МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЖНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

УДК 517.954:532.546

В.М. Булавацкий, Ю.Г. Кривонос

О МОДЕЛИРОВАНИИ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ НЕКОТОРЫХ ПРОЦЕССОВ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Введение

Математическое моделирование особенностей динамики фильтрационных процессов в сложных горно-геологических условиях протекания является одним из актуальных предметных направлений геоинформатики и геоматематики, развивающихся преимущественно в рамках классических постановок задач на основе общепринятых подходов теории сплошной среды [1, 2]. При этом большинство известных математических моделей процессов переноса в геопористых средах базируется на классических законах переноса, являющихся неадекватными в условиях существенного отклонения системы от равновесного состояния [3, 4]. Классическая теория процессов переноса исходит из приближения локального термодинамического равновесия и сплошной среды. Последнее подразумевает отсутствие у среды внутренней структуры и возможность совершения предельных переходов при стремлении объемов интегрирования к нулю в интегральных законах сохранения для этой среды (что позволяет получить уравнения сохранения в дифференциальной форме) [4]. Если же характерная скорость процесса переноса намного больше скорости распространения возмущений в таких средах, то классический локально-равновесный подход к моделированию процесса становится не оправданным. Кроме того, в классических моделях переноса постулированы такие весьма жесткие ограничения, как бесконечная скорость распространения возмущений, что противоречит современным физическим представлениям. В связи с этим актуальна проблема построения новых, более адекватных математических моделей процессов переноса, базирующихся на законах переноса, справедливых в условиях существенного отклонения от равновесного состояния системы. Указанное особенно актуально в связи с проблемами охраны окружающей среды (в частности, при математическом моделировании процессов диффузии загрязняющих веществ в подземных фильтрационных потоках или процессов консолидации грунтовых оснований накопителей загрязненных сточных вод).

Проявляющиеся в сложных условиях протекания локально-неравновесные свойства геофильтрационного процесса обусловлены рядом причин объективного характера, в частности, сложностью пространственно-временной структуры геосреды, ее микронеоднородностью, кавернозностью, релаксационными свойствами пористого скелета и насыщающих жидкостей, многофазностью состава, неизотермичностью процессов, влиянием геохимических факторов и т.д. [3]. Следует

© В.М. БУЛАВАЦКИЙ, Ю.Г. КРИВОНОС, 2015

отметить, что локально-неравновесные диффузионные процессы имеют место также в высокоэнергетической плазме, при переносе во фрактальных средах и аморфных полупроводниках, полимерах, биологических системах, случайных и разреженных средах.

Попытки теоретического учета эффектов неравновесности (в частности, эффектов памяти и пространственных корреляций) в рамках классических математических моделей приводят к интегро-дифференциальным уравнениям, ядро которых содержит информацию о природе неравновесности. При решении этих уравнений интегральные операторы разлагаются в ряды дифференциальных операторов, имеющих возрастающие показатели порядка дифференцирования, поэтому при отсутствии надлежащего малого параметра этот подход не эффективен [5]. Эффективный подход в описании процессов переноса в системах, для которых важен учет нелокальных пространственно-временных свойств, связан с использованием аппарата интегро-дифференцирования нецелого порядка, в рамках которого удается получить ряд новых важных результатов [6–9]. При этом особую актуальность приобретают исследования в области математического моделирования динамики фильтрационных процессов в геопористых средах (в частности, фрактальной структуры) в условиях как временной, так и пространственной неравновесности, что важно, например, при решении многих сложных задач защиты подземных водных ресурсов от зягрязнений промышленными или бытовыми стоками. Некоторые дробно-дифференциальные математические модели для описания динамики неизотермических геофильтрационных процессов в условиях временной неравновесности представлены в [10]. Работа [11] посвящена изучению дробно-дифференциальной математической модели для описания динамики локально-неравновесного во времени геофильтрационного процесса в условиях пространственно-временной нелокальности. Обобщение дробно-дифференциальной геомиграционной модели для исследования динамики некоторых фильтрационных процессов в насыщенной солевыми растворами геопористой среде в условиях сильной временной нелокальности приведено в [12].

Решения ряда задач моделирования дробно-дифференциальной динамики релаксационных фильтрационных процессов приведены в работе [13].

