МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ
И АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.9

В.А. Воронов, А.В. Лакеев, Ю.Э. Линке, В.А. Русанов

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ В ПРОЦЕССЕ ЮСТИРОВКИ МАТРИЦЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ*

Теоретико-системное исследование пространства модулей линейных динамических моделей минимальной дифференциальной реализации принадлежит к числу тех разделов математики, где ставить «естественные» вопросы гораздо легче, чем отвечать на них. Первыми работами, послужившими толчком к применению современных алгебро-геометрических методов в качественной теории линейных систем, были публикации Д. Калмана и М. Хазевинкеля [1, 2]. Они стимулировали новые подходы к общим проблемам идентификации и стабилизации (см., например, статьи [3, 4] или [5]). В частности, для разработки «геометрического каркаса» теории идентификации линейных стационарных систем управления Р. Брокетт [6] изучал глобальные топологические свойства пространства всех собственных рациональных передаточных $p \times m$-матриц, у которых степень Мак-Миллана равна *n*. Данная работа примыкает к этой линии исследования, дополняя (развивая) качественные результаты [7–9].

1. Постановка задачи

В этом разделе кратко напомним некоторые из основных аналитических конструкций пространства модулей линейных систем дифференциальной реализации минимального динамического порядка (или, что структурно эквивалентно, наблюдаемых динамических систем), затем сформулируем задачу по определению (вычислению) предпочтительной системы реализации [7] на семействе подобных моделей «объект–регулятор–наблюдатель», индуцированных группами преобразований [10].

Пусть, как обычно, $M_{n\times m}(\text{Р})$ — множество всех $n \times m$-матриц над полем вещественных чисел Р, в случае $m = n$ для упрощения обозначений будем писать $M_n(\text{Р})$ (соответственно, $M_{n\times m}(\text{Х})$ и $M_n(\text{Х})$ — над полем комплексных чисел Х); $GL_n(\text{Р})$ — полная линейная группа степени n над Р и $SO_n \subset GL_n(\text{Р})$ — специальная ортогональная группа; отметим, что группа $GL_n(\text{Р})$ является неограниченным несвязным открытым n^2-многообразием, соответственно SO_n — связное компактное $n(n-1)/2$-многообразие (следствие 0.2.4 [10]).

---

* Работа выполнена при частичном финансировании гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ (НШ-5007.2014.09).

 ISSN 0572-2691

Рассмотрим общие уравнения движения (на временной полуоси $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$) непрерывной линейной стационарной динамической системы

$$dx(t)/dt = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) \tag{1}$$

с состояниями $x(t) \in \mathbb{R}^n$, входами (управлением) $u(t) \in \mathbb{R}^m$, выходами $y(t) \in \mathbb{R}^p$ и матрицами $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$. Считаем, что уравнения (1) получены апостериори в результате минимальной дифференциальной реализации заданной системы управляемых динамических процессов вход–выход [7, 9], что определяет некоторую матричную модель — фиксированную точку (A, B, C) в декартовом пространстве матриц

$$M_{n,m,p}(\mathbb{R}) := M_n(\mathbb{R}) \times M_{n\times m}(\mathbb{R}) \times M_{p\times n}(\mathbb{R}).$$

Пусть $Q(A, C)$ — матрица наблюдаемости* системы минимальной реализации (1) (или, что эквивалентно, $\operatorname{rank} Q(A, C) = n$ согласно следствию 2 [7]), и пусть

$$\Re_{n,m,p}(\mathbb{R}) := \{(A', B', C') \in M_{n,m,p}(\mathbb{R}) : \operatorname{rank} Q(A', C') = n\}$$

обозначает открытое в топологии Зариского [11] подмножество наблюдаемых систем (1); $\Re_{n,m,p}(\mathbb{R})$ как открытое подмножество нормированного пространства $M_{n,m,p}(\mathbb{R})$ является вещественным подмногообразием в $\mathbb{R}^{n(n+m+p)}$.

Переход к новому базису в пространстве состояний $\mathbb{R}^n$ на базе трансформирующей матрицы $S \in GL_n(\mathbb{R})$ изменяет координаты модели реализации по формуле

$$z := Sx \tag{2}$$

и преобразует уравнения (1) в эквивалентную им стационарную динамическую систему

$$dz(t)/dt = SAS^{-1}z(t) + SBu(t), \quad y(t) = CS^{-1}z(t). \tag{3}$$

Это определяет [10] вещественно-аналитическое действие группы Ли $GL_n(\mathbb{R})$ на подмножестве динамических систем $\Re_{n,m,p}(\mathbb{R})$ согласно правилу

$$\rho_{GL} : GL_n(\mathbb{R}) \times \Re_{n,m,p}(\mathbb{R}) \to \Re_{n,m,p}(\mathbb{R}),$$

$$(S, (A, B, C)) \mapsto \rho_{GL}(S, (A, B, C)) = (SAS^{-1}, SB, CS^{-1}),$$

называемое действием подобия на многообразии $\Re_{n,m,p}(\mathbb{R})$.

