УДК 517.977

В.К. Чикрий

СРЕДНЕЕ ВРЕМЯ СБЛИЖЕНИЯ В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

В теории детерминированных игровых задач динамики существует ряд классических методов сближения [1–3], соответствующих определенным типам взаимной информированности игроков. Они применимы для исследования конфликтно-управляемых процессов различной природы [4–12]. Желание внести стохастическую неопределенность в исходную игровую модель приводит к различным постановкам задачи. Так если распределено начальное состояние процесса, то исследование замыкается на уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова [13], его дискретный вариант приводит к билинейной клеточной модели для марковских цепей [14], существует множество иных постановок стохастических игр и задач поиска [13].

В данной работе рассматривается конфликтно-управляемый процесс с адитивно входящими в правую часть случайными возмущениями. Базовым методом для исследования выбран первый прямой метод Понтрягина [1]. Даны условия конечности среднего времени сближения. Результаты иллюстрируются на модельном примере с простыми движениями и конечным набором возмущений.

Рассмотрим конфликтно-управляемый процесс, эволюция которого описывается равенством

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Phi(t, \tau)\,\varphi(u(\tau), v(\tau))d\tau + \int_0^t H(t, \tau)\,h(\tau)\,d\tau,\ t \ge 0. \qquad (1)$$

Здесь $z(t) \in R^n$, $n \ge 1$. Функция $g(t)$, $g: R_+ \to R^n$, $R_+ = \{t : t \ge 0\}$, измерима по Лебегу и ограничена при $t > 0$. Она содержит информацию о начальных данных процесса. Блок управления содержит матричную функцию $\Phi(t, \tau)$, $t \ge \tau \ge 0$, измеримую по t и суммируемую по τ для каждого $t \in R_+$, которая действует на функцию $\varphi(u, v)$, $\varphi: U \times V \to R^n$, зависящую от управлений игроков. Эта функция предполагается непрерывной по совокупности переменных на прямом произведении непустых компактов U и V, областей управления.

Допустимыми управлениями первого (u) и второго (v) игроков являются измеримые функции времени $u(\tau)$, $u: R_+ \to U$, $v(\tau)$, $v: R_+ \to V$. Блок возмущений содержит матричную функцию $H(t, \tau)$, $t \ge \tau \ge 0$, измеримую по t и суммируемую по τ для каждого $t \in R_+$, воздействующую на функцию возмущений $h(\tau)$, $\tau \ge 0$, измеримую и ограниченную, которая может принимать счетное число значений $h_i(\cdot)$, $i \in N = \{1, 2, ...\}$, с соответствующими вероятностями p_i, $p_i \ge 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, например, $p_i = 1/2^i$, $i = 1, 2, ...$. Заметим, что функции $h_i(\cdot)$, $i \in N$, предполагаются заранее известными, чего нельзя сказать об управляющих воздействиях игроков.

Кроме процесса (1) задано терминальное множество M^*, имеющее цилиндрический вид

$$M^* = M_0 + M, \tag{2}$$

где M_0 — линейное подпространство из R^n, а $M \in K(L)$ — компакт из ортогонального дополнения L к M_0 в R^n.

Цели игроков противоположны. Первый стремится вывести траекторию процесса (1) на терминальное множество (2) за кратчайшее время, а второй — максимально оттянуть момент попадания траектории на множество M^* или вообще избежать встречи. Примем сторону первого игрока и поскольку присутствуют случайные возмущения, то будем ориентироваться на среднее время приведения траектории на терминальное множество. При этом первый игрок использует смешанные стробоскопические стратегии О. Хайека [3], которые предписывают смешанные контруправления по Н.Н. Красовскому [2]

$$\{p_i, u_i(t)\},\ \ u_i(t) = u_i(g(\cdot), h_i(\cdot), t, v(t)),\ i \in N,\ \ t \geq 0. \tag{3}$$

Здесь $u_i(t)$, $i \in N$, $v(t)$ — допустимые измеримые функции.