В развитие результатов работы [13] ниже выполнены постановки и получены замкнутые решения некоторых новых одномерных нестационарных фильтрационных задач, поставленных в рамках обобщенной (неклассической) математической модели, описывающей дробно-дифференциальную динамику геофильтрационных процессов с релаксацией.

1. Математическая модель для описания дробно-дифференциальной динамики релаксационного фильтрационного процесса

Одной из наиболее распространенных определяющих зависимостей современной теории релаксационной фильтрации в геопористых средах является зависимость вида [3, 14]

$$u_x + \tau_u \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(p + \tau_p \frac{\partial p}{\partial t}\right), \tag{1}$$

где u_x — скорость геофильтрации, p — давление, k — коэффициент фильтрации, μ — вязкость жидкости, τ_u, τ_p — параметры релаксации соответственно скорости и давления.

Следует отметить, что зависимость (1) непосредственно получается из обобщенного закона Дарси

$$u_x(x, t+\tau_u) = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x} p(x, t+\tau_p). \tag{2}$$

Действительно, разложив в (2) функции u_x и p в ряды Тейлора по степеням соответственно τ_u, τ_p и ограничиваясь двумя первыми членами разложения, получаем соотношение (1) [15, 16].

В целях моделирования дробно-дифференциальной динамики релаксационных геофильтрационных процессов разложим функции скорости фильтрации u_x и давления p в обобщенные ряды Тейлора [17] с коэффициентами, выраженными через значения производных нецелого порядка от рассматриваемых функций по переменной t. В предположении существования указанных разложений получаем обобщенный закон релаксационной фильтрации

$$u_x + \tau_1 D_t^{(\alpha)} u_x = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}(p + \tau_2 D_t^{(\beta)} p) \quad (0 < \alpha, \beta < 1), \tag{3}$$

где $\tau_1 = \tau_u^{\alpha} / \Gamma(1+\alpha)$, $\tau_2 = \tau_p^{\beta} / \Gamma(1+\beta)$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера, $D_t^{(\alpha)}$, $D_t^{(\beta)}$ — операторы дробной производной Капуто–Герасимова по переменной t порядков α и β соответственно [6−8].

С учетом уравнения неразрывности одномерного фильтрационного потока [1, 14]

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \beta^* \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

(β^* — коэффициент упругоемкости пласта), из (3) получаем для определения фильтрационного давления p следующее обобщенное уравнение релаксационной фильтрации:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \tau_1 D_t^{(\alpha+1)} p = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2}(p + \tau_2 D_t^{(\beta)} p) \quad (0 < \alpha, \beta < 1), \tag{5}$$

где $\kappa = k / (\mu\beta^*)$ — коэффициент пьезопроводности [14].

Отметим, что, в частности при $\alpha, \beta \to 1$, уравнение (5) преобразуется в широко известное уравнение релаксационной фильтрации в пористой среде, записываемое в виде [3, 14]

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(p + \tau_2 \frac{\partial p}{\partial t} \right).$$

В рамках обобщенной геофильтрационной математической модели, базирующейся на уравнении вида (5), изучение дробно-дифференциальной динамики релаксационного фильтрационного процесса, например, в геомассиве конечной мощности l с хорошо проницаемыми гранями сводится к решению в области $(0, l) \times (0, +\infty)$ краевой задачи для уравнения (5) при следующих условиях:

$$p(0, t) = 0, \ \ p(l, t) = 0, \tag{6}$$

$$p(x, 0) = \chi(x), \ \ p'_t(x, 0) = \theta(x), \tag{7}$$

где $\chi(x), \theta(x)$ — заданные функции, определяющие начальные условия процесса.

2. Построение решения первой краевой задачи в рамках дробно-дифференциальной математической модели

Ниже приводится краткое изложение методики получения аналитического решения задачи (5)−(7).

Предварительно введем в рассмотрение безразмерные переменные и параметры в виде соотношений

$$x' = \frac{x}{l}, t' = \frac{\kappa}{l^2}t, p' = \frac{p}{p_0}, \tau_1' = \left(\frac{\kappa}{l^2}\right)^{\alpha}\tau_1, \tau_2' = \left(\frac{\kappa}{l^2}\right)^{\beta}\tau_2, \ \chi' = \frac{\chi}{p_0}, \ \theta' = \frac{\theta}{p_0} \quad (p_0 = \text{const}). \tag{8}$$

Переходя в (5)–(7) к безразмерным переменным согласно соотношениям (8) и опуская в дальнейшем знак «штрих» над безразмерными величинами, получаем в области $(0,1)\times(0,+\infty)$ краевую задачу

