УДК 517.988

Д.А. Верлань, В.В. Семенов, Л.М. Чабак

СИЛЬНО СХОДЯЩИЙСЯ МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С НЕЛИПШИЦЕВЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Введение

Многие задачи управления и исследования операций могут быть записаны в виде вариационных неравенств:

$$\text{найти } x \in C: \ (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

где C — непустое выпуклое подмножество гильбертова пространства H, A — монотонный оператор, действующий в H [1–3]. Решение вариационных неравенств является активно развивающимся направлением прикладного анализа, и к настоящему времени предложено большое количество методов [4–30]. Известно, что в важных случаях (поиск седловой точки или равновесия Нэша) для сходимости наиболее простого проекционного метода (аналога метода проекции градиента) необходимо выполнение усиленных условий монотонности [5, 6]. Для преодоления этой трудности существует несколько подходов. Один из них состоит в регуляризации исходной задачи с целью придать ей требуемое свойство [4]. Сходимость без модификации задачи обеспечивается в итерационных методах экстраградиентного типа, впервые предложенных Г.М. Корпелевич [19]. Экстраградиентный алгоритм Корпелевич для липшицевого оператора A имеет вид:

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda A x_n), \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda A y_n), \end{cases}$$

где $\lambda \in (0, 1/L)$ — постоянная Липшица оператора A, P_C — оператор метрического проектирования на множество C. Обобщению и исследованию этого алгоритма посвящено большое количество публикаций [20–30]. Недавно для вариационных неравенств и задач равновесного программирования были предложены модификации алгоритма Корпелевич с одним метрическим проектированием на допустимое множество [28, 29]. В так называемых субградиентных экстраградиентных алгоритмах первый этап итерации совпадает с первым этапом итерации в алгоритме Корпелевич. А далее для получения x_{n+1} вместо проектирования точки

$x_n - \lambda A y_n$ на допустимое множество C осуществляется ее проектирование на некоторое опорное для C полупространство. Субградиентный экстраградиентный алгоритм имеет вид:

$$\begin{cases} x_0 \in H, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda A x_n), \\ T_n = \{z \in H : (x_n - \lambda A x_n - y_n, z - y_n) \le 0\}, \\ x_{n+1} = P_{T_n}(x_n - \lambda A y_n), \end{cases}$$

где $\lambda \in (0,1/L)$ — постоянная Липшица оператора A. В [28, 29] доказана слабая сходимость порожденных этим алгоритмом последовательностей (x_n) и (y_n) к некоторому решению вариационного неравенства. Одним из недостатков субградиентного экстраградиентного алгоритма, затрудняющим его широкое использование, является предположение о том, что константа Липшица L оператора A известна или допускает простую оценку. Кроме того, во многих задачах операторы могут не удовлетворять условию Липшица. Заметим, что в большинстве работ по алгоритмам решения вариационных неравенств рассматриваются именно липшицевые операторы. Кроме того, упомянутые методы генерируют слабо сходящиеся последовательности. В [22, 23] предложены и исследованы сильно сходящиеся модификации метода Корпелевич для неравенств с липшицевыми монотонными операторами. А в [30] с помощью гибридного метода [31] получена сильно сходящаяся модификация субградиентного экстраградиентного алгоритма (также для липшицевых монотонных операторов).

В данной работе предлагается сильно сходящийся модифицированный экстраградиентный метод с динамической регулировкой величины шага для решения вариационных неравенств с монотонными нелипшицевыми операторами, действующими в гильбертовом пространстве, и доказывается его сходимость к решению, ближайшему к заданной точке. Используемая нами регулировка величины шага взята из [20, 21], а для регуляризации применяется схема Гальперна [32, 33]. Также рассмотрены варианты метода для вариационных неравенств и операторных уравнений с априорной информацией о решении, заданной в виде множества неподвижных точек квазинерастягивающего оператора.

1. Постановка задачи и вспомогательные сведения

Далее H — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и порожденной нормой $\|\cdot\|$. Пусть C — непустое подмножество пространства H, A — оператор, действующий в H. Рассмотрим вариационное неравенство:

$$\text{найти } x \in C: \ (Ax, y - x) \ge 0 \quad \forall y \in C. \tag{1}$$

Множество решений вариационного неравенства (1) обозначим $VI(A, C)$.

Далее предположим, что выполнены следующие условия:

- множество $C \subseteq H$ — выпуклое и замкнутое;
- оператор $A: H \to H$ — монотонный, равномерно непрерывный на ограниченных множествах и отображающий ограниченные множества в ограниченные;
- $VI(A, C) \ne \varnothing$.

Замечание 1. Если $\dim H < \infty$, то достаточно требовать от оператора A монотонности и непрерывности.

Пусть P_C — оператор метрического проектирования на множество C, т.е. $P_C x$ — единственный элемент множества C со свойством

$$\| P_C x - x \| = \min_{z \in C} \| z - x \| .$$

Полезны следующие характеризации элемента $P_C x$:

$$y = P_C x \text{ тогда и только тогда, когда } y \in C \text{ и } (y - x, z - y) \geq 0 \quad \forall z \in C. \qquad (2)$$

Из неравенства (2) следует, что $x \in VI(A, C)$ тогда и только тогда, когда $x = P_C(x - \lambda A x)$, где $\lambda > 0$ [4]. Если оператор $A : H \to H$ — монотонный и непрерывный, а множество C — выпуклое и замкнутое, то $x \in VI(A, C)$ тогда и только тогда, когда $x \in C$ и $(Ay, y - x) \geq 0$ для всех $y \in C$ [4]. В частности, множество $VI(A, C)$ выпуклое и замкнутое.

Напомним, что оператор $T : H \to H$ называют квазинерастягивающим (фейеровским), если $F(T) = \{x \in H : Tx = x\} \neq \varnothing$ и $\|Tx - y\| \leq \|x - y\|$ для всех $x \in H$, $y \in F(T)$ [34]. Заметим, что множество неподвижных точек $F(T)$ квазинерастягивающего оператора замкнуто и выпукло [34]. Оператор $S : C \to H$ называют демизамкнутым в $y \in H$, если для последовательности точек $x_n \in C$ из $x_n \to x$ слабо и $Sx_n \to y$ сильно следует $Sx = y$ [6]. Известно, что для нерастягивающего оператора $T : C \to H$ оператор $I - T$ демизамкнут в нуле [6].

