УДК 004.94:519.711.3

В.И. Потапов

МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРОТИВОБОРСТВА ДВУХ ИЗБЫТОЧНЫХ, ВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ ПОСЛЕ ОТКАЗОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Конфликтные ситуации обычно возникают тогда, когда сталкиваются интересы двух и более враждующих сторон, преследующих различные цели, и между ними возникает противоборство за достижение собственных целей вопреки враждебным действиям противодействующей стороны. Подобные ситуации чаще всего имеют место в военном деле и в области экономики, да и другие области деятельности не являются исключением.

В данной работе в качестве конфликтующих сторон рассмотрим две идентичные по структуре избыточные технические системы, содержащие основные и резервные компоненты (блоки), подключаемые, вместо отказавших основных, для восстановления функциональных возможностей соответствующей системы. Каждая из участвующих в конфликте сторон в процессе противоборства систем стремится ослабить противодействующую систему путем целенаправленного воздействия (атаками) на ее компоненты, тем самым уменьшая вероятность безотказной работы системы и увеличивая интенсивность отказов компонентов в течение времени взаимодействия.

В задачу каждой из противоборствующих сторон входит выбор оптимальной стратегии поведения в конфликтной ситуации в целях максимизации соответствующей функции выигрыша за счет оптимального использования резервных компонентов.

Математическая модель противоборствующих систем

Положим, что каждая из двух участвующих в конфликте систем $S^g(n, m, \bar{s})$, $g = 1, 2$, состоит из n $(n = n_1 + n_2 + \ldots + n_q)$ основных и m $(m = s_1 + s_2 + \ldots + s_q)$ резервных блоков, разбитых на q групп, в каждой из которых возможна замена отказавших основных блоков только резервными из этой группы. При этом целочисленный вектор $\bar{s} = (s_1, s_2, ..., s_q)$, соответствующий распределению резервных блоков в q группах каждой из систем, назовем вектором резервирования. В процессе противоборства вектор резервирования каждой из $S^g(n, m, \bar{s})$ систем может целенаправленно изменяться в соответствующие моменты времени τ_i с целью перераспределения (настройки) резервных m блоков между q группами для максимизации вероятности безотказной работы соответствующей системы последовательно в моменты настройки и к моменту окончания противоборства. В дальнейшем назовем вектор $\bar{\tau} = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_l)$, элементы которого соответствуют

© В.И. ПОТАПОВ, 2015

моментам перераспределения резервных блоков в соответствующей системе, вектором настройки системы и будем считать, что перераспределение резервных блоков в системе, т.е. восстановление работоспособности S^g-системы после отказов основных блоков в соответствующей q группе и замена их резервными блоками из числа m, происходит с интенсивностью $\mu^g(t)$. Отказ каждой из систем $S^g\ (n^g, m^g, \overline{s^g})$ наступает тогда, когда в системе откажет $m+1$ блок.

Постановка задачи противоборства двух систем

При постановке и решении задачи противоборства двух конфликтующих технических систем $S^g\ (n^g, m^g, \overline{s^g})$, $g = 1, 2$, восстанавливаемых после отказов, будем пользоваться в дальнейшем терминологией и понятиями теории игр [1–3].

Пусть системой $S^1(n^1, m^1, \overline{s^1})$ располагает и управляет игрок 1, а системой $S^2(n^2, m^2, \overline{s^2})$ — игрок 2. Как указано выше, системы $S^g\ (n^g, m^g, \overline{s^g})$, $g = 1, 2$, являются восстанавливаемыми после отказов с интенсивностью восстановления $\mu^g(t)$, одинаковой для всех q групп соответствующей системы. Игрок 1 располагает множеством стратегий $W^1 = \{\overline{s^1}, \overline{\lambda^2}, \mu^1\}$, а игрок 2 — множеством стратегий $W^2 = \{\overline{s^2}, \overline{\lambda^1}, \mu^2\}$, где $\overline{s^g}$ — вектор резервирования g-го игрока; $\overline{\lambda^g}(t) = (\lambda_1^g(t), \lambda_2^g(t), ..., \lambda_q^g(t))$ — вектор интенсивности отказов в q группах системы $S^g\ (n^g, m^g, \overline{s^g})$ (в дальнейшем в целях упрощения систему $S^g(n^g,\ m^g,\ \overline{s^g})$ иногда будем обозначать S^g).

Как следует из приведенной постановки, стратегия W^g каждого игрока позволяет ему влиять на формирование вектора резервирования $\overline{s^g}$ собственной системы и на интенсивность отказов $\overline{\lambda^g}(t)$ противоборствующей системы, используя свои средства нападения, что определяется видом функций $\lambda_i^g(t)$, $i = 1, 2, \ldots, q$. При этом рассматриваемая модель противоборства полагает, что игроки не могут влиять на интенсивность восстановления своей системы, которая определяется имеющимися техническими возможностями самой системы.