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\tau_1 D_t^{(\alpha+1)}p=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(p+\tau_2 D_t^{(\beta)}p)\quad (0<\alpha,\beta<1), \tag{9}$$

$$p(0,t)=0,\ \ p(1,t)=0, \tag{10}$$

$$p(x,0)=\chi(x),\ \ p_t'(x,0)=\theta(x). \tag{11}$$

Пусть существует конечное интегральное преобразование Фурье функции $p(x,t)$ по геометрической переменной x вида [18]

$$\overline{p}_n(t)=\int_0^1 p(x,t)\sin(\nu_n x)\,dx\quad (\nu_n=n\pi,\ n=1,2,...). \tag{12}$$

Тогда в пространстве изображений по Фурье рассматриваемая задача принимает вид

$$\frac{d\overline{p}_n(t)}{dt}+\tau_1 D_t^{(\alpha+1)}\overline{p}_n(t)+b_n D_t^{(\beta)}\overline{p}_n(t)+c_n\overline{p}_n(t)=0\quad (0<\alpha,\beta<1), \tag{13}$$

$$\overline{p}_n(0)=\gamma_n,\ \ \overline{p}_n'(0)=\delta_n, \tag{14}$$

где

$$\gamma_n=\int_0^1\chi(x)\sin(\nu_n x)\,dx,\ \ \delta_n=\int_0^1\theta(x)\sin(\nu_n x)\,dx,\ \ c_n=\nu_n^2,\ \ b_n=\tau_2 c_n.$$

Применяя к (13) интегральное преобразование Лапласа по переменной t, с учетом условий (14) получаем

$$\tilde{\overline{p}}_n(s)=\frac{\gamma_n+\tau_1\gamma_n s^{\alpha}+\tau_1\delta_n s^{\alpha-1}+b_n\gamma_n s^{\beta-1}}{\tau_1 s^{\alpha+1}+b_n s^{\beta}+s+c_n}, \tag{15}$$

где $\tilde{\overline{p}}_n(s)$ — образ функции $\overline{p}_n(t)$ в пространстве изображений по Лапласу, s — параметр преобразования Лапласа. На основании результатов работы [7] можно показать, что переход в соотношении (15) в область оригиналов по временнóй переменной осуществляется согласно формуле

$$\overline{p}_n(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-c_n)^m}{m!\tau_1^{m+1}}\sum_{k=0}^{m}C_m^k\tau_2^k\left[\gamma_n Q_{mk}^{(n)}(t)+\tau_1\delta_n\Omega_m\left(t,-\frac{1}{\tau_1};\alpha,m+2-\beta k\right)\right], \tag{16}$$

где

$$Q_{mk}^{(n)}(t)=\Omega_m\left(t,-\frac{1}{\tau_1};\alpha,\alpha-\beta k+m+1\right)+\tau_1\Omega_m\left(t,-\frac{1}{\tau_1};\alpha,m+1-\beta k\right)+$$

$$b_n\Omega_m\left(t,-\frac{1}{\tau_1};\alpha,\alpha-\beta(k+1)+m+2\right),\ \ \Omega_m(t,y;\alpha,\beta)=t^{\alpha k+\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{(k)}(yt^{\alpha}),$$

$$C_m^k=\frac{m!}{k!(m-k)!},\ \ E_{\lambda,\mu}^{(k)}(y)=\frac{d^k}{dy^k}E_{\lambda,\mu}(y)\quad (k=0,1,2,...), \tag{17}$$

$E_{\lambda,\mu}(y)$ — двухпараметрическая функция Миттаг–Леффлера [7].

Далее, переходя в соотношении (16) к оригиналам по геометрической переменной, получаем решение исходной задачи (9)−(11):

$$p(x,t)=$$
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\nu_n x)\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-c_n)^m}{m!\tau_1^{m+1}}\sum_{k=0}^{m}C_m^k\tau_2^k\left[\gamma_n Q_{mk}^{(n)}(t)+\tau_1\delta_n\Omega_m\left(t,-\frac{1}{\tau_1};\alpha,m+2-\beta k\right)\right]\right\},$$

где величины $Q_{mk}^{(n)}(t)$, $\Omega_m(t,y;\alpha,\beta)$ определены согласно (17).