Следующие факты играют важную роль в доказательстве основного результата работы.

Лемма 1 [35]. Пусть числовая последовательность (a_n) имеет подпоследовательность (a_{n_k}) со свойством $a_{n_k} < a_{n_k + 1}$ для всех $k \in \mathrm{N}$. Тогда существует такая неубывающая последовательность (m_k) натуральных чисел, что $m_k \to +\infty$ и $a_{m_k} \leq a_{m_k + 1}$, $a_k \leq a_{m_k + 1}$ для всех $k \geq n_1$.

Замечание 2. Лемма 1 является эффективным инструментом исследования сходимости итерационных процессов, не обладающих фейеровским свойством относительно множества решений [18, 26, 35–37].

Лемма 2 [4]. Пусть (a_n) — последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющих неравенству $a_{n+1} \leq (1 - \alpha_n) a_n + \alpha_n \beta_n$ для всех $n \in \mathrm{N}$, где последовательности (α_n) и (β_n) обладают свойствами $\alpha_n \in (0, 1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $\overline{\lim_{n \to \infty}} \beta_n \leq 0$. Тогда $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Рассмотрим функцию $t \mapsto \| x - P_C(x - tAx) \|$, $t \in \mathrm{P}$, обладающую следующим полезным свойством.

Лемма 3. Для $x \in H$ и $\alpha \geq \beta > 0$ имеют место неравенства

$$\frac{\| x - P_C(x - \alpha A x) \|}{\alpha} \leq \frac{\| x - P_C(x - \beta A x) \|}{\beta},$$

$$\| x - P_C(x - \beta A x) \| \leq \| x - P_C(x - \alpha A x) \| .$$

Доказательство. Положим $x_\alpha = P_C(x - \alpha A x)$, $x_\beta = P_C(x - \beta A x)$. Из (2) следует

$$\left(\frac{x_\alpha - x + \alpha A x}{\alpha}, x_\beta - x_\alpha \right) \geq 0, \quad \left(\frac{x_\beta - x + \beta A x}{\beta}, x_\alpha - x_\beta \right) \geq 0.$$

Сложив неравенства, получим

$$0 \le \left(\frac{x - x_\alpha}{\alpha} - \frac{x - x_\beta}{\beta}, x_\alpha - x_\beta \right) = \left(\frac{x - x_\alpha}{\alpha} - \frac{x - x_\beta}{\beta}, (x - x_\beta) - (x - x_\alpha) \right).$$

Отсюда

$$0 \le -\| x - x_\alpha \|^2 - \frac{\alpha}{\beta} \| x - x_\beta \|^2 + \| x - x_\alpha \| \| x - x_\beta \| + \frac{\alpha}{\beta} \| x - x_\alpha \| \| x - x_\beta \| .$$

Следовательно,

$$0 \ge \left(\| x - x_\alpha \| - \frac{\alpha}{\beta} \| x - x_\beta \| \right) (\| x - x_\alpha \| - \| x - x_\beta \|).$$

Отсюда следует

$$\| x - x_\alpha \| - \frac{\alpha}{\beta} \| x - x_\beta \| \le 0 \text{ и } \| x - x_\beta \| \le \| x - x_\alpha \| ,$$

что и требовалось доказать. ■

2. Регуляризованный модифицированный экстраградиентный алгоритм

Для решения неравенства (1) предлагаем следующий алгоритм.

Алгоритм 1.

Инициализация. Задаем числовые параметры $\sigma > 0$, $\tau \in (0, 1)$, $\theta \in (0, 1)$, элемент $x_0 \in H$ и последовательность $(\alpha_n) \subseteq (0, 1)$ такую, что $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$.

Итерационный шаг. Для $x_n \in H$ вычисляем

$$y_n = P_C (x_n - \lambda_n A x_n),$$

где λ_n получаем из условия

$$\begin{cases} j(n) = \min \{ j \ge 0 : \sigma\tau^j \| A P_C (x_n - \sigma\tau^j A x_n) - A x_n \| \le \theta \| P_C (x_n - \sigma\tau^j A x_n) - x_n \| \}, \\ \lambda_n = \sigma\tau^{j(n)}. \end{cases} \tag{3}$$

Вычисляем

$$x_{n+1} = \alpha_n x_0 + (1 - \alpha_n) P_{T_n} (x_n - \lambda_n A y_n),$$

где

$$T_n = \{ z \in H : (x_n - \lambda_n A x_n - y_n, z - y_n) \le 0 \}.$$

Замечание 3. Динамическая регулировка величины шага — правило (3) — введена в [20, 21].

Прежде всего покажем, что процедура (3) всегда оканчивается за конечное число шагов.

Лемма 4. Правило (3) выбора параметра λ_n корректно, т.е. $j(n) < +\infty$.

Доказательство. Пусть $x_n \in VI(A, C)$. Тогда $x_n = P_C (x_n - \sigma A x_n)$ и $j(n) = 0$. Рассмотрим ситуацию $x_n \notin VI(A, C)$ и предположим, что для всех $j \in \mathrm{N}$ выполняется неравенство

$$\sigma\tau^j \| A P_C (x_n - \sigma\tau^j A x_n) - A x_n \| > \theta \| P_C (x_n - \sigma\tau^j A x_n) - x_n \| .$$

Отсюда

$$\lim_{j \to \infty} \| P_C (x_n - \sigma\tau^j A x_n) - x_n \| = 0.$$

Из равномерной непрерывности оператора A на ограниченных множествах следует

$$\lim_{j\to\infty} \| AP_C(x_n - \sigma\tau^j Ax_n) - Ax_n \| = 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\| P_C(x_n - \sigma\tau^j Ax_n) - x_n \|}{\sigma\tau^j} = 0. \tag{4}$$

Положим $y_n^j = P_C(x_n - \sigma\tau^j Ax_n)$. Имеем

$$\left(\frac{y_n^j - x_n}{\sigma\tau^j}, x - y_n^j \right) + (Ax_n, x - y_n^j) \ge 0 \quad \forall x \in C. \tag{5}$$

Совершив предельный переход в (5) с учетом (4), получим

$$(Ax_n, x - x_n) \ge 0 \quad \forall x \in C,$$

т.е. $x_n \in VI(A, C)$. В результате приходим к противоречию. ■

Замечание 4. При доказательстве леммы 4 вообще не использовалась монотонность оператора A.