Действие подобия ρ_{GL} задает на $\Re_{n,m,p}(\mathbb{R})$ отношение эквивалентности $\sim$

$$(A', B', C') \sim (A, B, C) \Leftrightarrow \exists S \in GL_n(\mathbb{R}) : (A', B', C') = (SAS^{-1}, SB, CS^{-1}).$$

Классы эквивалентности

$$[A, B, C] := \{(SAS^{-1}, SB, CS^{-1}) : S \in GL_n(\mathbb{R})\}$$

---

* Заметим, что $Q^{\mathrm{T}}(A, C) := [C^{\mathrm{T}}, A^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}, \ldots, (A^{\mathrm{T}})^{n-1}C^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ — матрица управляемости для системы $dx/dt = A^{\mathrm{T}}x + C^{\mathrm{T}}u,\ y = B^{\mathrm{T}}x,$ которая называется двойственной к системе (1), поскольку управляемость одной из них эквивалентна наблюдаемости другой (отметим, что наблюдаемость — характерное свойство системы минимальной реализации); здесь и далее в основном тексте верхний индекс Т, как обычно, означает операцию транспонирования.

отношения ~ называются [10] орбитами действия ρ_{GL}. Фактор-пространство по отношению ~ называется пространством орбит действия ρ_{GL} и обозначается

$$\Re^{GL}_{n,m,p}(\mathrm{P}) := \Re_{n,m,p}(\mathrm{P}) / GL_n(\mathrm{P}).$$

В пространстве орбит $\Re^{GL}_{n,m,p}(\mathrm{P})$ имеется естественная топология [10], называемая фактор-топологией и являющаяся самой тонкой из всех возможных топологий на $\Re^{GL}_{n,m,p}(\mathrm{P})$, для которых непрерывно каноническое отображение

$$\pi_{GL} : \Re_{n,m,p}(\mathrm{P}) \to \Re^{GL}_{n,m,p}(\mathrm{P}),$$

$$(A, B, C) \mapsto \pi_{GL}(A, B, C) = [A, B, C].$$

Пространство орбит $\Re^{GL}_{n,m,p}(\mathrm{P})$, как правило, называют пространством модулей многообразия линейных систем минимальной реализации (наблюдаемых систем); это означает, что его точки параметризуют орбиты действия ρ_{GL}. Перечисленные конструкции переносятся на действие подобия ρ_{SO} по специальной ортогональной группе SO_n; можно показать [11, с. 120], что SO_n — связная компонента ортогональной группы O_n, при этом справедливо равенство $SO_n = \cup\{U^k : k = 1, 2, \ldots\}$, где U — любая окрестность единицы в SO_n (см. п. (в) предложения 1 [11, с. 118]), в этом положении $\Re^{SO}_{n,m,p}(\mathrm{P})$ хаусдорфово, отображение π_{SO} замкнутое (теорема I.3.1 [10]). Поэтому далее индекс GL (соответственно SO) обозначает действие группы $GL_n(\mathrm{P})$ (соответственно SO_n); при отсутствии указанных индексов индекс # означает действие либо группы $GL_n(\mathrm{P})$, либо SO_n.

Рассмотрим матричнозначное отображение η_{GL} и функционалы f_{GL}, g_{SO} следующего вида:

$$\eta_{GL} : GL_n(\mathrm{P}) \times M_n(\mathrm{P}) \times M_n(\mathrm{P}) \to M_n(\mathrm{P}),$$

$$(S, A', A'') \mapsto \eta_{GL}(S, A', A'') := SA'S^{-1} - A'',$$

$$f_{GL} : M_n(\mathrm{P}) \times M_n(\mathrm{P}) \to \mathrm{P},$$

$$(A', A'') \mapsto f_{GL}(A', A'') := \inf\{\| S^{-1} \| \| \eta_{GL}(A', A'') S \| : S \in GL_n(\mathrm{P})\},$$

$$g_{SO} : M_n(\mathrm{P}) \times M_n(\mathrm{P}) \to \mathrm{P},$$

$$(A', A'') \mapsto g_{SO}(A', A'') := \sup\{\| S^{-1} \| \| \eta_{SO}(S, A', A'') S \| : S \in SO_n\},$$

где $\| \cdot \|$ — евклидова норма (l_2-норма) в $M_n(\mathrm{P})$; ниже используем факт $\|S\|^2 = \mathrm{tr}\,(S^{\mathrm{T}} S)$. Заметим, что $\eta_{SO}(\cdot, \cdot, A'') : SO_n \times M_n(\mathrm{P}) \to M_n(\mathrm{P})$ — замкнутое отображение (теорема I.1.2 [10]).

Фиксируя терминологию, назовем матричнозначную функцию

$$\eta_{GL}(\cdot, A, \widehat{A}) : GL_n(\mathrm{P}) \to M_n(\mathrm{P}),$$

где $A \in M_n(\mathrm{P})$ и $\widehat{A} \in M_n(\mathrm{P})$ заданы, GL-юстировкой матриц $A, \widehat{A}$ под действием подобия ρ_{GL}. При этом значение функционала $f_{GL}(A, \widehat{A})$ назовем квазиточностью GL-юстировки матриц $A, \breve{A}$; соответственно $g_{SO}(A, \breve{A})$ — рассогласованием SO-юстировки (используется при действии группы SO_n). Термин «квазиточность» инициирован положением

$$0 \le \inf\{\|\eta_{GL}(S, A, \breve{A})\| : S \in GL_n(\mathrm{P})\} \le f_{GL}(A, \breve{A}),$$

$$\breve{A} \in \{SAS^{-1} : S \in GL_n(\mathrm{P})\} \Rightarrow \inf\{\|\eta_{GL}(S, A, \breve{A})\| : S \in GL_n(\mathrm{P})\} = f_{GL}(A, \breve{A}) = 0.$$