Представление решения динамической системы в виде (1) позволяет в единой схеме рассмотреть широкий круг функционально-дифференциальных систем, функционирующих в условиях конфликта. В частности, систем обыкновенных дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных, дифференциально-разностных уравнений, а также систем уравнений с классическими дробными производными Римана–Лиувилля, регуляризованными дробными производными Джрбашяна–Нерсесяна–Капуто, секвенциальными дробными производными Миллера–Росса, дробными производными Хильфера и Грюнвальда–Летникова [8, 10, 12]. Аналогичное представление в дискретной ситуации дает возможность исследовать игровые задачи для многошаговых процессов и импульсных систем.

Конкретный вид функций $g(t)$ и матричных функций $\Phi(t, \tau)$, $H(t, \tau)$ определяет тип конфликтно-управляемого процесса. Так, например, для квазилинейных дифференциальных игр

$$\dot{z} = A(t)z + \varphi(u, v) + h(t),\ \ z \in R^n,\ \ u \in U,\ \ v \in V,\ \ t \geq 0,\ \ z(0) = z_0,$$

предсталение решения по формуле Коши имеет вид (1), где

$$g(t) = e^{At} z_0,\ \ \Phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)},\ \ H(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}.$$

Для решения игровой задачи (1)–(3) при наличии случайных возмущений и нахождения среднего времени сближения используем идеи первого прямого метода Л.С. Понтрягина [1].

Обозначим π ортопроектор, действующий из R^n в L. Положив

$$\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v) : u \in U\},$$

введем многозначные отображения

$$W(t, \tau, v) = \pi\Phi(t, \tau)\,\varphi(U, v),\ \ W(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} W(t, \tau, v)$$

на множествах $\Delta \times V$ и Δ соответственно, где

$$\Delta = \{(t, \tau) : 0 \leq \tau \leq t < +\infty\}.$$

В частном случае разделенных управлений $\phi(u, v) = u - v$

$$W(t, \tau) = \pi\Phi(t, \tau)U \overset{*}{-} \pi\Phi(t, \tau)V,$$

где $\overset{*}{-}$ — операция геометрической разности Минковского для двух множеств [1].

Условие Понтрягина. Многозначное отображение $W(t, \tau)$ имеет непустые образы на множестве Δ и является замкнутозначным.

В силу свойств параметров конфликтно-управляемого процесса (1) отображение $\varphi(U, v)$, $v \in V$, непрерывно в метрике Хаусдорфа [15]. Поэтому с учетом предположений о матричной функции $\Phi(t, \tau)$ многозначное отображение $W(t, \tau, v)$ измеримо по τ, $\tau \in [0, t]$, $v \in V$. Этим же свойством обладает и отображение $W(t, \tau)$ [11].

Введем функцию Понтрягина для конфликтно-управляемого процесса (1), (2):

$$T(g(\cdot), h(\cdot)) = \inf\left\{ t \geq 0 : \pi g(t) + \int_0^t \pi H(t, \tau)h(\tau)d\tau \in M - \int_0^t W(t, \tau)d\tau \right\}. \quad (4)$$

Если включение в фигурных скобках не выполняется ни для каких $t > 0$, то положим $T(g(\cdot), h(\cdot)) = +\infty$. Под интегралом от многозначного отображения $W(t, \tau)$ следует понимать интеграл Аумана [15], т.е. объединение интегралов от всевозможных измеримых селекторов многозначного отображения. Будем считать, что точная нижняя грань в выражении (4) достигается. Этот факт будет иметь место, например, в случае, когда функция в левой части включения непрерывна, а многозначное отображение в правой части непрерывно и компактозначно. Отметим также на будущее для приложений, что интеграл Аумана от многозначного отображения — всегда выпуклозначное отображение [15].

Теорема. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина, для заданных измеримых почти везде ограниченных функций начальных данных $g(\cdot)$ и возмущений $h(\cdot)$ точная нижняя грань в соотношении (4) достигается, причем $T = T(g(\cdot), h(\cdot)) < +\infty$.