Отметим, что найденное решение, в частности при $\alpha,\beta\to 1$, преобразуется в решение соответствующей фильтрационной задачи, поставленной в рамках общепринятой релаксационной модели фильтрации [14, 19].

3. Задача моделирования дробно-дифференциальной динамики релаксационного фильтрационного процесса при наличии нелокальных граничных условий

Ниже приводится пример построения замкнутого решения краевой задачи с нелокальными граничными условиями для дробно-дифференциальной математической модели релаксационного фильтрационного процесса, определяемой уравнением (9).

В рамках указанной дробно-дифференциальной математической модели фильтрации моделирование динамики релаксационного фильтрационного процесса в геомассиве единичной мощности с проницаемой верхней гранью в предположении, например, равенства расходов жидкости через грани массива сводится к решению в области $(0,1)\times(0,+\infty)$ уравнения (9) при следующих краевых условиях:

$$p(0,t)=0,\ \ (1+\tau_2 D_t^{(\beta)})\frac{\partial p(0,t)}{\partial x}=(1+\tau_2 D_t^{(\beta)})\frac{\partial p(1,t)}{\partial x}, \tag{18}$$

$$p(x,0)=\chi(x),\ \ p_t'(x,0)=\theta(x). \tag{19}$$

Следует отметить, что неклассическое (нелокальное) граничное условие в (18) при $\tau_2=0$ превращается в хорошо известное условие Самарского–Ионкина [20, 21], математически выражающее равенство потоков жидкости на гранях рассматриваемого массива в рамках классического закона фильтрации Дарси–Герсеванова [14, 19].

Следуя предложенному в [20, 21] подходу, найдем решение задачи (9), (18), (19) в виде следующего биортогонального разложения:

$$p(x,t)=\upsilon_0(x)\,X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[u_k(t)\,X_{2k-1}(x)+\upsilon_k(t)\,X_{2k}(x)], \tag{20}$$

где $u_k(t)=(p(x,t),Y_{2k-1}(x))$ $(k=1,2,...)$, $\upsilon_k(t)=(p(x,t),Y_{2k}(x))$ $(k=0,1,2,...)$, $X_0(x)=x$, $X_{2k}(x)=\sin(\sqrt{\lambda_k}\,x)$ — собственные функции спектральной задачи

$$X''(x)+\lambda X(x)=0\ \ (0<x<1), \tag{21}$$

$$X(0)=0,\ \ X'(0)=X'(1), \tag{22}$$

соответствующие собственным значениям $\lambda_k=(2\pi k)^2$ $(k=0,1,2,...)$.

Соответствующие собственным значениям λ_k присоединенные функции $X_{2k-1}(x)$ имеют вид [20]: $X_{2k-1}(x)=x\cos(\sqrt{\lambda_k}\,x)$ $(k=1,2,...)$. При этом, как показано в [20, 21], система собственных и присоединенных функций сопряженной к (21), (22) задачи записывается в виде

$$Y_0(x)=2,\ \ Y_{2k-1}(x)=4\cos(\sqrt{\lambda_k}\,x),\ \ Y_{2k}(x)=4(1-x)\sin(\sqrt{\lambda_k}\,x).$$

Разложив в биортогональные ряды начальные функции $\chi(x), \theta(x)$

$$\chi(x) = \varphi_0^{(2)} X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_k^{(1)} X_{2k-1}(x) + \varphi_k^{(2)} X_{2k}(x)], \tag{23}$$

$$\theta(x) = \psi_0^{(2)} X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [\psi_k^{(1)} X_{2k-1}(x) + \psi_k^{(2)} X_{2k}(x)], \tag{24}$$

где

$$\varphi_k^{(1)} = (\chi(x), Y_{2k-1}(x)) \ \ (k = 1, 2, ...), \ \ \varphi_k^{(2)} = (\chi(x), Y_{2k}(x)) \ \ (k = 0, 1, 2, ...),$$

$$\psi_k^{(1)} = (\theta(x), Y_{2k-1}(x)) \ \ (k = 1, 2, ...), \ \ \psi_k^{(2)} = (\theta(x), Y_{2k}(x)) \ \ (k = 0, 1, 2, ...),$$