Сформулируем задачу. Определить нижнюю оценку квазиточности GL-юстировки матриц $A \in M_n(\mathrm{P})$, $\breve{A} \in M_n(\mathrm{P}) \setminus \{(SAS^{-1}) : S \in GL_n(\mathrm{P})\}$ (системы дифференциальной реализации (1) и некоторой «эталонной матрицы») через построение неотрицательного функционала

$$\sigma_{GL} : GL_n(\mathrm{P}) \times M_n(\mathrm{P}) \times M_n(\mathrm{P}) \to \mathrm{P},$$

и вычислимого матричного отображения

$$H : M_n(\mathrm{P}) \times M_n(\mathrm{P}) \to GL_n(\mathrm{P}),$$

таких, что функционал $\sigma_{GL}(\cdot, A', A'') : GL_n(\mathrm{P}) \to \mathrm{P}$ ненулевой и при этом для любых матриц $A', A'' \in M_n(\mathrm{P})$ (а, следовательно, и $A, \breve{A}$) справедливо «оценочное отношение»

$$0 \le \sigma_{GL}(H(A', A''), A', A'') \le f_{GL}(A', A''). \qquad (4)$$

Замечание 1. Задача (4) (и ей подобные) мотивируется определением проекции в координатное пространство $M_n(\mathrm{P})$ орбиты действия ρ_{GL}, индуцированной тройкой (A, B, C) системы дифференциальной реализации (1) и вычислением в ней начального приближения в схеме Ньютона–Канторовича (гл. XVIII [12]) при оптимизации ошибки юстировки — подгонки к фиксированной матрице $\breve{A}$, не входящей в орбиту $[A, B, C]$ и приближающей к трансформирующим матрицам из следствия 1 (см. также заключение в [13]); так, при $\breve{A} = 0$ решение задачи «оптимизации» юстировки отвечает выбору системы реализации (3) с минимальной l_2-нормой для SAS^{-1} [8]. Заметим, что здесь можно применять различные альтернативные подходы; для матриц $M_n(\mathrm{X})$ см., например, постановки в § 4, гл. VIII [14].

2. Геометрия орбиты действия подобия и базис реализации

При юстировке матрицы A объекта системы минимальной дифференциальной реализации (1) знание геометрии пространства модулей $\Re^{\#}_{n,m,p}(\mathrm{P})$ необходимо для понимания алгебраической структуры орбиты действия подобия ρ. Поэтому ниже уточним некоторые орбитальные конструкции (результаты этого раздела не претерпят каких-либо качественных изменений при смене l_2-нормы в $(M_n(\mathrm{P}), \|\cdot\|)$ на любую матричную норму); полезные сопутствующие понятия см. в [11, 15]. Далее $\mathrm{Pr}_n : M_{n,m,p}(\mathrm{P}) \to M_n(\mathrm{P})$ — оператор проектирования на соответствующее координатное пространство; ясно, что для любой матрицы $\breve{A} \in M_n(\mathrm{P})$ будет выполняться равенство

$$\mathrm{Pr}_n \circ \pi_{GL}^{-1}([A, B, C]) = \eta_{GL}(GL_n(\mathrm{P}), A, \breve{A}) + \breve{A}.$$

Рассмотрим также действие группы $GL_n(\mathrm{P})$ на множестве вещественных $n \times n$-матриц согласно правилу

$$\tau_{GL} : GL_n(\mathrm{P}) \times M_n(\mathrm{P}) \to M_n(\mathrm{P}),\ (S, A) \mapsto \tau_{GL}(S, A) = SAS^{-1},$$

называемому также действием подобия на многообразии $M_n(\mathrm{P})$.

Орбиту матрицы $A \in M_n(\mathrm{P})$ относительно τ_{GL} будем обозначать $\mathrm{O}_{GL}(A)$, т.е. $\mathrm{O}_{GL}(A) = \{SAS^{-1} : S \in GL_n(\mathrm{P})\}$.

Аналогично для группы SO_n обозначим $\mathrm{O}_{SO}(A) = \{SAS^{-1} : S \in SO_n(\mathrm{P})\}$. Очевидно, что выполняется (включая смену индекса GL на SO) равенство $\mathrm{O}_{GL}(A) = \mathrm{Pr}_n \circ \pi_{GL}^{-1}([A, B, C])$. Известно, что $\mathrm{O}_{GL}(A)$ — гладкое подмногообразие в $M_n(\mathrm{P})$ размерности $n^2 - k$, где k — размерность стабилизатора матрицы A (или, что эквивалентно, k — размерность ядра кольцевого коммутатора $S \mapsto (SA - AS) : GL_n(\mathrm{P}) \to M_n(\mathrm{P})$), см. [15]); согласно теореме B.1.7 [11] $\mathrm{Card}\, \mathrm{O}_{GL}(A) = (GL_n(\mathrm{P}) : GL_n(\mathrm{P})_A)$, где $GL_n(\mathrm{P})_A$ — централизатор матрицы A, при этом $GL_n(\mathrm{P})_A$ — замкнутая подгруппа группы $GL_n(\mathrm{P})$ (теорема 2.6.3 [11]).