3. Вспомогательные неравенства

Положим

$$z_n = P_{T_n}(x_n - \lambda_n Ay_n). \tag{6}$$

Имеет место лемма.

Лемма 5. Для последовательностей (x_n), (y_n) и (z_n), порожденных алгоритмом 1, имеет место неравенство

$$\| z_n - z \|^2 \le \| x_n - z \|^2 - (1-\theta) \| x_n - y_n \|^2 - (1-\theta) \| z_n - y_n \|^2, \tag{7}$$

где $z \in VI(A, C)$.

Доказательство. Приводя рассуждения из [28, доказательство леммы 3], приходим к неравенству

$$\| z_n - z \|^2 \le \| x_n - z \|^2 - \| x_n - y_n \|^2 - \| y_n - z_n \|^2 + 2\lambda_n (Ax_n - Ay_n, z_n - y_n). \tag{8}$$

Слагаемое $2\lambda_n (Ax_n - Ay_n, z_n - y_n)$ в (8) оценим следующим образом

$$2\lambda_n (Ax_n - Ay_n, z_n - y_n) \le 2\lambda_n \| Ax_n - Ay_n \| \| z_n - y_n \| \le$$

$$\le 2\theta \| x_n - y_n \| \| z_n - y_n \| \le \theta \| x_n - y_n \|^2 + \theta \| z_n - y_n \|^2. \tag{9}$$

Учитывая оценку (9) в (8), приходим к желаемому неравенству (7). ■

Лемма 6. Для порожденных алгоритмом 1 последовательностей (x_n), (y_n) и (z_n) имеет место неравенство

$$\| x_{n+1} - z \|^2 - \| x_n - z \|^2 + (1-\theta) \| x_n - y_n \|^2 + (1-\theta) \| z_n - y_n \|^2 \le 2\alpha_n (x_0 - z, x_{n+1} - z).$$

где $z \in VI(A, C)$.

Доказательство. Пусть $z \in VI(A, C)$. Применим элементарное неравенство

$$\| a + b \|^2 \le \| a \|^2 + 2(b, a + b).$$

Имеем

$$\| x_{n+1} - z \|^2 = \| \alpha_n (x_0 - z) + (1 - \alpha_n)(z_n - z) \|^2 \le (1 - \alpha_n)^2 \| z_n - z \|^2 +$$

$$+ 2\alpha_n (x_0 - z, x_{n+1} - z) \le \| z_n - z \|^2 + 2\alpha_n (x_0 - z, x_{n+1} - z). \tag{10}$$

Учитывая в (10) неравенство (7), приходим к желаемой оценке. ■

Перейдем к доказательству сильной сходимости алгоритма 1.

4. Сильная сходимость алгоритма 1

Сначала докажем ограниченность порожденных алгоритмом последовательностей.

Лемма 7. Порожденные алгоритмом 1 последовательности (x_n), (y_n) и (z_n) ограниченны.

Доказательство. Пусть $z \in VI(A, C)$. Имеем

$$\| x_{n+1} - z \| = \| \alpha_n x_0 + (1-\alpha_n) z_n - z \| =$$

$$= \| \alpha_n (x_0 - z) + (1-\alpha_n)(z_n - z) \| \le \alpha_n \| x_0 - z \| + (1-\alpha_n) \| z_n - z \| .$$

Воспользовавшись неравенством леммы 5, получим

$$\| x_{n+1} - z \| \le \alpha_n \| x_0 - z \| + (1-\alpha_n) \| x_n - z \| \le \max\{ \| x_0 - z \|, \| x_n - z \| \}.$$

Следовательно,

$$\| x_{n+1} - z \| \le \max\{ \| x_0 - z \|, \| x_1 - z \| \} \quad \forall n \in \mathrm{N} .$$

Таким образом, последовательность (x_n) ограниченна.

Ограниченность последовательностей (y_n) и (z_n) следует из ограниченности (x_n) и леммы 5. ■

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть множество $C \subseteq H$ — выпуклое и замкнутое, оператор $A: H \to H$ — монотонный, равномерно непрерывный на ограниченных множествах и отображающий ограниченные множества в ограниченные. Предположим, что $VI(A, C) \ne \varnothing$. Тогда последовательности (x_n), (y_n) и (z_n), порожденные алгоритмом 1, сильно сходятся к точке $z_0 = P_{VI(A,C)} x_0$.

Доказательство. Рассмотрим элемент $z_0 = P_{VI(A,C)} x_0$. Из леммы 7 следует существование такого числа $M > 0$, что $| (x_0 - z_0, x_{n+1} - z_0) | \le M$ для всех $n \in \mathrm{N}$. Тогда из неравенства леммы 6 получим оценку

$$\| x_{n+1} - z_0 \|^2 - \| x_n - z_0 \|^2 + (1-\theta) \| x_n - y_n \|^2 + (1-\theta) \| z_n - y_n \|^2 \le 2\alpha_n M. \tag{11}$$

Рассмотрим числовую последовательность $(\| x_n - z_0 \|)$. Возможны два варианта: а) существует номер $\bar{n} \in \mathrm{N}$ такой, что $\| x_{n+1} - z_0 \| \le \| x_n - z_0 \|$ для всех $n \ge \bar{n}$; б) существует возрастающая последовательность номеров (n_k) такая, что $\| x_{n_k+1} - z_0 \| > \| x_{n_k} - z_0 \|$ для всех $k \in \mathrm{N}$.

Сначала рассмотрим вариант а). В этом случае существует $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - z_0 \| \in \mathrm{P}$. Поскольку $\| x_{n+1} - z_0 \|^2 - \| x_n - z_0 \|^2 \to 0$ и $\alpha_n \to 0$, то при $n \to \infty$ имеем

$$\| x_n - y_n \| \to 0, \tag{12}$$

$$\| z_n - y_n \| \to 0. \tag{13}$$

Из ограниченности (x_n) следует существование подпоследовательности (x_{n_k}), слабо сходящейся к точке $w \in H$. Из (12) следует, что $y_{n_k} \to w$ слабо. Следовательно, $w \in C$. Покажем, что обязательно $w \in VI(A, C)$.