на основании (18), (19) получаем для определения функций υ_k $(k = 0, 1, 2, ...)$ и u_k $(k = 1, 2, ...)$ такие последовательности задач Коши для уравнений в дробных производных:

$$\upsilon_0'(t) + \tau_1 D_t^{(\alpha+1)} \upsilon_0(t) = 0, \ \ \upsilon_0(0) = \varphi_0^{(2)}, \ \ \upsilon_0'(0) = \psi_0^{(2)}, \tag{25}$$

$$u_k'(t) + \tau_1 D_t^{(\alpha+1)} u_k(t) + \lambda_k [u_k(t) + \tau_2 D_t^{(\beta)} u_k(t)] = 0, \ \ u_k(0) = \varphi_k^{(1)}, \ \ u_k'(0) = \psi_k^{(1)}, \tag{26}$$

$$\begin{gathered} \upsilon_k'(t) + \tau_1 D_t^{(\alpha+1)} \upsilon_k(t) + \lambda_k [\upsilon_k(t) + \tau_2 D_t^{(\beta)} \upsilon_k(t)] = -2\sqrt{\lambda_k} [u_k(t) + \tau_2 D_t^{(\beta)} u_k(t)], \\ \upsilon_k(0) = \varphi_k^{(2)}, \ \ \upsilon_k'(0) = \psi_k^{(2)} \ \ (k = 1, 2, ...). \end{gathered} \tag{27}$$

С учетом изложенного в разд. 2 решения задач (25)–(27) можно найти в виде

$$\upsilon_0(t) = \varphi_0^{(2)} E_{\alpha+1}\left(-\frac{t^{\alpha+1}}{\tau_1}\right) + \psi_0^{(2)} t E_{\alpha+1,2}\left(-\frac{t^{\alpha+1}}{\tau_1}\right), \tag{28}$$

$$u_k(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{m} \varsigma_{mi}^{(k)} t^{(1+\alpha)m-\beta i} [\varphi_k^{(1)} \Phi_{im}^{(k)}(t) + \tau_1 \psi_k^{(1)} \Psi_{im}(t)], \tag{29}$$

$$\upsilon_k(t) = \tilde{\upsilon}_k(t) + \int_0^t G_k(\tau) f_k(t-\tau) d\tau \ \ (k = 1, 2, ...), \tag{30}$$

где

$$\varsigma_{mi}^{(k)} = \frac{(-1)^m}{m!} C_m^i \frac{\tau_2^i \lambda_k^m}{\tau_1^{m+1}}, \ \ \Phi_{im}^{(k)}(t) = t^\alpha E_{\alpha,\alpha-\beta i+m+1}^{(m)}\left(-\frac{t^\alpha}{\tau_1}\right) + \tau_1 E_{\alpha,m-\beta i+1}^{(m)}\left(-\frac{t^\alpha}{\tau_1}\right) +$$

$$+ \tau_2 \lambda_k t^{1+\alpha-\beta} E_{\alpha,\alpha-\beta(i+1)+m+2}^{(m)}\left(-\frac{t^\alpha}{\tau_1}\right), \ \ \Psi_{im}(t) = t E_{\alpha,m+2-\beta i}^{(m)}\left(-\frac{t^\alpha}{\tau_1}\right),$$

$$\tilde{\upsilon}_k(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{m} \varsigma_{mi}^{(k)} t^{(1+\alpha)m-\beta i} [\varphi_k^{(2)} \Phi_{im}^{(k)}(t) + \tau_1 \psi_k^{(2)} \Psi_{im}(t)],$$

$$G_k(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{m} \varsigma_{mi}^{(k)} t^{\alpha(1+m)-\beta i+m} E_{\alpha,\alpha-\beta i+m+1}^{(m)}\left(-\frac{t^\alpha}{\tau_1}\right),$$

$$f_k(t) = -2\sqrt{\lambda_k} [u_k(t) + \tau_2 D_t^{(\beta)} u_k(t)] \ \ (k = 1, 2, ...). \tag{31}$$

Таким образом, при условии сходимости соответствующих рядов аналитическое решение фильтрационной краевой задачи с нелокальными граничными условиями (9), (18), (19) дается соотношениями (20), (28)–(31).