Всюду в дальнейшем, согласно определению 1.4.4 [16], матрицу $A \in M_n(\mathrm{P})$ будем называть недефектной (в терминологии определения 1.3.6 [16] — диагонализируемой), если она подобна диагональной в $M_n(\mathrm{X})$, в противном случае матрица называется дефектной.

Теорема 1. 1. Для дефектной матрицы $A \in M_n(\mathrm{P})$ многообразие $\mathrm{O}_{GL}(A)$ не замкнуто в пространстве $(M_n(\mathrm{P}), \|\cdot\|)$.

2. Многообразие $\mathrm{O}_{GL}(A)$ не ограничено для не скалярной матрицы $A \in M_n(\mathrm{P})$.

Доказательство. 1. Не теряя общности, доказательство проведем для вещественного спектра матрицы A (ниже уточним, какие детали нужно учесть для комплексного случая). Пусть $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathrm{P}$ — собственные значения матрицы A, и пусть A в жордановом базисе имеет хотя бы одну клетку (жорданов блок) порядка ≥ 2 для некоторого собственного значения. Примем $\tilde{A} := \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n\}$, т.е. матрица $\tilde{A}$ по структуре недефектная. Согласно теореме 3.1.11 [16], очевидно, будет $\tilde{A} \notin \mathrm{O}_{GL}(A)$.

Используя следствие 3.1.13 [16], получаем, что для любого числа $\varepsilon \neq 0$ найдется матрица $\tilde{A}_\varepsilon \in \mathrm{O}_{GL}(A)$ вида

$$\tilde{A}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \lambda_1 & d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & d_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

такая, что каждое $d_i \in \{0, \varepsilon\}$, $i = \overline{1, n-1}$.

Тогда будет выполняться неравенство $\|\tilde{A}_\varepsilon - \tilde{A}\| \leq \sqrt{n-1}\,|\varepsilon|$, т.е. в любой l_2-близости от $\tilde{A}$ найдутся матрицы из $\mathrm{O}_{GL}(A)$, что доказывает утверждение 1. Если у матрицы A имеются комплексные собственные числа, то можно использовать вещественную жорданову каноническую форму (теорема 3.4.5 [16]) и аналог следствия 3.1.13 [16] для нее.

 ISSN 0572-2691

2. Заметим, что если A не скалярная матрица, то в многообразии $\mathrm{O}_{GL}(A)$ найдется не диагональная матрица $\tilde{A}$. Действительно, если сама A не диагональная, то берем $\tilde{A} = A$. Напротив, пусть $A = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n\}$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда, полагая $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{+} I_{n-2}$, где $\dot{+}$ — прямая сумма матриц и I_{n-2} — единичная $(n-2)\times(n-2)$-матрица, соответственно получаем, что $\tilde{A} = SAS^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 - \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \dot{+}$ $\dot{+}\,\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n\}$ не диагональная матрица.

Далее, берем $D_h = \mathrm{diag}\{1, h, h^2, \ldots, h^{n-1}\} \in GL_n(\mathrm{P})$, тогда, очевидно, имеем

$$D_h \tilde{A} D_h^{-1} \in \mathrm{O}_{GL}(A), \quad \forall h \in (0, +\infty),$$

и $\| D_h \tilde{A} D_h^{-1} \| \to \infty$ либо при $h \to \infty$ (нижняя треугольная структура матрицы $D_h \tilde{A} D_h^{-1}$), либо при $h \to 0$ (верхняя треугольная структура матрицы $D_h \tilde{A} D_h^{-1}$), либо в обоих случаях (не треугольная структура $D_h \tilde{A} D_h^{-1}$), что в конечном итоге устанавливает утверждение ii). □

Если многообразие $\mathrm{O}_{GL}(A)$ не замкнуто, то для любой матрицы $\tilde{A} \in M_n(\mathrm{P}) \setminus \mathrm{O}_{GL}(A)$, являющейся предельной точкой для $\mathrm{O}_{GL}(A)$, сколь угодно малое неустранимое «шевеление» ее элементов может привести к ситуации, когда $\tilde{A} \in \mathrm{O}_{GL}(A)$; в [15] дан анализ, к какому простейшему виду можно привести семейство матриц из $M_n(\mathrm{X})$, гладко зависящих от параметров, с помощью гладко зависящих от параметров замен координат (см. также теорему 3). В данном контексте, несмотря на «мало оптимистичный» результат теоремы 1 для дифференциальной реализации (1) с дефектной матрицей A, заметим, что для решения практических задач, как правило, достаточно следующего геометрического утверждения.

Теорема 2. 1. Для недефектной матрицы $A \in M_n(\mathrm{P})$ многообразие $\mathrm{O}_{GL}(A)$ замкнуто в пространстве $(M_n(\mathrm{P}), \|\cdot\|)$.

2. $\mathrm{O}_{SO}(A)$ — компакт для любой матрицы $A \in M_n(\mathrm{P})$.

Доказательство. Многообразие $\mathrm{O}_{SO}(A)$ компактно в силу п. 3 теоремы I.3.1 [10], что подтверждает часть 2. Перейдем к доказательству утверждения 1.

Пусть $f_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ — характеристический многочлен матрицы A ($I \in M_n(\mathrm{P})$ — единичная матрица) и $g_A(\lambda)$ — минимальный многочлен для A.