ISSN 0572-2691

Возможны два варианта: 1) числовая последовательность (λ_{n_k}) не стремится к нулю; 2) $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{n_k} = 0$.

Сначала рассмотрим вариант 1). Можно считать, что $\lambda_{n_k} \geq \lambda$ для всех достаточно больших k и некоторого $\lambda > 0$. Имеем

$$(y_{n_k} - x_{n_k} + \lambda_{n_k} A x_{n_k}, x - y_{n_k}) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

Отсюда, используя монотонность оператора A, выводим оценку

$$0 \leq \frac{(y_{n_k} - x_{n_k} + \lambda_{n_k} A x_{n_k}, x - y_{n_k})}{\lambda_{n_k}} = \frac{(y_{n_k} - x_{n_k}, x - y_{n_k})}{\lambda_{n_k}} + (A x_{n_k}, x_{n_k} - y_{n_k}) +$$

$$+ (A x_{n_k}, x - x_{n_k}) \leq \frac{(y_{n_k} - x_{n_k}, x - y_{n_k})}{\lambda_{n_k}} + (A x_{n_k}, x_{n_k} - y_{n_k}) + (Ax, x - x_{n_k}).$$

Совершив предельный переход с учетом (12), получим

$$(Ax, x - w) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

Следовательно, $w \in VI(A, C)$.

Рассмотрим вариант 2). Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{n_k} = 0$. Положим $w_{n_k} = P_C(x_{n_k} - \mu_{n_k} A x_{n_k})$, где $\mu_{n_k} = \lambda_{n_k} \tau^{-1} = \sigma \tau^{j(n_k)-1} > \lambda_{n_k} > 0$. Применим лемму 3. Имеем

$$\| x_{n_k} - w_{n_k} \| \leq \frac{1}{\tau} \| x_{n_k} - y_{n_k} \| \to 0.$$

В частности, последовательность (w_{n_k}) ограниченна и $w_{n_k} \to w$ слабо. Из равномерной непрерывности оператора A на ограниченных множествах следует $\| A x_{n_k} - A w_{n_k} \| \to 0$. А неравенство $\mu_{n_k} \| A w_{n_k} - A x_{n_k} \| > \theta \| w_{n_k} - x_{n_k} \|$ влечет асимптотику

$$\frac{\| x_{n_k} - w_{n_k} \|}{\mu_{n_k}} \to 0. \tag{14}$$

Далее имеем

$$(w_{n_k} - x_{n_k} + \mu_{n_k} A x_{n_k}, x - w_{n_k}) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

Отсюда выводим оценку

$$0 \leq \frac{(w_{n_k} - x_{n_k}, x - w_{n_k})}{\mu_{n_k}} + (A x_{n_k}, x_{n_k} - w_{n_k}) + (Ax, x - x_{n_k}).$$

Совершив предельный переход с учетом (14), получим

$$(Ax, x - w) \geq 0 \quad \forall x \in C,$$

отсюда $w \in VI(A, C)$.

Докажем, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (x_0 - z_0, x_{n+1} - z_0) \leq 0. \tag{15}$$

Рассмотрим такую подпоследовательность (x_{n_k}), что

$$\lim_{k\to\infty} (x_0 - z_0, x_{n_k} - z_0) = \overline{\lim_{n\to\infty}} (x_0 - z_0, x_{n+1} - z_0).$$

Можно считать, что $x_{n_k} \to w \in VI(A,C)$ слабо. Тогда получаем

$$\lim_{k\to\infty}(x_0 - z_0, x_{n_k} - z_0) = (x_0 - z_0, w - z_0) = (x_0 - P_{VI(A,C)}x_0, w - P_{VI(A,C)}x_0) \le 0,$$

чем и доказываем (15).

Теперь из (15), оценки

$$\|x_{n+1} - z_0\|^2 = \|\alpha_n(x_0 - z_0) + (1-\alpha_n)(z_n - z_0)\|^2 \le (1-\alpha_n)^2\|z_n - z_0\|^2 +$$

$$+ 2\alpha_n(x_0 - z_0, x_{n+1} - z_0) \le (1-\alpha_n)\|x_n - z_0\|^2 + 2\alpha_n(x_0 - z_0, x_{n+1} - z_0)$$

и леммы 2 делаем вывод, что $\|x_n - z_0\| \to 0.$ Из (12), (13) получаем $\|y_n - z_0\| \to 0$ и $\|z_n - z_0\| \to 0.$

Изучим вариант б). В этом случае рассмотрим последовательность номеров (m_k) со следующими свойствами (лемма 1):

i) $m_k \square +\infty$;

ii) $\|x_{m_k+1} - z_0\| \ge \|x_{m_k} - z_0\|$ для всех $k \ge n_1$;

iii) $\|x_{m_k+1} - z_0\| \ge \|x_k - z_0\|$ для всех $k \ge n_1$.

Из неравенства леммы 6 и ii) следует

$$(1-\theta)\|x_{m_k} - y_{m_k}\|^2 + (1-\theta)\|z_{m_k} - y_{m_k}\|^2 \le 2\alpha_{m_k}(x_0 - z_0, x_{m_k+1} - z_0) \le 2\alpha_{m_k} M.$$

Отсюда $\lim_{k\to\infty}\|x_{m_k} - y_{m_k}\| = \lim_{k\to\infty}\|z_{m_k} - y_{m_k}\| = 0.$ Из рассуждений, подобных вышеизложенным, видно, что частичные слабые пределы последовательностей (x_{m_k}) и (y_{m_k}) принадлежат множеству $VI(A,C).$ Из неравенства

$$\|x_{m_k+1} - x_{m_k}\| = \|\alpha_{m_k}x_0 + (1-\alpha_{m_k})z_{m_k} - x_{m_k}\| \le \alpha_{m_k}\|x_0 - x_{m_k}\| +$$

$$+ (1-\alpha_{m_k})\|z_{m_k} - x_{m_k}\| \le \alpha_{m_k}\|x_0 - x_{m_k}\| + (1-\alpha_{m_k})(\|z_{m_k} - y_{m_k}\| + \|y_{m_k} - x_{m_k}\|)$$