4. Модель с пространственно-временнóй неравновесной динамикой: численно-аналитическое решение краевой задачи

Неклассическое уравнение релаксационной геофильтрации (5) можно распространить на случай учета пространственной неравновесности процесса переноса, например, следующим образом:

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\tau_1 D_t^{(\alpha+1)}p=\kappa D_x^{(\gamma)}(p+\tau_2 D_t^{(\beta)}p) \quad (0<\alpha,\beta<1, 1<\gamma\le 2), \tag{32}$$

где $D_x^{(\gamma)}$ — оператор дробной производной Капуто–Герасимова [6−8] по переменной x порядка γ. В рамках модели, базирующейся на уравнении (32), с использованием, например, конечноразностных методов [22] возможно получение эффективных численных решений ряда краевых задач рассматриваемой обобщенной теории геофильтрации. Однако если для моделирования динамики полей давлений использовать, например, модификацию Капуто–Рисса дробной производной по геометрической переменной вида (локальный учет эффектов пространственной неравновесности):

$$D_x^{(\gamma)}u(x)=\frac{1}{2\Gamma(2-\gamma)}\int_{x-h}^{x+h}\frac{u''(s)\,ds}{|x-s|^{\gamma-1}} \tag{33}$$

$(h\le x\le l-h,\ 0<h<<l)$, то открывается возможность построения численно-аналитических решений (непрерывных по временнóй переменной и дискретных по геометрической переменной) основных фильтрационных краевых задач в рамках рассматриваемой модели релаксационной геофильтрации. В качестве примера рассмотрим задачу (32), (33), (6), (7) с граничными условиями первого рода. Переходя к безразмерным переменным согласно соотношению (8), получаем в области $(0,1)\times(0,+\infty)$ задачу

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\tau_1 D_t^{(\alpha+1)}p=D_x^{(\gamma)}(p+\tau_2 D_t^{(\beta)}p), \tag{34}$$

$$p(0,t)=0,\quad p(1,t)=0, \tag{35}$$

$$p(x,0)=\chi(x),\quad p_t'(x,0)=\theta(x), \tag{36}$$

где $D_x^{(\gamma)}$ определяется соотношением (33).

Ниже кратко изложена методика построения численно-аналитического решения задачи (34)−(36).

Введем в рассмотрение сеточную область $\omega_h=\{x_j : x_j=jh\ (j=\overline{0,n+1})\}$, где h — шаг сетки по геометрической переменной, и поставим в соответствие рассматриваемой краевой задаче следующую дифференциально-разностную задачу:

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt}+\tau_1 D_t^{(\alpha+1)}\vec{u}(t)=r(T^{(n)}-2E)[\vec{u}(t)+\tau_2 D_t^{(\beta)}\vec{u}(t)], \tag{37}$$

$$\vec{u}(0)=\vec{\chi},\quad \vec{u}_t'(0)=\vec{\theta}, \tag{38}$$

где $r=\dfrac{1}{h^\gamma\Gamma(3-\gamma)}$, $\vec{u}(t)=[p_1(t), p_2(t),..., p_n(t)]^{\mathrm{T}}$, $\vec{\chi}=[\chi_1,\chi_2,...,\chi_n]^{\mathrm{T}}$, $\vec{\theta}=$ $=[\theta_1,\theta_2,...,\theta_n]^{\mathrm{T}}$, $p_k(t)=p(x_k,t)$, $\chi_k=\chi(x_k)$, $\theta_k=\theta(x_k)$, $T^{(n)}$ — квадратная матрица порядка n, определенная в [23], E — единичная матрица порядка n.

 ISSN 0572-2691

Отметим, что в правой части соотношений (37) использована следующая аппроксимация производной $D_x^{(\gamma)}u$:

$$D_x^{(\gamma)}u\Big|_{x_j} \approx \frac{u_{\bar{x}x}}{2\Gamma(2-\gamma)}\int\limits_{x_j-h}^{x_j+h}\frac{ds}{|x_j-s|^{\gamma-1}} = \frac{h^{2-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)}u_{\bar{x}x} = \frac{u_{j-1}-2u_j+u_{j+1}}{h^{\gamma}\Gamma(3-\gamma)}. \qquad (39)$$

В частности, при $\gamma\to 2$ из (39) получаем

$$D_x^{(2)}u\Big|_{x_j} \approx \frac{u_{j-1}-2u_j+u_{j+1}}{h^2} = u''(x_j)+O(h^2).$$

Вводя в рассмотрение $P^{(n)}$-трансформации [23] векторов $\vec{u}, \vec{\chi}, \vec{\theta}$ в виде соотношений

$$\vec{\tilde{u}}(t) = P^{(n)}\vec{u}(t),\ \ \vec{\tilde{\chi}} = P^{(n)}\vec{\chi},\ \ \vec{\tilde{\theta}} = P^{(n)}\vec{\theta},$$