Определим нелинейное векторно-матричное отображение

$$\varphi : M_n(\mathrm{P}) \to \mathrm{P}^n \times M_n(\mathrm{P}),$$

$$B \mapsto \varphi(B) := (\mathrm{col}(\varphi_1(B), \ldots, \varphi_n(B)), g_A(B)),$$

где $\varphi_k(B) = (-1)^k E_k(B)$, $E_k(B)$ — сумма главных миноров матрицы B порядка k, $k = \overline{1, n}$ (т.е. $\varphi_k(B)$ — коэффициент при λ^{n-k} в характеристическом многочлене матрицы B).

Заметим, что для недефектной матрицы A условие $B \in \mathrm{O}_{GL}(A)$ эквивалентно

$$\varphi(B) = (\mathrm{col}(a_1, \ldots, a_n), 0_n), \tag{5}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — коэффициенты характеристического многочлена матрицы A и 0_n — нулевая $n \times n$-матрица.

То, что равенство (5) выполняется для любой матрицы $B \in \mathrm{O}_{GL}(A)$, очевидно. Покажем обратное. Пусть (5) выполнено. Тогда из условия $g_A(B) = 0_n$ получаем, что минимальный многочлен B является делителем $g_A(\lambda)$. Следовательно, B недефектная и ее спектр содержится в спектре A. Из равенств $\varphi_1(B) = a_1, \ldots, \varphi_n(B) = a_n$ получаем, что характеристический многочлен B совпадает с $f_A(\lambda)$, поэтому в спектре матрицы B содержатся все собственные числа матрицы A и с той же кратностью.

Из доказанного выше получаем, что $\mathrm{O}_{GL}(A) = \varphi^{-1}(\mathrm{col}(a_1, \ldots, a_n), 0_n)$ и, следовательно, орбита $\mathrm{O}_{GL}(A)$ замкнута, так как очевидно, что отображение φ непрерывно. □

Замечание 2. Несмотря на то, что приведение матрицы к жордановой нормальной форме — по существу неустойчивая операция (данная форма разрывно зависит от элементов исходной матрицы), ход доказательства теоремы 2 позволяет заключить, что многообразие[*]

$$\cup \{SA'S^{-1} : S \in GL_n(\mathrm{P}),\ A' \in M_n(\mathrm{P})\ \&\ \det(\lambda I - A') = \det(\lambda I - A)\}$$

замкнуто, так как равно $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \varphi_k^{-1}(a_k)$, где $\{a_i\}_{i=1,\ldots,n}$ — коэффициенты характеристического многочлена $\det(\lambda I - E)$; это уточняет положение, когда матрица A имеет кратные собственные значения (не только вещественные).

Теорема 2 приводит к некоторым важным выводам, касающимся разрешимости задачи оптимизации нормы юстировки матриц A, $\hat{A}$, которые перечислены ниже.

Следствие 1. При юстировке матриц $A \in M_n(\mathrm{P})$, $\hat{A} \in M_n(\mathrm{P}) \setminus \mathrm{O}_{GL}(A)$ существуют такие трансформирующие матрицы $S^{**}, S^{***} \in SO_n$, что выполнимы равенства

$$\| \eta_{SO}(S^{***}, A, \hat{A}) \| = \sup \{ \| \eta_{SO}(S, A, \hat{A}) \| : S \in SO_n \},$$

$$\| \eta_{SO}(S^{**}, A, \hat{A}) \| = \inf \{ \| \eta_{SO}(S, A, \hat{A}) \| : S \in SO_n \}.$$

Для недефектной матрицы A найдется $S^* \in GL_n(\mathrm{P})$, для которой

$$\| \eta_{GL}(S^*, A, \hat{A}) \| = \inf \{ \| \eta_{GL}(S, A, \hat{A}) \| : S \in GL_n(\mathrm{P}) \}. \tag{6}$$

Доказательство. Первые два равенства вполне прозрачны, поэтому подтвердим (6). Пусть $r := \| A - \hat{A} \|$. Тогда множество GL-юстировки матриц A, $\hat{A}$

$$W := \{ A' \in M_n(\mathrm{P}) : \| A' - \hat{A} \| \le r \} \cap \mathrm{O}_{GL}(A)$$

---

[*] Данное многообразие — объединение всех орбит $\mathrm{O}_{\mathrm{GL}}(A')$, отвечающих матрицам A' с характеристическим многочленом, как у исходной матрицы A (т.е. не обязательно, что A' подобна A); из теорем 1 и 2 следует, что среди означенных орбит $\mathrm{O}_{GL}(A')$ замкнута лишь одна, та, что отвечает матрице A', для которой минимальный многочлен не имеет кратных корней.

компактное (поскольку многообразие $\mathrm{O}_{GL}(A)$ замкнутое), отсюда

$$\exists S^* \in GL_n(\mathrm{P}) : S^* A S^{*-1} \in W \,\&\, \| \eta_{GL}(S^*, A, \tilde{A}) \| = \inf \{ \| A' - \tilde{A} \| : A' \in W \},$$

что подтверждает (6); т.е. $\| \eta_{GL}(S^*, A, \tilde{A}) \|$ — расстояние от $\tilde{A}$ до компакта W в метрике Хаусдорфа, при этом существование матрицы S^* — очевидное следствие того, что числовая функция $A' \mapsto \| A' - \tilde{A} \| : W \to \mathrm{P}$ достигает на компакте W нижней (впрочем, и верхней) грани. □

Теорема 3. Если порядок n системы дифференциальной реализации нечетный, то многообразие $\mathrm{O}_{GL}(A)$ линейно связное.