следует $\|x_{m_k+1} - x_{m_k}\| \to 0.$ Из тождества

$$(x_0 - z_0, x_{m_k+1} - z_0) = (x_0 - z_0, x_{m_k} - z_0) + (x_0 - z_0, x_{m_k+1} - x_{m_k})$$

получаем

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}(x_0 - z_0, x_{m_k+1} - z_0) = \overline{\lim_{k\to\infty}}(x_0 - z_0, x_{m_k} - z_0).$$

Как и ранее, получаем

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}(x_0 - z_0, x_{m_k+1} - z_0) \le 0.$$

Далее имеем

$$\|x_{m_k+1} - z_0\|^2 \le (1-\alpha_{m_k})\|x_{m_k} - z_0\|^2 + 2\alpha_{m_k}(x_0 - z_0, x_{m_k+1} - z_0) \le$$

$$\le (1-\alpha_{m_k})\|x_{m_k+1} - z_0\|^2 + 2\alpha_{m_k}(x_0 - z_0, x_{m_k+1} - z_0).$$

Отсюда, учитывая условие iii), получаем

$$\|x_k - z_0\|^2 \le \|x_{m_k+1} - z_0\|^2 \le 2(x_0 - z_0, x_{m_k+1} - z_0).$$

 ISSN 0572-2691

Таким образом,

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left\|x_k - z_0\right\|^2 \le 2\,\overline{\lim_{k\to\infty}}\,(x_0 - z_0, x_{m_k+1} - z_0) \le 0.$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - z_0\right\| = 0$ и $\lim_{n\to\infty}\left\|y_n - z_0\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|z_n - z_0\right\| = 0$. ■

5. Алгоритм для вариационных неравенств с априорной информацией

Рассмотрим вариант метода для поиска решения вариационного неравенства (1), дополнительно являющегося неподвижной точкой заданного оператора.

Пусть $S : H \to H$ — квазинерастягивающий оператор, такой что $I - S$ — демизамкнутый в нуле оператор со множеством неподвижных точек $F(S) = \{x \in H : Sx = x\}$. Предположим,

$$VI(A, C) \cap F(S) \ne \varnothing .$$

Замечание 5. Пусть $g : H \to \mathrm{P}$ — выпуклая дифференцируемая функция. Если множество $D = \{x \in H : g(x) \le 0\} \ne \varnothing$ непусто, то его можно трактовать как множество неподвижных точек квазинерастягивающего оператора

$$Sx = \begin{cases} x - \dfrac{g(x)}{\left\|g'(x)\right\|^2} g'(x), & \text{если } x \notin D, \\ x, & \text{если } x \in D, \end{cases}$$

где $g'(x) \in H$ — производная g в точке $x \in H$ [34]. Для демизамкнутости в нуле оператора $I - S$ достаточно ограниченности g на любом ограниченном множестве [34].

Для поиска элементов множества $VI(A, C) \cap F(S)$ рассмотрим следующий алгоритм.

Алгоритм 2.

Инициализация. Задаем числовые параметры $\sigma > 0$, $\tau \in (0,1)$, $\theta \in (0,1)$, элемент $x_0 \in H$, последовательность $(\delta_n) \subseteq [a, b] \subseteq (0,1)$ и последовательность $(\alpha_n) \subseteq (0,1)$ такую, что $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$.

Итерационный шаг. Для $x_n \in H$ вычисляем $y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n)$, где λ_n получаем из условия

$$\begin{cases} j(n) = \min\{ j \ge 0 : \sigma\tau^j \left\| A P_C(x_n - \sigma\tau^j A x_n) - A x_n \right\| \le \theta \left\| P_C(x_n - \sigma\tau^j A x_n) - x_n \right\| \}, \\ \lambda_n = \sigma\tau^{j(n)}. \end{cases}$$

Вычисляем

$$x_{n+1} = \alpha_n x_0 + (1 - \alpha_n)(\delta_n x_n + (1 - \delta_n)\, S P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n)),$$

где

$$T_n = \{ z \in H : (x_n - \lambda_n A x_n - y_n, z - y_n) \le 0 \}.$$

При анализе алгоритма 2 продолжим использовать обозначение (6).

Лемма 8. Для порожденных алгоритмом 2 последовательностей (x_n), (y_n) и (z_n) имеет место неравенство

$$\left\|x_{n+1} - z\right\|^2 - \left\|x_n - z\right\|^2 + (1 - \delta_n)(1 - \theta)\left\|x_n - y_n\right\|^2 +$$

$$+ (1 - \delta_n)(1 - \theta)\left\|z_n - y_n\right\|^2 + \delta_n(1 - \delta_n)\left\|x_n - S z_n\right\|^2 \le 2\alpha_n (x_0 - z, x_{n+1} - z),$$

где $z \in VI(A, C) \cap F(S)$.

Доказательство. Пусть $z \in VI(A, C) \cap F(S)$. Имеем

$$\|x_{n+1} - z\|^2 = \|\alpha_n(x_0 - z) + (1-\alpha_n)(\delta_n x_n + (1-\delta_n)Sz_n - z)\|^2 \le$$

$$\le (1-\alpha_n)^2 \|\delta_n x_n + (1-\delta_n)Sz_n - z\|^2 + 2\alpha_n(x_0 - z, x_{n+1} - z) \le$$

$$\le \|\delta_n(x_n - z) + (1-\delta_n)(Sz_n - z)\|^2 + 2\alpha_n(x_0 - z, x_{n+1} - z) =$$

$$= \delta_n\|x_n - z\|^2 + (1-\delta_n)\|Sz_n - z\|^2 - \delta_n(1-\delta_n)\|x_n - Sz_n\|^2 + 2\alpha_n(x_0 - z, x_{n+1} - z) \le$$

$$\le \delta_n\|x_n - z\|^2 + (1-\delta_n)\|z_n - z\|^2 - \delta_n(1-\delta_n)\|x_n - Sz_n\|^2 + 2\alpha_n(x_0 - z, x_{n+1} - z). \quad (16)$$

Используя лемму 5 для оценки слагаемого $(1-\delta_n)\|z_n - z\|^2$ в (16), приходим к неравенству

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \le \|x_n - z\|^2 - (1-\delta_n)(1-\theta)\|x_n - y_n\|^2 -$$

$$-(1-\delta_n)(1-\theta)\|z_n - y_n\|^2 - \delta_n(1-\delta_n)\|x_n - Sz_n\|^2 + 2\alpha_n(x_0 - z, x_{n+1} - z),$$

что и следовало доказать. ■

Лемма 9. Порожденные алгоритмом 2 последовательности (x_n), (y_n) и (z_n) ограниченны.