В (4) показано, что поведение восстанавливаемой системы $S^g(n^g, m^g, \overline{s^g})$ при аппроксимации марковским процессом описывается следующей системой уравнений Колмогорова:

$$\frac{dP_0^g(t)}{dt} = -C_1^g P_0^g(t) + \mu^g(t) P_1^g(t),$$

$$\frac{dP_k^g(t)}{dt} = A_k^g P_{k-1}^g(t) - (C_{k+1}^g + \mu^g(t)) P_k^g(t) + \mu^g(t) P_{k+1}^g(t), \quad 1 \le k \le m-1,$$

$$\frac{dP_m^g(t)}{dt} = A_m^g P_{m-1}^g(t) - (C_{m+1}^g + \mu^g(t)) P_m^g(t),$$

где $P_k^g(t)$ — вероятность нахождения системы S^g в состоянии с k отказами; $P^g(t)$ — вероятность безотказной работы системы S^g в момент времени t; A_k^g — интенсивность перехода системы S^g из состояния с $k-1$ отказами в состояние с k отказами; C_k^g — суммарная интенсивность перехода системы S^g из состояния с k отказами в состояние с $k+1$ отказами и в поглощающее состояние.

Задача каждой из противоборствующих систем — оптимизировать восстановление после отказа очередного блока в целях максимизации вероятности безотказной работы системы в течение времени противоборства для максимального увеличения среднего времени работы системы до отказа.

Сформулируем теперь рассматриваемую задачу в терминах теории оптимального управления.

Считая вектор-столбец

$$P^g(t) = \begin{vmatrix} P_0^g(t) \\ P_1^g(t) \\ \vdots \\ P_m^g(t) \end{vmatrix}$$

фазовым вектором, а $\overline{\mu^g}(t) = (\mu_1^g(t), \mu_2^g(t), \ldots, \mu_q^g(t)$ — векторным управлением, получим уравнение управляемой системы

$$\frac{d}{dt}\overline{P^g}(t) = D^g(\overline{\mu^g}(t))\,\overline{P^g}(t) \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$\overline{P^g}(0) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

где $P^g(t)$ — вероятность безотказной работы системы S^g в течение времени t, а $\overline{\mu^g}(t) = (\mu_1^g(t), \mu_2^g(t), ..., \mu_q^g(t))$ — вектор интенсивности восстановления после отказов в q группах системы S^g, т.е. векторное управление, а матрица $D^g(\overline{\mu^g}(t))$ имеет следующий вид:

$$D^g(\overline{\mu^g}(t)) = \begin{vmatrix} C_1^g & \mu^g & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_1^g & -(C_2^g + \mu^g) & \mu^g & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & -(C_3^g + \mu^g) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3^g & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(C_m^g + \mu^g) & \mu^g \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_m^g & -(C_{m+1}^g + \mu^g) \end{vmatrix}.$$

Для численного решения рассматриваемой задачи обозначим $P_k^g(t)$, $1 \le k \le m^g$, вероятность того, что в системе $S^g(n^g, m^g, \overline{s^g})$ к моменту времени t произошло k отказов.

В дальнейшем будем считать, что число q групп для игроков 1 и 2 одинаково, т.е. векторы $\overline{s^1}$ и $\overline{s^2}$ имеют одинаковую размерность q.

По определению [5] среднее время работы системы $S^g(n^g, m^g, s^g)$, $g = 1, 2$, до отказа равно

$$T^g(S^g) = \int_0^\infty P^g(t)\,dt. \qquad (3)$$

Однако поскольку игра ограничена во времени $t \in [0, t_f]$, где t_f — время окончания игры, то при достаточно больших значениях t_f формулу (3) для вычисления приближенного значения среднего времени работы до отказа противоборствующей системы S^g можно записать в следующем виде:

$$T^g(S^g) \approx \int_0^{t_f} P^g(t)dt = \sum_{\sigma=1}^{L} \int_{t_{\sigma-1}}^{t_\sigma} P_\sigma^g(t)\,dt = \sum_{\sigma=1}^{L} \int_{t_{\sigma-1}}^{t_\sigma} \left(\sum_{k=0}^{m^g} P_{k\sigma}^g(t) \right) dt, \tag{4}$$

где σ — номер интервала дискретизации, соответствующий моментам настройки $\tau_\sigma^g (0 \le \sigma \le L)$ системы S^g.

В процессе противоборства (игры) рассматриваемых систем положим, что игрок 1 старается максимизировать величину $T^1(S^1) - T^2(S^2)$, а игрок 2 — минимизировать ее.