где $P^{(n)} = [a_{kj}]_{k,j=1}^{n} = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\left[\sin\left(\frac{\pi kj}{n+1}\right)\right]_{k,j=1}^{n}$ — фундаментальная матрица по отношению к матрице $T^{(n)}$, т.е. для нее выполняется равенство $T^{(n)} = P^{(n)}\Lambda^{(n)}P^{(n)}$ ($\Lambda^{(n)} = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]$ — диагональная матрица [23] собственных чисел матрицы $T^{(n)}$), получаем на основе (37), (38) в области изображений задачу

$$\frac{d\vec{\tilde{u}}(t)}{dt} + \tau_1 D_t^{(\alpha+1)}\vec{\tilde{u}}(t) = r(\Lambda^{(n)}-2E)[\vec{\tilde{u}}(t)+\tau_2 D_t^{(\beta)}\vec{\tilde{u}}(t)],\ \ \vec{\tilde{u}}(0)=\vec{\tilde{\chi}},\ \vec{\tilde{u}}_t'(0)=\vec{\tilde{\theta}},$$

или в координатной форме

$$\tilde{p}_j'(t) + \tau_1 D_t^{(\alpha+1)}\tilde{p}_j(t) + \tau_2\delta_j D_t^{(\beta)}\tilde{p}_j(t) + \delta_j\tilde{p}_j(t) = 0 \quad (j=\overline{1,n}), \qquad (40)$$

$$\tilde{p}_j(0) = \tilde{\chi}_j,\ \ \tilde{p}_j'(0) = \tilde{\theta}_j \quad (j=\overline{1,n}), \qquad (41)$$

где

$$\delta_j = r(2-\lambda_j),\ \ \lambda_j = 2\cos\left(\frac{\pi j}{n+1}\right),\ \ \tilde{\chi}_j = \sum_{s=1}^{n}a_{js}\chi_s,\ \ \tilde{\theta}_j = \sum_{s=1}^{n}a_{js}\theta_s \quad (j=\overline{1,n}).$$

Решение задачи (40), (41) согласно результатам из разд. 2 имеет вид

$$\tilde{p}_j(t) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\delta_j)^m}{m!\tau_1^{m+1}}\sum_{k=0}^{m}C_m^k\tau_2^k\left[\tilde{\chi}_j Q_{mk}^{(j)}(t) + \tau_1\tilde{\theta}_j\Omega_m\left(t, -\frac{1}{\tau_1}; \alpha, m+2-\beta k\right)\right], \qquad (42)$$

$$(j=\overline{1,n}),$$

где

$$Q_{mk}^{(j)}(t) = \Omega_m\left(t, -\frac{1}{\tau_1}; \alpha, \alpha-\beta k+m+1\right) + \tau_1\Omega_m\left(t, -\frac{1}{\tau_1}; \alpha, m+1-\beta k\right) +$$

$$+\tau_2\delta_j\Omega_m\left(t, -\frac{1}{\tau_1}; \alpha, \alpha-\beta(k+1)+m+2\right) \quad (j=\overline{1,n}).$$

Возвращаясь в соотношениях (42) в область оригиналов по геометрической переменной, получаем решение дифференциально-разностной задачи (37), (38) в виде

$$p_j(t) = \sum_{\nu=1}^{n}a_{j\nu}\tilde{p}_\nu(t) \quad (j=\overline{1,n}),$$

где функции $\tilde{p}_\nu(t)$ $(\nu=\overline{1,n})$ даются соотношениями (42).

Отметим, что полученное численно-аналитическое решение рассматриваемой задачи, являясь непрерывным по временно́й переменной и дискретным по геометрической переменной, обладает, в частности, тем преимуществом, что возможен выборочный расчет значений искомых характеристик процесса в фиксированной точке сеточной области в требуемый момент времени без предварительного расчета этих характеристик во все предыдущие сеточные моменты времени. Во многих случаях это сокращает время вычисления решения и удобно при использовании в инженерных приложениях.

Заключение

Для математического моделирования геофильтрации в сложных структурах при неравновесных условиях вводится обобщенная математическая модель, описывающая дробно-дифференциальную динамику фильтрационных процессов с релаксацией. В рамках указанной модели выполнены постановки и получены (преимущественно аналитические) решения некоторых одномерных нестационарных фильтрационных краевых задач.