Тогда траектория процесса (1) может быть приведена на терминальное множество (2) в момент T с помощью подходящего контруправления вида

$$u(t) = u(g(\cdot), h(\cdot), t, v(t)), t \geq 0.$$

Доказательство. Из включения (4) и предположений теоремы вытекает включение

$$\pi g(T) + \int_0^T \pi H(T, \tau)h(\tau)d\tau \in M - \int_0^T W(T, \tau)d\tau.$$

Последнее означает, что существует такая точка m, $m \in M$, и, по определению интеграла Аумана, в силу теоремы измеримого выбора [15] для измеримого по τ замкнутозначного отображения $W(T, \tau)$ существует такой измеримый селектор $\gamma(T, \tau)$, что

$$\pi g(T) + \int_0^T \pi H(T, \tau)d\tau = m - \int_0^T \gamma(T, \tau)d\tau. \quad (5)$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$U(\tau, v) = \{u \in U : \pi\Phi(T, \tau)\,\varphi(u, v) - \gamma(T, \tau) = 0\}, \quad (6)$$

$$\tau \in [0, T], \ v \in V, \ \gamma(T, \tau) \in W(T, \tau).$$

В силу предположений о параметрах конфликтно-управляемого процесса (1) отображение $U(\tau, v)$ является $L \times B$-измеримым и замкнутозначным [11]. Следовательно [15], по теореме измеримого выбора в нем существует $L \times B$-измеримый селектор $u(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией.

Выберем управление первого игрока в виде

$$u(\tau) = u(\tau, v(\tau)) = u(g(\cdot), h(\cdot), \tau, v(\tau)), \quad \tau \in [0, T],$$

где $v(\tau)$, $\tau \in [0, T]$, — допустимое управление второго игрока, а $g(\cdot)$, $h(\cdot)$ заданы заранее. Процедура получения управления первого игрока может быть реализована в виде построения лексикографического минимума на основе теоремы Филиппова–Кастена [15]. Из представления (1) с учетом равенства (5) и закона выбора управления первого игрока с использованием многозначного отображения (6) получим

$$\pi z(T) = \pi g(T) + \int_0^T \pi\Phi(T, \tau)\,\varphi(u(\tau), v(\tau))d\tau + \int_0^T \pi H(T, \tau)h(\tau)d\tau \pm \int_0^T \gamma(T, \tau)d\tau =$$

$$= m - \int_0^T \gamma(T, \tau)d\tau + \int_0^T [\pi\Phi(T, \tau)\,\varphi(u(\tau), v(\tau)) - \gamma(T, \tau)]\,d\tau + \int_0^T \gamma(T, \tau)d\tau = m \in M.$$

Таким образом, в момент T $\pi z(T) \in M$ или $z(T) \in M^*$. Тем самым каждой возмущающей функции $h_i(\cdot)$ соответствует некоторое гарантированное время первого прямого метода.

Обозначив

$$T_i = T(g(\cdot), h_i(\cdot)), \quad i = 1, 2, \dots,$$

получим среднее время сближения траекторий (1) с терминальным множеством (2)

$$T_{av} = \sum_{i=1}^{\infty} p_i T_i.$$

Если количество функций возмущений $h_i(\cdot)$, $i = 1, \dots k$, конечно, то, обозначив

$$P = \left\{ p = (p_1, \dots, p_k) : \sum_{i=1}^{k} p_i = 1,\ p_i \ge 0 \right\}$$

правильный $(k-1)$-мерный симплекс и учитывая равенства

$$\min(T_1, \dots, T_k) = \min_{p \in P} \sum_{i=1}^{k} p_i T_i = T_*,$$

$$\max(T_1, \dots, T_k) = \max_{p \in P} \sum_{i=1}^{k} p_i T_i = T^*,$$

получим неравенства $T_* \le T_{av} \le T^*$ и тем самым оценку влияния функций возмущений $h_i(\cdot)$, $i = 1, \dots k$, на среднее время сближения через вероятностное распределение p, $p \in P$, в схеме первого прямого метода Понтрягина. При этом среднее время сближения T_{av} реализует некоторая смешанная стробоскопическая стратегия (3). Очевидно, конечность среднего времени сближения T_{av} обеспечивает конечность каждого из гарантированных времен T_i.

Рассмотрим модельный пример игровой задачи с простыми движениями при наличии возмущений.