Доказательство. Пусть $z \in VI(A, C) \cap F(S)$. Имеем

$$\|x_{n+1} - z\| = \|\alpha_n(x_0 - z) + (1-\alpha_n)(\delta_n(x_n - z) + (1-\delta_n)(Sz_n - z))\| \le$$

$$\le \alpha_n\|x_0 - z\| + (1-\alpha_n)\delta_n\|x_n - z\| + (1-\alpha_n)(1-\delta_n)\|Sz_n - z\| \le$$

$$\le \alpha_n\|x_0 - z\| + (1-\alpha_n)\delta_n\|x_n - z\| + (1-\alpha_n)(1-\delta_n)\|z_n - z\|.$$

Воспользовавшись неравенством (7), получим

$$\|x_{n+1} - z\| \le \alpha_n\|x_0 - z\| + (1-\alpha_n)\|x_n - z\| \le \max\{\|x_0 - z\|, \|x_n - z\|\}.$$

Следовательно, $\|x_{n+1} - z\| \le \max\{\|x_0 - z\|, \|x_1 - z\|\}$ $\forall n \in \mathrm{N}$. Таким образом, последовательность (x_n) ограниченна. Ограниченность последовательностей (y_n) и (z_n) следует из ограниченности (x_n) и неравенства (7). ■

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть множество $C \subseteq H$ — выпуклое и замкнутое, оператор $A: H \to H$ — монотонный, равномерно непрерывный на ограниченных множествах и отображающий ограниченные множества в ограниченные. Пусть оператор $S: H \to H$ — квазинерастягивающий, причем оператор $I - S$ демизамкнут в нуле. Предположим, что $VI(A, C) \cap F(S) \ne \varnothing$. Тогда последовательности (x_n), (y_n) и (z_n), порожденные алгоритмом 2, сильно сходятся к точке $z_0 = P_{VI(A,C)}x_0$ и точке $z_0 = P_{VI(A,C)\cap F(S)}x_0$.

Доказательство. Рассмотрим элемент $z_0 = P_{VI(A,C)\cap F(S)}x_0$. Из леммы 9 следует существование такого числа $M > 0$, что $|(x_0 - z_0, x_{n+1} - z_0)| \le M$ для всех $n \in \mathrm{N}$. Тогда из неравенства леммы 8 получим оценку

$$\|x_{n+1} - z_0\|^2 - \|x_n - z_0\|^2 + (1-\delta_n)(1-\theta)\|x_n - y_n\|^2 +$$

$$+(1-\delta_n)(1-\theta)\|z_n - y_n\|^2 + \delta_n(1-\delta_n)\|x_n - Sz_n\|^2 \le 2\alpha_n M. \quad (17)$$

ISSN 0572-2691

Рассмотрим числовую последовательность $(\|x_n - z_0\|)$. Возможны два варианта: а) существует номер $\overline{n} \in \mathrm{N}$ такой, что $\|x_{n+1} - z_0\| \le \|x_n - z_0\|$ для всех $n \ge \overline{n}$; б) существует возрастающая последовательность номеров (n_k) такая, что $\|x_{n_k+1} - z_0\| > \|x_{n_k} - z_0\|$ для всех $k \in \mathrm{N}$.

Сначала рассмотрим вариант а). В этом случае существует $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - z_0\| \in R$. Поскольку $\|x_{n+1} - z_0\|^2 - \|x_n - z_0\|^2 \to 0$ и $\alpha_n \to 0$, то при $n \to \infty$ имеем

$$\|x_n - y_n\| \to 0, \tag{18}$$

$$\|z_n - y_n\| \to 0, \tag{19}$$

$$\|x_n - Sz_n\| \to 0. \tag{20}$$

Из ограниченности (x_n) следует существование подпоследовательности (x_{n_k}), слабо сходящейся к точке $w \in H$. Из (11) следует, что $y_{n_k} \to w$ слабо. Следовательно, $w \in C$. Рассуждая, как в доказательстве теоремы 1, получаем, что $w \in VI(A, C)$. Осталось показать, что $w \in F(S)$. Поскольку

$$\|z_n - Sz_n\| \le \|z_n - y_n\| + \|y_n - x_n\| + \|x_n - Sz_n\|,$$

то из (18)–(20) следует $\lim\limits_{n\to\infty}\|z_n - Sz_n\| = 0$. Оператор $I - S$ демизамкнут в нуле. Следовательно, из $z_{n_k} \to w$ слабо и $\lim\limits_{k\to\infty}\|z_{n_k} - Sz_{n_k}\| = 0$ получаем, что $w \in F(S)$.

Как и при доказательстве теоремы 1, получаем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_0 - z_0, x_{n+1} - z_0) \le 0. \tag{21}$$

Из (21), неравенства

$$\|x_{n+1} - z_0\|^2 \le (1-\alpha_n)^2\|\delta_n x_n + (1-\delta_n)Sz_n - z_0\|^2 + 2\alpha_n(x_0 - z_0, x_{n+1} - z_0) \le$$

$$\le (1-\alpha_n)\delta_n\|x_n - z_0\|^2 + (1-\alpha_n)(1-\delta_n)\|Sz_n - z_0\|^2 + 2\alpha_n(x_0 - z_0, x_{n+1} - z_0) \le$$

$$\le (1-\alpha_n)\delta_n\|x_n - z_0\|^2 + (1-\alpha_n)(1-\delta_n)\|z_n - z_0\|^2 + 2\alpha_n(x_0 - z_0, x_{n+1} - z_0) \le$$

$$\le (1-\alpha_n)\|x_n - z_0\|^2 + 2\alpha_n(x_0 - z_0, x_{n+1} - z_0).$$

и леммы 2 делаем вывод, что $\|x_n - z_0\| \to 0$. Из (18), (19) получаем $\|y_n - z_0\| \to 0$ и $\|z_n - z_0\| \to 0$.

