].

Задача оптимизации структуры сети решалась для  $W \in \{40, 20, 10\}$  при неизменных значениях потоков мелкопартионных грузов и других заданных параметров. Для всех значений  $W$  получена одна и та же структура сети, содержащая 79 узлов первого типа и 41 узел второго типа. Поэтому для решения задач распределения и маршрутизации потоков порожних и груженых контейнеров для  $W \in \{40, 20, 10\}$  как входные данные принимались результаты решения задачи оптимизации структуры сети, полученные при  $W = 40$ .

Результаты решения задач на исходной и оптимизированной сети для грузоподъемности транспортных средств  $W = 40, 20, 10$  приведены в табл. 1 и 2 и на рис. 2, 3. Так, на рис. 2 показана зависимость полных среднегодовых приведенных затрат ( $a$ ), рабочего парка транспортных средств ( $b$ ), коэффициента загрузки транспортных средств ( $e$ ) от грузоподъемности транспортных средств для варианта  $V_1$ . На рис. 3 приведено максимальное ( $a$ ) и среднее ( $b$ ) время доставки грузов получателю в сутках при изменении грузоподъемности транспортных средств для варианта  $V_2$ . В таблицах приняты следующие обозначения:  $C_{all}$ ,  $C_{tr}$ ,  $C_{sort}$ ,  $C_{load}$  — полные

( $C_{all} = C_{tr} + C_{sort} + C_{load}$ ), транспортные, сортировочные, погрузочно-разгрузочные среднегодовые приведенные затраты в миллионах условных единиц;  $l, l^+, l^0$  — количество заданных, введенных и загруженных маршрутов транспортных средств;  $D_{tr}$  — рабочий парк транспортных средств;  $K_{tr}$  — средний коэффициент загрузки транспортного средства;  $D_{con}$  — рабочий парк контейнеров;  $K_{con}$  — средний коэффициент загрузки контейнера;  $N_{sort}$  — среднее число магистральных направлений сортировки мелкопартионных грузов в узле сети;  $t_{min}, t_{max}, t_{mean}$  — минимальное, максимальное и среднее время доставки мелкопартионных грузов получателю в сутках;  $V_1, V_2, V_3$  — варианты решения задачи.