Пример. Конфликтно-управляемый процесс имеет вид

$$\dot{z} = u - v + h,\ \ z \in \mathrm{R}^n,\ \ z(0) = z_0,\ \ \|u\| \le a \ge 1,\ \ \|v\| \le 1,\ \ h \in \mathrm{R}^n, \tag{7}$$

$$M^* = \{z : \|z\| \le \varepsilon\}.$$

При этом постоянный вектор возмущений h принимает значения $h_1, ..., h_k$ с соответствующими вероятностями $p_1, ..., p_k$.

Приведем процесс (7) к виду (1). Тогда

$$z(t) = z_0 + \int_0^t (u(\tau) - v(\tau))d\tau + th,\ \ t \ge 0.$$

Для удобства будем считать, что

$$u \in aS,\ \ v \in S,\ \ M^* = \varepsilon S,\ \text{где}\ S = \{z : \|z\| \le 1\}$$

— единичный шар с центром в нуле. Очевидно, здесь $g(t) = z_0$, $\Phi(t, \tau) = H(t, \tau) = E$, $h(t) = h$, E — единичная матрица. Составляющие терминального множества $M_0 = 0$, $M = \varepsilon S$. Отсюда следует, что $L = M_0^{\perp} = \mathrm{R}^n$, а оператор ортогонального проектирования π, $\pi : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$, является оператором тождественного преобразования и задается в R^n единичной матрицей E. Проверим условие Понтрягина

$$W(t, \tau, v) = aS - v,\ \ W(t, \tau) = aS \overset{*}{\_} S = (a-1)S.$$

Поскольку $a \ge 1$, то $W(t, \tau) \ne \varnothing$.

Функция Понтрягина

$$T(z_0, h) = \min\left\{t \ge 0 : z_0 + th \in \varepsilon S - \int_0^t (a-1)Sd\tau\right\} = \tag{8}$$

$$= \min\{t \ge 0 : z_0 + th \in [\varepsilon + t(a-1)]S\}.$$

Здесь учтена центральная симметрия шара с центром в нуле, а также тот факт, что выпуклые компакты интегрируются (в смысле Аумана) как константы.

В силу непрерывности по t левой и правой части во включении из (8) наименьшее t соответствует попаданию вектора на границу шара и является корнем уравнения

$$\|z_0 + th\| = \varepsilon + t(a-1).$$

Возведя в квадрат левую и правую части, получим квадратное уравнение относительно t

$$[(a-1)^2 - \|h\|^2]t^2 + 2[\varepsilon(a-1) - (z_0, h)]t + \varepsilon^2 - \|z_0\|^2 = 0. \tag{9}$$

Исследуем вопрос о существовании и конечности меньшего положительного корня уравнения (9) в зависимости от значений параметров конфликтно-управляемого процесса (7) a, ε, h, z_0. Рассмотрим сначала случай равных максимальных скоростей игроков, $a = 1$, $\|h\| \ne 0$. Тогда уравнение (9) приобретает вид

$$\|h\|^2 t^2 + 2(z_0, h)t + \|z_0\|^2 - \varepsilon^2 = 0. \tag{10}$$

Естественно считать, что $\|z_0\| > \varepsilon$. Корни уравнения (10)

$$t_{\pm} = \frac{-(z_0, h) \pm \sqrt{(z_0, h)^2 - \|h\|^2(\|z_0\|^2 - \varepsilon^2)}}{\|h\|^2}. \qquad (11)$$

Они действительны, если

$$(z_0, h)^2 \geq \|h\|^2(\|z_0\|^2 - \varepsilon^2). \qquad (12)$$

При $(z_0, h) > 0$ оба корня (11) отрицательны, поскольку числитель отрицателен из-за неравенства

$$\sqrt{(z_0, h)^2 - \|h\|^2(\|z_0\|^2 - \varepsilon^2)} < |(z_0, h)|.$$

Если $(z_0, h) < 0,$ неравенство (12) превращается в неравенство

$$(z_0, h) \leq -\|h\|\sqrt{\|z_0\|^2 - \varepsilon},$$

при этом условии оба корня (11) положительны и меньший из них

$$t_{-} = \frac{-(z_0, h) - \sqrt{(z_0, h)^2 - \|h\|^2(\|z_0\|^2 - \varepsilon^2)}}{\|h\|^2}.$$

В случае $(z_0, h) = 0$ действительных корней нет, так как не выполнено неравенство (12). Напомним, что $\|h\| \neq 0,$ $\|z_0\| > \varepsilon$.