Изучим вариант б). В этом случае рассмотрим последовательность номеров (m_k) со свойствами:

i) $m_k \square +\infty$;

ii) $\|x_{m_k+1} - z_0\| \ge \|x_{m_k} - z_0\|$ для всех $k \ge n_1$;

iii) $\|x_{m_k+1} - z_0\| \ge \|x_k - z_0\|$ для всех $k \ge n_1$.

Из ii) следует

$$(1-\delta_{m_k})(1-\theta)\|x_{m_k} - y_{m_k}\|^2 + (1-\delta_{m_k})(1-\theta)\|z_{m_k} - y_{m_k}\|^2 +$$

$$+\delta_{m_k}(1-\delta_{m_k})\|x_{m_k} - Sz_{m_k}\|^2 \le 2\alpha_{m_k}(x_0 - z_0, x_{m_k+1} - z_0) \le 2\alpha_{m_k}M.$$

Отсюда $\lim\limits_{k\to\infty}\| x_{m_k} - y_{m_k} \| = \lim\limits_{k\to\infty}\| z_{m_k} - y_{m_k} \| = \lim\limits_{k\to\infty}\| x_{m_k} - Sz_{m_k} \| = 0$. Рассуждениями, подобными вышеизложенным, показываем, что частичные слабые пределы последовательностей (x_{m_k}), (y_{m_k}) и (z_{m_k}) принадлежат множеству $VI(A, C) \cap F(S)$. Из неравенства

$$\| x_{m_k+1} - x_{m_k} \| = \| \alpha_{m_k}(x_0 - x_{m_k}) + (1-\alpha_{m_k})(1-\delta_{m_k})(Sz_{m_k} - x_{m_k}) \| \le$$
$$\le \alpha_{m_k} \| x_0 - x_{m_k} \| + (1-\alpha_{m_k})(1-\delta_{m_k}) \| Sz_{m_k} - x_{m_k} \|$$

следует $\| x_{m_k+1} - x_{m_k} \| \to 0$.

Далее повторяем рассуждения доказательства теоремы 1. ■

Рассмотрим теперь операторное уравнение с априорной информацией, заданной в виде множества неподвижных точек квазинерастягивающего оператора $T : H \to H$:

$$Ax = f, \quad x \in F(T), \tag{22}$$

где $f \in H$. Подобные задачи рассматривались в работе [35].

Алгоритм 2 для задачи (22) принимает следующий вид.

Алгоритм 3.

Инициализация. Задаем числовые параметры $\sigma > 0$, $\tau \in (0,1)$, $\theta \in (0,1)$, элемент $x_0 \in H$, последовательность $(\delta_n) \subseteq [a, b] \subseteq (0,1)$ и последовательность $(\alpha_n) \subseteq (0,1)$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$.

Итерационный шаг. Для $x_n \in H$ вычисляем

$$y_n = x_n - \lambda_n (Ax_n - f),$$

где λ_n получаем из условия

$$\begin{cases} j(n) = \min\{ j \ge 0 : \| A(x_n - \sigma\tau^j (Ax_n - f)) - Ax_n \| \le \theta \| Ax_n \| \}, \\ \lambda_n = \sigma\tau^{j(n)}. \end{cases}$$

Вычисляем

$$z_n = x_n - \lambda_n (Ay_n - f),$$

$$x_{n+1} = \alpha_n x_0 + (1-\alpha_n)(\delta_n x_n + (1-\delta_n) Tz_n).$$

Частным случаем теоремы 2 является следующий результат.

Теорема 3. Пусть оператор $A : H \to H$ — монотонный, равномерно непрерывный на ограниченных множествах и отображающий ограниченные множества в ограниченные. Пусть оператор $T : H \to H$ — квазинерастягивающий, причем оператор $I - T$ демизамкнут в нуле. Предположим, что $A^{-1} f \cap F(T) \ne \varnothing$ для $f \in H$. Тогда последовательности (x_n), (y_n) и (z_n), порожденные алгоритмом 3, сильно сходятся к точке $z_0 = P_{A^{-1} f \cap F(T)} x_0$.

Заключение

В статье предложен сильно сходящийся модифицированный экстраградиентный метод с динамической регулировкой величины шага для решения вариационных неравенств с монотонными операторами, действующими в гильбертовом пространстве. Не предполагается липшицевость операторов. Также рассмотрены варианты метода для вариационных неравенств и операторных уравнений с априорной информацией о решении, заданной в виде множества неподвижных точек квазинерастягивающего оператора. Основной теоретический результат — теоремы о сильной сходимости методов. В отличие от работы [30], где в липшицевой ситуации применялся гибридный метод (как в [22]), в данной статье для регуляризации использовалась более простая схема Гальперна [32, 33], по сути совпадающая со схемой итеративной регуляризации [4].

Д.А. Верлань, В.В. Семенов, Л.М. Чабак

СИЛЬНО ЗБІЖНИЙ МОДИФІКОВАНИЙ ЕКСТРАГРАДІЄНТНИЙ МЕТОД ДЛЯ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ З НЕЛІПШИЦЕВИМИ ОПЕРАТОРАМИ

Запропоновано регуляризований модифікований екстраградієнтний метод з динамічним регулюванням величини кроку для розв'язання варіаційних нерівностей з монотонними операторами, що діють у гільбертовому просторі. Також розглянуто варіанти методу для варіаційних нерівностей та операторних рівнянь з апріорною інформацією про розв'язок, що задана у вигляді множини нерухомих точок квазінерозтягуючого оператора. Доведено теореми про сильну збіжність методів без припущення про ліпшицевість операторів.

D.A. Verlan, V.V. Semenov, L.M. Chabak

A STRONGLY CONVERGENT MODIFIED EXTRAGRADIENT METHOD FOR VARIATIONAL INEQUALITIES WITH NON-LIPSCHITZ OPERATORS

Regularized modified extragradient method with dynamic rule for finding the step size for solving variational inequalities with monotone operators acting in a Hilbert space is presented. In addition the variants of this method for variational inequalities and operator equations with a priori information about solution which is given as the set of fixed points of quasi-nonexpansive operator. Strong convergence of methods without any Lipschitzian continuity assumption on operators is established.