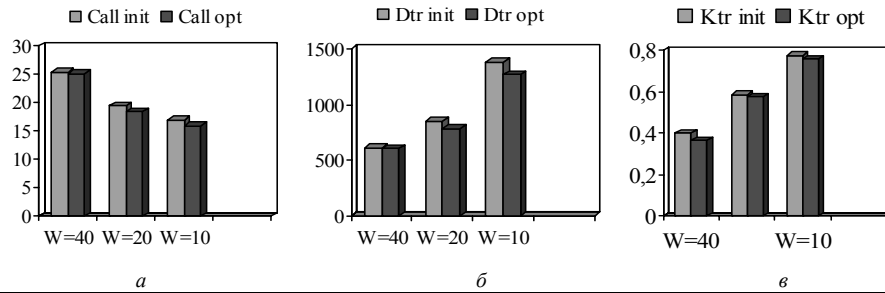


Рис.2

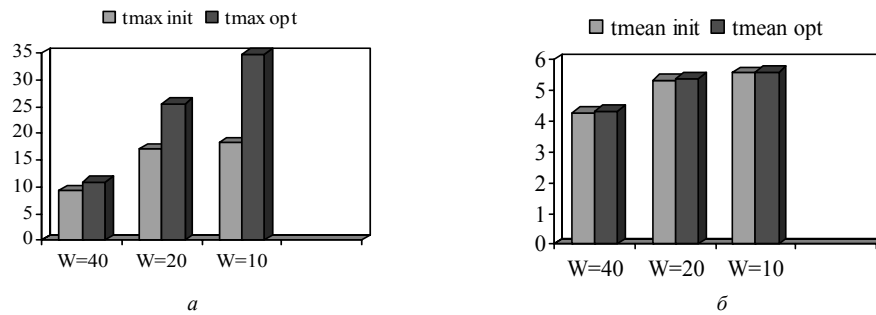


Рис.3

Таблица 1

Результаты решения	Исходная сеть $N_1 = 92, N_2 = 28$								
	$W = 40$			$W = 20$			$W = 10$		
	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_1$	$V_2$	$V_3$
$C_{all}$	25,396	25,186	152,78	19,464	19,337	79,397	16,975	19,048	42,706
$C_{tr}$	20,002	19,770	148,17	14,069	13,488	74,791	11,581	13,030	38,100
$C_{sort}$	3,216	3,216	3,216	3,216	3,216	3,216	3,216	3,216	3,216
$C_{load}$	2,178	2,200	1,389	2,178	2,632	1,389	2,178	2,802	1,390
$l$	300	300	7140	300	300	7140	300	300	7140
$l^+$	5	0	0	126	97	0	388	461	0
$l^0$	305	300	900	426	397	900	688	761	900
$D_{tr}$	610	600	1819	852	794	1819	1376	1522	1819
$K_{tr}$	0,400	0,412	0,055	0,587	0,806	0,109	0,775	0,905	0,221
$D_{con}$	14573	14638	13041	14573	16093	13041	14573	16715	13041
$K_{con}$	0,637	0,637	0,637	0,637	0,637	0,637	0,637	0,637	0,637
$N_{sort}$	21	21	21	21	21	21	21	21	21
$t_{min}$	2,042	2,042	2,042	2,042	2,042	2,042	2,042	2,042	2,042
$t_{max}$	6,738	9,359	4,775	6,738	16,999	4,775	6,738	18,302	4,775
$t_{mean}$	4,205	4,266	3,393	4,205	5,317	3,393	4,205	5,570	3,393

В вариантах  $V_1$  и  $V_2$  распределение потоков контейнеров осуществлялось по заданным маршрутам, совпадающим с дугами сети  $G$ , и при невозможности распределения всех потоков разрешалось введение новых маршрутов. В варианте  $V_1$  ограничения на время доставки мелкопартионных грузов получателю  $T_{ij}$  учитывались, а в варианте  $V_2$  ослаблялись. В варианте  $V_3$  для каждой пары узлов  $(i, j)$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $j = \overline{i+1, n}$ , в сети  $G$  генерировался маршрут транспортного средства по критерию: минимум транзитных узлов, при равенстве числа транзитных узлов — минимум длины. Всего сгенерировано  $l = n(n-1)/2 = 120 \times 119/2 = 7140$  маршрутов, движение транспортных средств по маршрутам разрешалось в обе стороны. В варианте  $V_3$  любой поток контейнеров может быть доставлен получателю без транзитных перегрузок, т.е. в узлах сети нет транзитных потоков контейнеров. Этот крайний случай введен для того, чтобы оценить, как максимальное сокращение времени доставки мелкопартионных грузов получателю  $t_{ij}$  отражается на экономических показателях сети. Из таблиц видно, что для вариантов  $V_1$  и  $V_2$  при  $W = 40$  и  $W = 20$  полные затраты при ослаблении ограничений на  $t_{ij}$  уменьшаются незначительно, а  $t_{\max}$  заметно растет (см. рис. 3, а). При  $W = 10$ , когда достигается максимальная загрузка транспортных средств, в варианте  $V_2$  полные затраты не уменьшаются, а увеличиваются за счет распределения потоков по более длинным путям и увеличения рабочего парка контейнеров.

Таблица 2

Результаты решения	Оптимизированная сеть $N_1 = 79$ , $N_2 = 41$								
	$W = 40$			$W = 20$			$W = 10$		
	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_1$	$V_2$	$V_3$
$C_{all}$	25,116	25,030	116,64	18,430	18,415	61,336	15,993	17,679	33,687
$C_{tr}$	19,798	19,699	111,98	13,111	12,691	56,680	10,674	11,820	29,031
$C_{sort}$	3,293	3,293	3,293	3,293	3,293	3,293	3,293	3,293	3,293
$C_{load}$	2,026	2,038	1,363	2,026	2,431	1,363	2,026	2,566	1,363
$l$	300	300	7140	300	300	7140	300	300	7140
$l^+$	2	0	0	93	71	0	334	390	0
$l^0$	302	300	722	393	371	722	633	690	722
$D_{tr}$	604	600	1455	786	742	1455	1266	1380	1455
$K_{tr}$	0,364	0,370	0,064	0,575	0,783	0,128	0,758	0,902	0,259
$D_{con}$	13945	13983	12783	13945	15329	12783	13945	15762	12783
$K_{con}$	0,643	0,643	0,643	0,643	0,643	0,643	0,643	0,643	0,643
$N_{sort}$	19	19	19	19	19	19	19	19	19
$t_{\min}$	2,042	2,042	2,042	2,042	2,042	2,042	2,042	2,042	2,042
$t_{\max}$	7,251	11,012	6,554	7,251	25,573	6,554	7,251	34,835	6,554
$t_{\text{mean}}$	4,275	4,311	3,488	4,275	5,367	3,488	4,275	5,594	3,488