Таким образом, при $a = 1$ и при условии $(z_0, h) \leq -\|h\|\sqrt{\|z_0\|^2 - \varepsilon^2}$ конечное гарантированное время сближения для конфликтно-управляемого процесса (7)

$$T(z_0, h) = \frac{-(z_0, h) - \sqrt{(z_0, h)^2 - \|h\|^2(\|z_0\|^2 - \varepsilon^2)}}{\|h\|^2}. \qquad (13)$$

Заметим, что при $a < 1$ не выполнено условие Понтрягина

$$aS \overset{*}{\_} S = \varnothing.$$

Тем не менее при некоторых соотношениях между z_0, a, h, ε возможно попадание в ε-окрестность за нефиксированное время. Здесь этот случай не рассматривается.

Рассмотрим далее случай $a > 1.$ Тогда корни уравнения (9) имеют вид

$$t_{\pm} = \frac{-[\varepsilon(a-1) - (z_0, h)] \pm \sqrt{[\varepsilon(a-1) - (z_0, h)]^2 + [(a-1)^2 - \|h\|^2](\|z_0\|^2 - \varepsilon^2)}}{(a-1)^2 - \|h\|^2}. \qquad (14)$$

Пусть $\|h\| < a - 1.$ Тогда подкоренное выражение в (14) всегда положительно, более того, имеет место неравенство

$$[\varepsilon(a-1) - (z_0, h)]^2 + [(a-1)^2 - \|h\|^2](\|z_0\|^2 - \varepsilon^2) > |\varepsilon(a-1) - (z_0, h)|.$$

Поэтому $t_{-} < 0,$ а $t_{+} > 0$ и, следовательно, при $a > 1,$ $\|h\| < a - 1$

$$T(z_0, h) = \frac{-[\varepsilon(a-1) - (z_0, h)] + \sqrt{[\varepsilon(a-1) - (z_0, h)]^2 + [(a-1)^2 - \|h\|^2](\|z_0\|^2 - \varepsilon^2)}}{(a-1)^2 - \|h\|^2} \qquad (15)$$

— конечное время сближения при любых z_0 и ε таких, что $\|z_0\| > \varepsilon$.

 ISSN 0572-2691

Если $\|h\| = a - 1,$ то для определения времени сближения из (9) получим линейное уравнение

$$2[\varepsilon(a-1)-(z_0, h)]t = \|z_0\|^2 - \varepsilon^2, \ \ t > 0.$$

Отсюда

$$T(z_0, h) = \frac{\|z_0\|^2 - \varepsilon^2}{2[\varepsilon(a-1)-(z_0, h)]} \qquad (16)$$

является положительным и конечным, если $(z_0, h) < \varepsilon(a-1).$

И, наконец, наиболее сложный случай: $\|h\| > a - 1,$ когда вектор возмущения по величине превосходит разность максимальных скоростей игроков. Из (14) следует, что для существования действительных корней должно иметь место неравенство

$$[\varepsilon(a-1)-(z_0, h)]^2 + [(a-1)^2 - \|h\|^2](\|z_0\|^2 - \varepsilon^2) \geq 0. \qquad (17)$$

При этом предположении рассмотрим три случая.

1. $(z_0, h) < \varepsilon(a-1).$ Поскольку

$$[\varepsilon(a-1)-(z_0, h)]^2 + [(a-1)^2 - \|h\|^2](\|z_0\|^2 - \varepsilon^2) < |\varepsilon(a-1)-(z_0, h)| \qquad (18)$$

и знаменатель в (14) отрицательный, то $t_- > t_+ > 0.$ Таким образом, в случае $\|h\| > a - 1$ при условиях (17) и $(z_0, h) < \varepsilon(a-1)$

$$T(z_0, h) = \frac{-[\varepsilon(a-1)-(z_0, h)] + \sqrt{[\varepsilon(a-1)-(z_0, h)]^2 + [(a-1)^2 - \|h\|^2](\|z_0\|^2 - \varepsilon^2)}}{(a-1)^2 - \|h\|^2} \qquad (19)$$

является конечным временем сближения.