Доказательство не приводим, так как оно элементарно вытекает из рассуждений, привлекающих линейную связность подгруппы матриц из $GL_n(\mathrm{P})$ с положительным детерминантом (см. 1.5.14 [17]); означенная линейно связная компонента — открытое множество в $(M_n(\mathrm{P}), \| \cdot \|)$; линейно связное пространство связно, но обратное неверно, в силу чего линейно связные компоненты (максимальные линейно связные подмножества) не обязательно должны быть замкнутыми множествами. На геометрическом языке этот результат гласит: при нечетном минимальном динамическом порядке для действия подобия нет структурных препятствий, чтобы перевести базис системы (1) в базис системы (3) непрерывным движением (иными словами, деформацией, трансформирующей матрицы S в области орбиты $\mathrm{O}_{GL}(A)$); это, в частности, при четном n делает проблематичным использование метода Ньютона–Канторовича в вычислении трансформирующей матрицы S^*, удовлетворяющего следствию 1, и методологически оправданным (в данной ситуации) использование группы преобразований SO_n.

3. Оценка квазиточности юстировки матриц

Начнем этот раздел с простого факта: для любых матриц $H, A, \tilde{A} \in M_n(\mathrm{P})$ существует (и притом единственная) вещественная симметричная положительно-полуопределенная матрица $G(A, \tilde{A}) \in M_{n^2}(\mathrm{P})$ такая, что справедливо связывающее равенство

$$h^{\mathrm{T}} G(A, \tilde{A})\, h = \| HA - \tilde{A} H \|^2,$$

где $[h_{ij}] = H \in M_n(\mathrm{P})$, $h_1, \ldots, h_n$ — столбцы матрицы H и $h := \mathrm{col}(h_1, \ldots, h_n) \in \mathrm{P}^{n^2}$. Явное выражение для матрицы $G(A, \tilde{A})$ легко получить, используя конструкцию прямого произведения (см., например, § 8.5 [18]):

$$G(A, \tilde{A}) = F^{\mathrm{T}} F, \quad F = I \otimes A^{\mathrm{T}} - \tilde{A} \otimes I.$$

В контексте нижеследующей теоремы отметим (переходя к построениям над полем X), что собственные значения $n^2 \times n^2$-матрицы $F \in M_{n^2}(\mathrm{X})$ (кронекеровская разность A^{T} и $\tilde{A}$) совпадают с n^2 числами $v_i - v'_j$, где $v_1, \ldots, v_n$ — собственные значения матрицы $A \in M_n(\mathrm{X})$ и $v'_1, \ldots, v'_n$ — собственные значения $\tilde{A} \in M_n(\mathrm{X})$ (теорема 8.3.1 [18]). Ясно, что $\| F \| = (\mathrm{tr}\, G)^{1/2}$ и все n^2 собственных значений матрицы $G(A, \tilde{A})$ лежат на полуоси $[0, \infty) \subset \mathrm{P}$.

Теорема 4. При юстировке матриц $A \in M_n(\mathrm{P})$, $\tilde{A} \in M_n(\mathrm{P}) \setminus \mathrm{O}_{\mathrm{GL}}(A)$ справедливы оценки квазиточности и рассогласования

$$f_{GL}(A, \tilde{A}) \geq (n\lambda_{\min}(G(A, \tilde{A})))^{1/2},$$

$$\sup\{\|\eta_{SO}(S, A, \tilde{A})\| : S \in SO_n\} \leq g_{SO}(A, \tilde{A}) \leq n(\lambda_{\max}(G(A, \tilde{A})))^{1/2},$$

где $\lambda_{\min}(G(A, \tilde{A})), \lambda_{\max}(G(A, \tilde{A}))$ — соответственно минимальное и максимальное собственные значения матрицы $G(A, \tilde{A})$.

Доказательство. Поскольку при GL-юстировке матриц A, $\tilde{A}$ справедливы положения

$$c \in \mathrm{P}, c \neq 0 \Rightarrow \eta_{GL}(cS, A, \tilde{A}) = \eta_{GL}(S, A, \tilde{A}),$$

$$\|S\| = 1 \Rightarrow \|S^{-1}\| \geq n^{1/2},$$

проверяемые непосредственно и, сверх того, группа $GL_n(\mathrm{P})$ — открытое множество, всюду плотное в пространстве $(M_n(\mathrm{P}), \|\cdot\|)$, то имеет место цепочка следующих отношений:

$$f_{GL}(A, \tilde{A}) = \inf\{\|S^{-1}\|\|\eta_{GL}(S, A, \tilde{A})S\| : S \in GL_n(\mathrm{P})\} \geq$$

$$\geq \inf\{n^{1/2}\|\eta_{GL}(S, A, \tilde{A})S\| : S \in GL_n(\mathrm{P}), \|S\| = 1\} =$$

$$= \inf\{n^{1/2}\|HA - \tilde{A}H\| : H \in M_n(\mathrm{P}), \|H\| = 1\} =$$

$$= (\inf\{n\|HA - \tilde{A}H\|^2 / \|H\|^2 : H \in M_n(\mathrm{P})\})^{1/2} =$$

$$= (\inf\{nh^{\mathrm{T}}G(A, \tilde{A})h / h^{\mathrm{T}}h : h \in \mathrm{P}^{n\times n}\})^{1/2} = (n\lambda_{\min}(G(A, \tilde{A})))^{1/2},$$

где $h := \mathrm{col}(h_1, \ldots, h_n) \in \mathrm{P}^{n^2}$ — вектор, индуцированный матрицей $[h_{ij}] = H \in M_n(\mathrm{P})$, $\lambda_{\min}(G(A, \tilde{A}))$ — минимальное собственное значение матрицы $G(A, \tilde{A})$; этим замечанием завершаем построение нижней оценки квазиточности $f_{GL}(A, \tilde{A})$ при GL-юстировке матриц A, $\tilde{A}$.