Будем считать, что за время игры t_f игрок g $(g = 1, 2)$ имеет право не более чем L $(L \ge 1)$ раз изменять свой вектор резервирования $\overline{s^g}$, не считая момента $t = 0$, управляемой им динамической системы $S^g(n^g, m^g, \overline{s^g})$. Наконец, вектор $\overline{\tau^g} = (\tau_0^g, \tau_1^g, ..., \tau_L^g)$, $\tau_0^g = 0$, назовем вектором настройки g-го игрока.

Очевидно, что $\tau_L^g < t_f$.

Итак, для исследования задачи противоборства двух систем $S^g(n^g, m^g, \overline{s^g})$ получена игра двух лиц с нулевой суммой с функцией выигрыша

$$K(z_1, z_2) = T^1(S^1(z_1)) - T^2(S^2(z_2)),$$

где $z_g \in W^g$ — стратегия g-го игрока $(g = 1, 2)$ из множества возможных стратегий W^g; $T^g(S^g(z_g))$ — время работы соответствующей противоборствующей системы до отказа при выборе g-м игроком стратегии Z_g.

Величина $T^g(S^g(z_g))$ вычисляется как корень уравнения $F_g(t) = 0$, где

$$F_g(t) = (m^g + 1) - \left[\sum_{k=0}^{m^g+1} kP_k^g(t) \right].$$

Решение этого уравнения описано в [4].

Решение задачи противоборства двух S^g-систем

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом дискретизации. Будем полагать, что каждому моменту настройки τ_σ^g $(0 \le \sigma \le L)$ системы S^g соответствует вектор резервирования $\overline{s_\sigma^g} = (s_{\sigma1}^g, s_{\sigma2}^g, \ldots, s_{\sigma q}^g)$. Введем интервалы настройки $\Delta\tau_\sigma^g = [\tau_\sigma^g, \tau_{\sigma+1}^g]$, причем $\tau_{L+1}^g = t_f$. Функции интенсивности отказов $\lambda^g(t)$ и восстановления $\mu^g(t)$ будем считать кусочно-постоянными на интервалах дискретизации с возможными точками разрыва первого рода в моментах настройки. Для $t \in \Delta\tau_\sigma^1$ обозначим $\overline{\lambda^2}(t) = (\lambda_{\sigma1}^2, \ldots, \lambda_{\sigma q}^2)$ и $\mu^1(t) = \mu_\sigma^1$, а для $t \in \Delta\tau_\sigma^2$ — $\overline{\lambda^1}(t) = (\lambda_{\sigma1}^1, \ldots, \lambda_{\sigma q}^1)$ и $\mu^2(t) = \mu_\sigma^2$.

Таким образом, игрок 1, управляющий системой S^1, получает множество стратегий $W^1 = \{\overline{\tau^1}, C^1, \Lambda^2, \overline{\mu^1}\}$, где $\overline{\tau^1}$ — вектор настройки игрока 1, C^1 — матрица, составленная из координат векторов резервирования $\overline{s_\sigma^1}$:

$$C^1 = \begin{vmatrix} s_{01}^1 & s_{02}^1 & \cdots & s_{0q}^1 \\ s_{11}^1 & s_{12}^1 & \cdots & s_{1q}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{L1}^1 & s_{L2}^1 & \cdots & s_{Lq}^1 \end{vmatrix}_{(L+1)\times q};$$

Λ^2 — матрица, составленная из координат векторов $\overline{\lambda_\sigma^2}$:

$$\Lambda^2 = \begin{vmatrix} \lambda_{01}^2 & \lambda_{02}^2 & \cdots & \lambda_{0q}^2 \\ \lambda_{11}^2 & \lambda_{12}^2 & \cdots & \lambda_{1q}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{L1}^2 & \lambda_{L2}^2 & \cdots & \lambda_{Lq}^2 \end{vmatrix}_{(L+1)\times q};$$

$\overline{\mu^1}$ — вектор интенсивности восстановления: $\overline{\mu^1} = (\mu_0^1, \mu_1^1, \ldots, \mu_L^1)$.

Для игрока 2, управляющего системой S^2, множество стратегий $W^2 = \{\overline{\tau^2}, C^2, \Lambda^1, \overline{\mu^2}\}$ строится аналогично.

Введем теперь последовательность $\{t_0, t_1, \ldots, t_{2L+1}\}$, получаемую объединением последовательностей $\{\tau_0^1, \tau_1^1, ..., \tau_{L+1}^1\}$ и $\{\tau_0^2, \tau_1^2, ..., \tau_{L+1}^2\}$ и элементы которой расположены в порядке возрастания. Ясно, что $t_0 = 0$, а $t_{L+1} = t_f$.

Обозначим $\Delta t_\sigma = [t_\sigma, t_{\sigma+1}[$.