2. $(z_0, h) = \varepsilon(a-1).$ В этом случае условие (17) не выполнено, так как $\|h\| > a - 1,$ а $\|z_0\| > \varepsilon.$ Это означает, что действительных корней (14) нет.

3. Пусть $(z_0, h) > \varepsilon(a-1).$ Иначе говоря — $[\varepsilon(a-1)-(z_0, h)] > 0.$ В силу неравенства (18) это означает, что числитель в выражении (14) для $t_\pm$ в обоих случаях положительный, а знаменатель $(\|h\| > a - 1)$ отрицательный. Следовательно, оба корня отрицательны.

Для полноты картины рассмотрим также известную ситуацию, когда вектор возмущений отсутствует $(h = 0).$

Тогда из равенства (16) получим

$$t_\pm = \frac{-\varepsilon(a-1) \pm \sqrt{\varepsilon^2(a-1)^2 + (a-1)^2(\|z_0\|^2 - \varepsilon^2)}}{(a-1)^2}.$$

Отсюда следует, что

$$t_- = \frac{-(\|z_0\| + \varepsilon)}{a-1} < 0, \ \ t_+ = T(z_0, 0) = \frac{\|z_0\| - \varepsilon}{a-1}.$$

Из выражения для $T(z_0, 0)$ вытекает, что для $h = 0, \ \ a = 1 \ \ T(z_0, 0) = +\infty$ для любых $z_0, \ \ \|z_0\| > \varepsilon.$ Последнее означает что в этой ситуации сближение с ε-окрестностью нуля при любых начальных состояниях невозможно.

Если гарантированное время $T = T(z_0, h)$ найдено по одной из формул (13), (15), (16), (19), то опишем управление первого игрока, позволяющее его реализовать.

Из выражения (8) имеем

$$z_0 + Th \in [\varepsilon + T(a-1)]S, \text{ причем } \|z_0 + Th\| = \varepsilon + T(a-1).$$

Следуя выражению (5), выберем точку m, $m \in \varepsilon S$, и постоянный селектор γ, $\gamma \in (a-1)S$, в виде

$$m = \frac{z_0 + Th}{\|z_0 + Th\|}\varepsilon \in \varepsilon S, \quad \gamma = -\frac{z_0 + Th}{\|z_0 + Th\|}(a-1) \in (a-1)S,$$

обеспечив равенство $z_0 + Th = m - T\gamma$, аналог равенства (5). Тогда из соотношения в (6) получим управление первого игрока

$$u(\tau) = v(\tau) - \frac{z_0 + Th}{\|z_0 + Th\|}(a-1), \quad \tau \in [0, T], \tag{20}$$

где $v(\tau)$ — произвольное допустимое управление второго игрока.

Покажем, что, используя контруправление вида (20), первый игрок обеспечивает приведение траектории (7) в ε-окрестность нуля в момент P. Действительно, подставив $u(\tau)$ вида (20) в решение уравнения (7), получим:

$$z(P) = z_0 - T\frac{z_0 + Th}{\|z_0 + Th\|}(a-1) + Th = (z_0 + Th)\left(1 - \frac{T(a-1)}{\|z_0 + Th\|}\right) = \frac{z_0 + Th}{\|z_0 + Th\|}\varepsilon \in \varepsilon S.$$

Здесь учтено равенство $\|z_0 + Th\| - T(a-1) = \varepsilon$.

Подводя итог в решении примера сформулируем следующее.

Утверждение. Пусть задан конфликтно-управляемый процесс (7), причем вектор возмущений h принимает значения $h_1, ..., h_k$ с соответствующими заданными вероятностями $p_1, ..., p_k$. Тогда, если каждый из векторов h_i, $i = 1, ..., k$, вместе с остальными параметрами процесса a, z_0, ε удовлетворяет хотя бы одному из набора условий:

1) $\|h_i\| \neq 0$, $a = 1$, $(z_0, h_i) \leq -\|h_i\|\sqrt{\|z_0\|^2 - \varepsilon^2}$;

2) $a > 1$, $\|h_i\| < a - 1$;

3) $a > 1$, $\|h_i\| = a - 1$, $(z_0, h_i) < \varepsilon(a-1)$;