1. *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. — М. : Мир, 1983. — 256 с.
2. *Nagurney A.* Network economics: A variational inequality approach. — Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1999. — 325 p.
3. *Семенов В.В., Семенова Н.В.* О задаче векторного управления в гильбертовом пространстве // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 2. — С. 117–130.
4. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения. — М. : Изд-во МГУ, 1989. — 200 с.
5. *Facchinei F., Pang J.-S.* Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems. V. 2. — New York : Springer, 2003. — 704 p.
6. *Bauschke H.H., Combettes P.L.* Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces. — Berlin; Heidelberg; New York : Springer, 2011. — 408 p.
7. *Konnov I.V.* Combined relaxation methods for variational inequalities. — Berlin; Heidelberg; New York : Springer-Verlag, 2001. — 181 p.
8. *Xiu N., Zhang J.* Some recent advances in projection-type methods for variational inequalities // J. Comput. Appl. Math. — 2003. — **152**. — P. 559–585.
9. *Nesterov Yu.* Dual extrapolation and its applications to solving variational inequalities and related problems // Mathematical Programming. — 2007. — **109**, N 2-3. — P. 319–344.
10. *Семенов В.В.* О методе параллельной проксимальной декомпозиции для решения задач выпуклой оптимизации // «Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2010. — № 2. — С. 42–46.

11. *Семенов В.В.* О сходимости методов решения двухуровневых вариационных неравенств с монотонными операторами // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2010. — № 2 (101). — С. 120–128.
12. *Войтова Т.А., Семенов В.В.* Метод решения двухэтапных операторных включений // Там же. — 2010. — № 3 (102). — С. 34–39.
13. *Маліцький Ю.В., Семенов В.В.* Нові теореми сильної збіжності проксимального методу для задачі рівноважного програмування // Там же. — 2010. — № 3 (102). — С. 79–88.
14. *Денисов С.В., Семенов В.В.* Проксимальний алгоритм для дворівневих варіаційних нерівностей: сильна збіжність // Там же. — 2011. — № 3 (106). — С. 27–32.
15. *Войтова Т.А., Семенов В.В., Денисов С.В.* Альтернуючий проксимальний алгоритм для задачі дворівневої опуклої мінімізації // Доповіді НАН України. — 2012. — № 2. — С. 56–62.
16. *Семенов В.В.* Параллельная декомпозиция вариационных неравенств с монотонными операторами // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2012. — № 2 (108). — С. 53–58.
17. *Семенов В.В.* Явный алгоритм расщепления для вариационных неравенств с монотонными операторами // Там же. — 2013. — № 2 (112). — С. 42–52.
18. *Semenov V.V.* Strongly convergent algorithms for variational inequality problem over the set of solutions the equilibrium problems // In M.Z. Zgurovsky and V.A. Sadovnichiy (eds.), Continuous and Distributed Systems, Solid Mechanics and Its Applications. — Springer International Publishing Switzerland. — 2014. — **211**. — P. 131–146.
19. *Корпелевич Г.М.* Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач // Экономика и математические методы. — 1976. — **12**, № 4. — С. 747–756.
20. *Хоботов Е.Н.* О модификации экстраградиентного метода для решения вариационных неравенств и некоторых задач оптимизации // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1987. — **27**, № 10. — С. 1462–1473.
21. *Tseng P.* A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings // SIAM J. Control Optim. — 2000. — **38**. — P. 431–446.
22. *Nadezhkina N., Takahashi W.* Strong convergence theorem by a hybrid method for nonexpansive mappings and Lipschitz-continuous monotone mappings // Ibid. — 2006. — **16**, N 4. — P. 1230–1241.
23. *Апостол Р.Я., Гриненко А.А., Семенов В.В.* Ітераційні алгоритми для монотонних дворівневих варіаційних нерівностей // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2012. — № 1 (107). — С. 3–14.
24. *Запорожец Д.Н., Зыкина А.В., Меленьчук Н.В.* Сравнительный анализ экстраградиентных методов решения вариационных неравенств для некоторых задач // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 4. — С. 32–46.
25. *Малицкий Ю.В., Семенов В.В.* Вариант экстраградиентного алгоритма для монотонных вариационных неравенств // Кибернетика и системный анализ. — 2014. — № 2. — С. 125–131.
26. *Семенов В.В.* Гибридные методы расщепления для системы операторных включений с монотонными операторами // Там же. — 2014. — № 5. — С. 104–112.
27. *Malitsky Yu.V., Semenov V.V.* A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems // Journal of Global Optimization. — 2015. — **61**, N 1. — P. 193–202.
28. *Ляшко С.И., Семенов В.В., Войтова Т.А.* Экономичная модификация метода Корпелевич для монотонных задач о равновесии // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 4. — С. 146–154.
29. *Censor Y., Gibali A., Reich S.* The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2011. — **148**. — P. 318–335.
30. *Censor Y., Gibali A., Reich S.* Strong convergence of subgradient extragradient methods for the variational inequality problem in Hilbert space // Optimization Methods Software. — 2011. — **26**. — P. 827–845.
31. *Nakajo K., Takahashi W.* Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups // J. Math. Anal. Appl. — 2003. — **279**. — P. 372–379.
32. *Halpern B.* Fixed points of nonexpanding maps // Bull. Amer. Math. Soc. — 1967. — **73**. — P. 957–961.
33. *Xu H. K.* Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings // J. Math. Anal. Appl. — 2004. — **298**. — P. 279–291.
34. *Васин В.В., Еремин И.И.* Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. — Москва-Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2005. — 200 с.
35. *Mainge P.-E.* Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and nonstrictly convex minimization // Set-Valued Analysis. — 2008. — **16**. — P. 899–912.
36. *Семенов В.В.* Два методи апроксимації нерухомої точки фейєрівського оператора // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2013. — № 1 (111). — С. 46–56.
37. *Семенов В.В.* Сильно сходящийся метод расщепления для системы операторных включений с монотонными операторами // «Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2014. — № 3. — С. 22–32.

Получено 16.02.2015