Поэтому при уменьшении грузоподъемности лучшее решение может быть получено при заданных ограничениях на  $t_{ij}$ . Среднее время доставки  $t_{\text{mean}}$  остается для всех вариантов достаточно стабильным (рис. 3, б). В варианте  $V_3$  при уменьшении грузоподъемности транспортных средств наблюдается значительное снижение полных затрат при наименьших значениях  $t_{\max}$  и  $t_{\text{mean}}$ . Это означает, что наилучшее решение задачи может быть получено в варианте  $V_3$  при дальнейшем снижении грузоподъемности и отклонении потоков с кратчайших путей для увеличения загрузки транспортных средств.

## Заключення

В настоящей работе приведена методика решения задач упаковки, распределения и маршрутизации мелкопартионных потоков в иерархической многопродуктовой сети. Она включает комплекс математических моделей, алгоритмов решения и компьютерную технологию, которые позволяют:

- моделировать различные варианты транспортной сети или сети передачи данных, в интерактивном режиме оптимизации изменяя топологию, иерархическую структуру, потоки, маршруты транспортных средств или передачи информации, всевозможные параметры и ограничения модели, и из семейства полученных результатов выбирать наилучший вариант с учетом значения функции цели и принятых ограничений;

- повысить эффективность функционирования сети на уровне текущего планирования за счет оптимизации использования ее имеющихся ресурсов и снижения эксплуатационных затрат, снижение затрат позволяет уменьшать тарифы на перевозку мелкопартионных грузов или передачу информации, привлекать дополнительную клиентуру и обеспечивать постоянный прирост прибыли;

- перераспределять потоки при возникновении отказов оборудования в узлах и на транспортных маршрутах сети, непредвиденных ситуаций, стихийных бедствий и пр.;

- получать предварительные технико-экономические показатели функционирования сети при прогнозных значениях потоков, оценивать стоимость дополнительных ресурсов и планировать величину потребных инвестиций на модернизацию и строительство структурных элементов сети и др.

Экспериментальные исследования показали высокую вычислительную эффективность предложенных алгоритмов и программ и могут быть рекомендованы для практического решения задач оптимизации процессов обработки и транспортировки потоков в транспортных сетях и сетях передачи данных (время счета всех задач на транспортной сети, содержащей 120 узлов и 300 неориентированных дуг не превышало 30 с на ПЭВМ с процессором Intel Core 2 Duo с тактовой частотой 2,66 ГГц и оперативной памятью 2 Гб.).

*О.М. Трофимчук, В.О. Васянин*

### МОДЕЛЮВАННЯ УПАКОВКИ, РОЗПОДІЛУ ТА МАРШРУТИЗАЦІЇ ДРІБНОПАРТІОННИХ ПОТОКІВ У БАГАТОПРОДУКТОВІЙ МЕРЕЖІ

Запропоновано методику розв'язання узагальненої задачі мінімізації нелінійної функції витрат на переробку та розподіл дрібнопартионних дискретних потоків у ієрархічній багатопродуктовій мережі. Методика дає змогу в інтерактивному режимі вибрати ієрархічну структуру мережі і визначити основні техніко-економічні показники її функціонування при змінюванні вхідних даних і параметрів. Результати експериментального чисельного моделювання розв'язання задачі для конкретної мережі, згенерованої датчиком псевдовипадкових чисел, показали продуктивність методики і високу обчислювальну ефективність запропонованих методів та алгоритмів субоптимального розв'язання *NP*-важкої початкової задачі.