Теперь обозначим основные аналитические элементы верхней оценки $g_{\mathrm{SO}}(A, \tilde{A})$:

$$\sup\{\|\eta_{SO}(S, A, \tilde{A})\| : S \in SO_n\} \leq g_{SO}(A, \tilde{A}) =$$

$$= \sup\{\|S^{-1}\|\|\eta_{SO}(S, A, \tilde{A})S\| : S \in SO_n\} =$$

$$= n(\sup\{\|SA - \tilde{A}S\|^2 / \|S\|^2 : S \in SO_n\})^{1/2} \leq$$

$$\leq n(\sup\{q^{\mathrm{T}}G(A, \tilde{A})q / q^{\mathrm{T}}q : q \in \mathrm{P}^{n\times n}\})^{1/2} = n(\lambda_{\max}(G(A, \tilde{A})))^{1/2},$$

где $\lambda_{\max}(G(A, \tilde{A}))$ — максимальное собственное значение матрицы $G(A, \tilde{A})$. □

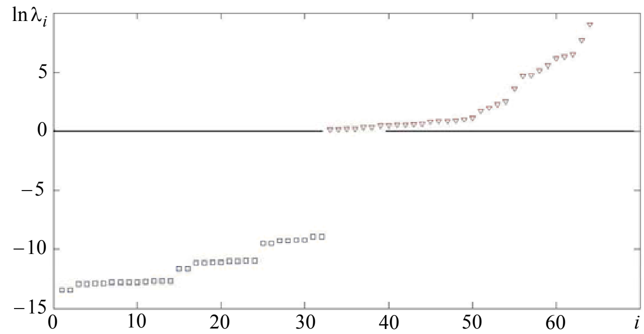
Подведем итоги: в контексте решения задачи (4) при доказательстве теоремы 4 показали, что любой собственный вектор $\mathrm{col}(h_1, \ldots, h_n)$ матрицы $G(A, \tilde{A})$, отвечающий $\lambda_{\min}(G(A, \tilde{A}))$, индуцирует матрицу $H = [h_{ij}] \in M_n(\mathrm{P})$. При этом если $H \in GL_n(\mathrm{P})$, то при действии ρ_{GL} матрицу H по существу можно рассматривать в качестве «приближенного» решения при вычислении квазиточности GL-юстировки матриц A, $\tilde{A}$. Иными словами, если $\det H \neq 0$, где H отвечает (как собственный вектор матрицы $G(A, \tilde{A})$) собственному значению $\lambda_{\min}(G(A, \tilde{A}))$, то с алгоритмической точки зрения несложная конструкция

$$\sigma_{GL}(H, A, \tilde{A}) = n^{1/2} \| HA - \tilde{A}H \| \| H \|^{-1} = (n\lambda_{\min}(G(A, \tilde{A})))^{1/2} \tag{7}$$

удовлетворяет условию (4), сводя задачу оценки квазиточности GL-юстировки к очевидной задаче вычисления собственных значений матрицы $G(A, \tilde{A})$. В противном случае (поиск решения (4) при $\det H = 0$) можно исходить из простого факта, что в любой «l_2-близости» от матрицы H всегда найдется (поскольку группа $GL_n(\mathrm{P})$ всюду плотна в многообразии $M_n(\mathrm{P})$) трансформирующая матрица $S \in GL_n(\mathrm{P})$, реализующая (согласно теореме 4) оценку (4).

Замечание 3. Геометрический смысл сказанного можно сформулировать следующим образом: если порядок n нечетный и $\det H < 0$, где H выбирается согласно условию (7), то в силу теоремы 3 трансформирующая матрица $-H \in GL_n(\mathrm{P})$ тоже определяет решение (4), для которого (в отличие от H) существует непрерывный путь в многообразии $\mathrm{O}_{GL}(A)$, соединяющий исходную матрицу A (матрицу системы (1)) и матрицу HAH^{-1} (матрицу системы (3)); т.е. существует непрерывное отображение замкнутого интервала в $\mathrm{O}_{GL}(A)$ с начальной точкой в A и концевой в HAH^{-1}, что важно для адаптивных систем, основанных на методах идентификации [20]. Если при выполнении (7) имеет место $\det H < 0$ и порядок n системы реализации четный, то для трансформирующих матриц H и $-H$ такой путь отсутствует.

Пример. Ниже (в логарифмической шкале) приведен вариант расчета $(n = 8)$ собственных значений матрицы $G(A, \tilde{A})$.