4) $a > 1$, $\|h_i\| > a - 1$, $[\varepsilon(a-1) - (z_0, h_i)]^2 + [(a-1)^2 - \|h_i\|^2](\|z_0\|^2 - \varepsilon^2) \geq 0$, $(z_0, h_i) < \varepsilon(a-1)$;

то среднее время

$$T_{av} = \sum_{i=1}^{k} p_i T_i, \quad T_i = T(z_0, h_i)$$

является конечным, причем гарантированные времена $T(z_0, h_i)$ при соответствующем наборе условий задаются выражениями (13), (15), (16), (19), а смешанная контрстратегия первого игрока $\{p_i, u_i(t)\}$, $i = 1, ..., k$, где

$$u_i(t) = v(t) - \frac{z_0 + T_i h_i}{\|z_0 + T_i h_i\|}(a-1), \quad t \in [0, T_i],$$

$v(t)$ — текущее допустимое управление убегающего, обеспечивает этот результат.

 ISSN 0572-2691

В.К. Чикрій

СЕРЕДНІЙ ЧАС ЗБЛИЖЕННЯ В ІГРОВИХ ЗАДАЧАХ З ВИПАДКОВИМИ ЗБУРЕННЯМИ

Для ігрових задач, що описуються квазілінійними функціонально-диференціальними системами, дано узагальнення першого прямого методу Л.С. Понтрягіна. У випадку адитивних випадкових збурень у правій частині дано достатні умови скінченності середнього часу зближення. Результати ілюструються на прикладі простих рухів гравців.

V.K. Chikrij

MEAN APPROACH TIME FOR GAME PROBLEMS WITH RANDOM PERTURBATIONS

L.S. Pontryagin's first direct method is extended to the game problems described by the quasi-linear functional-differential systems. Sufficient conditions of the game termination in the mean time are provided in the case of additive random perturbations. Results are illustrated on an example of «simple motions» of the players.

1. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. — М. : Наука, 1988. — **2**. — 576 с.
2. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. — М. : Наука, 1970. — 420 с.
3. *Hajek O.* Pursuit games. — New York : Academic Press, 1975. — 1**2**. — 266 p.
4. *Chikrii G.Ts*. On one problem of approach for damped oscillations // Journal of Automation and Information Sciences. — 2009. — **33**, N 10. — P. 1–9.
5. *Chikrii A.A.*, *Chikrii G.Ts*., *Volyanskiy K.Y.* Quasilinear positional integral games of approach // Ibid. — 2001. — **33**, N 10. — P. 31–52.
6. *Matychyn I.I., Chikrii A.A.* Motion camouflage in differential games of pursuit // Ibid. — 2005. — **37**, N 3. — P. 1–5.
7. *Chikrii A.A., Belousov A.A.* Game problem of «soft landing» for second–order systems // Journal of Mathematical Sciences. — 2006. — **139**, N 5. — P. 6997–7012.
8. *Чикрий А.А., Эйдельман С.Д.* Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана–Лиувилля // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 6. — С. 66–99.
9. *Пилипенко Ю.В., Чикрий А.А.* Колебательные конфликтно-управляемые процессы // Прикладная математика и механика. — 1993. — **57**, № 3. — С. 3–14.
10. *Chikrii A.A., Eidelman S.D.* Game problems for fractional quasilinear systems // Computers and Mathematics with Applications. — 2002. — **44**, N 7. — P. 835–851.
11. *Chikrii A.A*., *Rappoport J.S., Chikrii K.A.* Multivalued mappings and their selectors in the theory of conflict-controlled processes // Cybernetics and Systems Analysis. — 2007. — **43**, N 5. — P. 719–730.
12. *Eidelman S.D., Chikrii A.A.* Dynamic game problems of approach for fractional–order equations // Ukrainian Mathematical Journal. — 2000. — **52**, N 11. — P. 1787–1806.
13. *Хелман О.* Введение в теорию оптимального поиска. — М. : Наука, 1985. — 248 с.
14. *Чикрий А.А., Дзюбенко К.Г.* Билинейные марковские процессы поиска движущихся объектов // Проблемы управления и информатики. — 1997. — № 1. — С. 92–107.
15. *Aubin J.–P., Frankowska H.* Set–valued analysis. — Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. — 461 p.

Получено 17.04.2015