В.М. Булавацький, Ю.Г. Кривонос

ПРО МОДЕЛЮВАННЯ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ДИНАМІКИ ДЕЯКИХ ПРОЦЕСІВ РЕЛАКСАЦІЙНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ

Сформульовано постановки та одержано (переважно аналітичні) розв'язки деяких одновимірних нестаціонарних фільтраційних крайових задач, поставлених у рамках узагальненої математичної моделі, що описує дробово-диференційну динаміку геофільтраційних процесів з релаксацією.

V.M. Bulavatsky, Iu.G. Kryvonos

ON THE MODELING OF FRACTIONAL-DIFFERENTIAL DYNAMICS OF SOME PROCESSES OF RELAXATIONAL FILTRATION

The statements are formulated and (predominantly analytical) solutions of some one-dimensional nonstationary filtrational boundary-value problems put within the framework of generalized mathematical model, describing the dynamics of fractional-differential geofiltration processes with relaxation are obtained.

1. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. В 2 т. — М. : Наука, 1973. — Т. 2. — 584 с.
2. *Селезов И.Т., Кривонос Ю.Г.* Волновые задачи биогидродинамики и биофизики. — Киев : Наук. думка, 2013. — 308 с.
3. *Хасанов М.М., Булгаков Г.Т.* Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах. — Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. — 228 с.
4. *Соболев С.Л.* Локально-неравновесные модели процессов переноса // Успехи физических наук. — 1997. — **167**, № 10. — С. 1095–1106.
5. *Мейланов М.М., Шибанова М.Р.* Особенности решения уравнения теплопереноса в производных дробного порядка // Журнал технической физики. — 2011. — **81**, № 7. — С. 1–6.
6. *Gorenflo R., Mainardi F.* Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order // Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. — Wien : Springer-Verlag, 1997. — P. 223–276.

7. *Podlubny I.* Fractional differential equations. — New York : Academic Press, 1999. — 341 p.
8. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations. — Amsterdam : Elsevier, 2006. — 523 p.
9. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. — Ульяновск : Изд-во «Артишок», 2008. — 512 с.
10. *Bulavatsky V.M.* Nonclassical mathematical model in geoinformatics to solve dynamic problems for nonequilibrium nonisothermal seeapage fields // Cybernetics and Systems Analysis. — 2011. — **47**, N 6. — P. 898–906.
11. *Bulavatsky V.M., Krivonos Yu.G.* Mathematical modeling in the geoinformation problem of the dynamics of geomigration under space-time nonlocality // Ibid. — 2012. — **48**, N 4. — P. 539–546.
12. *Bulavatsky V.M.* One generalization of the fractional differential geoinformation model of research of locally-nonequilibrium geomigration processes // Journal of Automation and Information Science. — 2013. — **45**, N 1. — P. 59–69.
13. *Булавацкий В.М.* Некоторые математические модели геоинформатики для описания процессов переноса в условиях временной нелокальности // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2011. — № 3. — С. 128–137.
14. *Молокович Ю.М., Непримеров Н.И., Пикуза В.И., Штанин А.В.* Релаксационная фильтрация. — Казань : Изд-во Казанск. ун-та, 1980. — 136 с.
15. *Tzou D.Y.* The generalized lagging response in small-scale and high-rate heating // Int. J. Heat Mass Transfer. — 1995. — **38**. — P. 3231–3240.
16. *Xu M., Wang L.* Dual-phase-lagging heat conduction based on Boltzmann transport equation // Ibid. — 2005. — **48**. — P. 5616–5624.
17. *Odibat Z.M., Shawagfeh N.T.* Generalized Taylor's formula //Applied Mathematics and Computation. — 2007. — **186**. — P. 286–293.
18. *Sneddon I.* The use of integral transform. — New York : Mc Graw–Hill Book Comp., 1973. — 539 p.
19. *Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В.* Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. — Київ : Наук. думка, 2005. — 283 с.
20. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. — 1977. — **13**, № 2. — С. 294–304.
21. *Ионкин Н.И.* Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Там же. — 1979. — **15**, № 7. — С. 1280–1283.
22. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. — М. : Наука, 1977. — 656 с.
23. *Polozhii G.N.* The method of summary representation for numerical solution of problems of mathematical physics. — Oxford : Pergamon Press, 1965. — 283 p.

Получено 22.04.2015