Приведем еще одно (последнее) рассуждение: Калман полагал, что «в теории систем задача реализации играет центральную роль» [19, с. 267], при этом, рассматривая [19, с. 286] задачу реализации как «попытку угадать уравнения движения динамической системы по поведению ее входных и выходных сигналов», в п. 4 [19, с. 287] отмечал, что так или иначе, задача выбора системы координат в пространстве состояний несущественна, так как то, каким образом обозначать внутреннее состояние системы, не имеет никакого содержательного физического значения. Оставляя в стороне вкусы и личные точки зрения (см. заключение в [21]), невозможно отрицать, что даже частичное приятие означенного обстоятельства по существу не имеет серьезных, по крайней мере, весьма глубоких последствий, если апеллировать (в критическом аспекте) к замечанию 1.

В.О. Воронов, А.В. Лакєєв, Ю.Е. Лінке, В.А. Русанов

ОЦІНКА ТОЧНОСТІ В ПРОЦЕСІ ЮСТИРУВАННЯ МАТРИЦІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ

На базі геометричних інваріантів простору модулів багатовиду лінійних динамічних систем мінімальної диференціальної реалізації визначаються, в певній мірі вивчаються і будуються довірчі оцінки точності юстирування матриці подібності (також і для компактних груп перетворень) багатовимірної керуючої системи, ідентифікованої в просторі станів мінімальної вимірності.

V.A. Voronov, A.V. Lakeyev, Yu.E. Linke, V.A. Rusanov

ASSESSMENT OF ACCURACY IN THE PROCESS OF ADJUSTMENT OF THE IDENTIFICATION MATRIX

On the basis of geometric invariants of the space of moduli of manifolds for linear dynamical systems of minimum differential realization constructed are estimates of the adjustment accuracy for the similarity matrix of the a posteriori modeled (identified) multidimensional system in the state space of minimum dimension.

1. *Hazewinkel M., Kalman R.* Moduli and canonical forms for linear dynamical systems: Rep. 7504. — Econometric Institute; Erasmus Univ. — Rotterdam, 1974.
2. *Hazewinkel M., Kalman R.* On invariants, canonical forms, and moduli for linear, constant, finite-dimensional, dynamical systems. — Lecture notes in Econ.-Math. System Theory. — New York : Springer-Verlag. — 1976. — **131**. — P. 48–60.
3. *Hermann R., Mart C.F.* Applications of algebraic geometry to systems theory. Part. I // IEEE Trans. Autom. Control. — 1977. — **AC-22**. — P. 19–25.
4. *Brockett R.W., Byrnes C.I.* Multivariable Nyquist criteria, root loci, and pole-placement: A geometric viewpoint // Ibid. — 1977. — **AC-26**. – P. 271–284.
5. *Algebraic* and geometric aspects of the analysis of feedback systems // Geometrical Methods for the Theory of Linear Systems / C.I. Byrnes, C.F. Martin eds. — Dordrecht : Reidel. — 1980. — P. 85–124.
6. *Brockett R.W.* Some geometric questions in the theory of linear systems // IEEE Trans. Autom. Control. — 1976. — **AC-21**. — P. 449–455.
7. *Русанов В.А., Шарпинский Д.Ю.* К теории структурной идентификации нелинейных многомерных систем // Прикладная математика и механика. — 2010. — **74**, вып. 1. — С. 119–132.
8. *Rusanov V.A., Antonova L.V., Daneev A.V., Mironov A.S.* Differential realization with a minimum operator norm of a controlled dynamic process // Advances in Differential Equations and Control Processes. — 2013. — **11**, N 1. — P. 1–40.
9. *Русанов В.А., Лакеев А.В., Линке Ю.Э.* К разрешимости дифференциальной реализации минимального динамического порядка семейства нелинейных процессов «вход–выход» в гильбертовом пространстве // Дифференциальные уравнения. — 2015. — **51**, № 4. — С. 524–537.
10. *Бредон Г.* Введение в теорию компактных групп преобразований. — М. : Наука, 1980. — 440 с.
11. *Бахтурин Ю.А.* Основные структуры современной алгебры. — М. : Наука, 1990. — 320 с.
12. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. — М. : Наука, 1977. — 744 с.
13. *Дмитриев А.В., Дружинин Э.И.* Идентификация динамических характеристик непрерывных линейных моделей в условиях полной параметрической неопределенности // Известия РАН. Теория и системы управления. — 1999. — № 3. — С. 44–52.
14. *Глазман И.М., Любич Ю.И.* Конечномерный анализ. — М. : Наука, 1969. — 476 с.
15. *Арнольд В.И.* О матрицах, зависящих от параметров // Успехи математических наук. — 1971. — **26**, вып. 2. — С. 101–114.
16. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. — М. : Мир, 1989. — 655 с.
17. *Кострикин А.И., Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия. — М. : Наука, 1986. — 304 с.
18. *Ланкастер П.* Теория матриц. — М. : Наука, 1982. — 272 с.
19. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. — М. : Мир, 1971. — 400 с.
20. *Андерсон Б., Битмид Р., Джонсон К. и др.* Устойчивость адаптивных систем. — М. : Мир, 1989. — 263 с.
21. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeev A.V., Linke Yu.E.* On the differential realization theory of non-linear dynamic processes in Hilbert space // Far East Journal of Mathematical Sciences. — 2015. — **97**, N 4. — P. 495–532.

Получено 20.11.2014
После доработки 30.04.2015