*A.N. Trofimchuk, V.A. Vasyanin*

### SIMULATION OF PACKING, DISTRIBUTION AND ROUTING OF SMALL FLOWS IN MULTICOMMODITY NETWORK

Techniques of solution of generalized problem of minimization of nonlinear function of expenditures on processing and distributing the small discrete flows in hierarchical

multicommodity network is proposed. Technique makes it possible in the interactive regime to realize a selection of the hierarchic structure of network and to determine the basic technical and economic indices of its functioning at change in the initial data and parameters. Results of experimental numerical simulation of problem solution on a concrete network, generated by sensor pseudorandom numbers, showed the capacity for work of the proposed techniques and the high computational effectiveness of suggested methods and algorithms of the suboptimal solution of *NP*-hard original problem.

1. *Cohn A., Barnhart C.* Improving crew scheduling by incorporating key maintenance routing decisions // *Operations Research*. — 2003. — **51**. — P. 387–396.
2. *Cohn A., Root S., Wang A., Mohr D.* Integration of the load matching and routing problem with equipment balancing for small package carriers. — University of Michigan Industrial and Operations Engineering: Technical Rep. N 05–04. — 2005. — 31 p. (see also *Transportation Science*. — 2007. — **41**, N 2. — P. 238)
3. *Васянин В.А.* Обобщенная задача упаковки и распределения мелкопартионных потоков в многопродуктовых иерархических сетях и ее последовательная декомпозиция // *Екологічна безпека та природокористування*. — 2012. — Вип. 11. — С. 136–154.
4. *Васянин В.А., Трофимчук А.Н.* Автоматизация процессов принятия решений в многопродуктовых коммуникационных сетях с мелкопартионными дискретными потоками // *Там же*. — 2010. — Вип. 5. — С. 172–213.
5. *Васянин В.А., Трофимчук А.Н.* Задача выбора иерархической структуры многопродуктовой коммуникационной сети с мелкопартионными дискретными потоками // *Там же*. — 2012. — Вип. 10. — С. 182–204.
6. *Трофимчук А.Н., Васянин В.А.* Оптимизация структуры многопродуктовой сети с дискретными мелкопартионными потоками // 15-th International conference on System Analysis and Information Technologies (SAIT2013), May 27 - 31, 2013, Kyiv : Proceedings. — Kyiv, Ukraine: ESC «IASA» NTUU «KPI». — 2013. — P. 205–206.
7. *Довгий С.О., Бідюк П.І., Трофимчук О.М.* Системи підтримки прийняття рішень на основі статистично-ймовірнісних методів. — Київ : Логос, 2014. — 419 с.
8. *Васянин В.А.* Модели и алгоритмы распределения дискретных многопродуктовых потоков в зональных сетях иерархических структур // *Екологічна безпека та природокористування*. — 2011. — Вип. 8. — С. 176–190.
9. *Васянин В.А.* Справочная матрица слияния потоков в задачах оптимизации упаковок на многопродуктовых сетях // *Системні дослідження та інформаційні технології*. — 2014. — № 3. — С. 42–49.
10. *Васянин В.А.* Об одной задаче дискретной оптимизации в процессах управления перевозками на мультипоточковых транспортных сетях // *Кибернетика и вычислительная техника*. — 1983. — Вип. 60. — С. 82–87.
11. *Васянин В.А.* Сравнительная эффективность алгоритмов оптимизации упаковок в мультипоточковых сетях // *Дискретные системы управления*. — Киев : Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1988. — С. 36–45.
12. *Васянин В.А.* Задача распределения и маршрутизации транспортных блоков со смешанными вложениями и ее декомпозиция // *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. — 2015. — № 1. — С. 144–156.
13. *Васянин В.А., Трофимчук А.Н.* Выбор пропускных способностей дуг при оптимизации упаковок мелкопартионных потоков в многопродуктовых коммуникационных сетях // *Екологічна безпека та природокористування*. — 2012. — Вип. 9. — С. 181–200.

Получено 04.02.2014  
После доработки 24.03.2015