Таким образом, исходя из уравнений (1) и (2), получим дифференциальную игру между двумя системами $S^g(n^g, m^g, \overline{s^g})$, описываемую уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{P^1}}{dt} &= D^1[\overline{s^1}, \overline{\lambda^1}(t), \overline{\mu^1}(t)]\overline{P^1}, \\ \frac{d\overline{P^2}}{dt} &= D^2[\overline{s^2}, \overline{\lambda^2}(t), \overline{\mu^2}(t)]\overline{P^2} \end{aligned} \tag{5}$$

с начальными условиями

$$\overline{P^1}(0) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}_{(m^1+1)}, \quad \overline{P^2}(0) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}_{(m^2+1)}, \tag{6}$$

где $\overline{P^g}(t) = \begin{vmatrix} P_0^g(t) \\ P_1^g(t) \\ \vdots \\ P_{m^g}^g(t) \end{vmatrix}_{(m^g+1)}$ — вектор-столбец размерности (m^g+1); D^g — матрица размерности $(m^g+1)\times(m^g+1)$, определенная выше. Очевидно, что $P^g(t) = \sum_{k=0}^{m^g} P_k^g(t)$ $(g = 1, 2)$.

Метод решения уравнений, подобных (5), для оптимального восстановления работоспособности противоборствующей системы после отказов, обеспечивающий оптимизацию вероятности безотказной работы S^g-системы, приведен в [4].

ISSN 0572-2691

Управления игроков систем S^g подчиним следующим ограничениям.

$$\max_{0 \le \sigma \le L} \max_{0 \le i \le q} \lambda^g_{\sigma i} \le M_g. \quad (7)$$

Данное условие показывает, что ресурсы нападения игроков ограничены.

$$\min_{0 \le \sigma \le L} (\tau^n_{\sigma+1} - \tau^n_\sigma) \ge \alpha_g. \quad (8)$$

Это условие запрещает каждому игроку делать две последовательные настройки «слишком быстро».

$$\mu^2_\sigma + \sum_{i=0}^{q} \lambda^1_{\sigma i} = b_{1\sigma};\ \mu^1_\sigma + \sum_{i=0}^{q} \lambda^2_{\sigma i} = b_{2\sigma};\ 0 \le \sigma \le L. \quad (9)$$

Данное условие отражает тот факт, что в любой момент времени невозможно превосходить соперника и в нападении, и в защите и что сумма ресурсов нападения и защиты в любой момент времени известна каждому игроку.

$$\sum_{i=1}^{q} s^g_{\sigma i} = m^g - \varphi^g_\sigma,\ 0 \le \sigma \le L, \quad (10)$$

где $\varphi^g \left[\sum_{k=0}^{m^g+1} k P^g_{k\ell}(\tau^g_\sigma) \right]$ — математическое ожидание числа отказавших резервных элементов в S^g-системе, а число ℓ и величина $P^g_{m^g+1,\ell}(\tau^g_\sigma)$ находятся соответственно из условий

$$t_\ell = \tau^g_\sigma,$$

$$P_{m^g+1,\ell}(\tau^g_\sigma) = 1 - \sum_{k=0}^{m^g} P^g_{k\ell}(\tau^g_\sigma).$$

Условие (10) указывает, что к моменту настройки τ^g_σ количество резервных элементов игрока g уменьшается на величину φ^g_σ, представляющую собой математическое ожидание числа отказавших элементов в S^g-системе.

Из формулы (9) вытекает, что $\mu^g_\sigma = b^{\tilde{g}}_\sigma - \sum_{i=0}^{q} \lambda^{\tilde{g}}_{\sigma i},\ \ 0 \le \sigma \le L,$ где

$$\tilde{g} = \begin{cases} 1, & \text{если } g = 2, \\ 0, & \text{если } g = 1. \end{cases}$$

Теперь множество стратегий игроков, управляющих системами S^g, можно сузить так, что для g-го игрока $\widetilde{W}^g = \{\overline{\tau^g}, C^g, \overline{\lambda^g}\}$.

Покажем, что рассматриваемая дифференциальная игра между двумя системами $S^g(n^g, m^g, \overline{s^g})$ сводится к матричной.

Пусть $a = \min\{a_1, a_2\}$. На интервале $[0, t_f[$ введем множество $\chi = \{0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots \omega\alpha\}$, где $\omega = [t_f / \alpha - 1]$. Положим, точность определения управления $\overline{\lambda^g}(t)$ равна ε_g. Тогда каждая координата вектора $\overline{\lambda^g}(t)$ может принимать $[M_g / \varepsilon_g] + 1$ значений. Последовательность моментов настроек $\{\tau^g_1, \tau^g_2, \ldots, \tau^g_L\}$ на точках множества χ можно распределить $\binom{\omega}{L}$-способами.

Таким образом, для g-го игрока существует

$$\psi_g = \binom{\omega}{L}\left(\left[\frac{M_g}{\varepsilon_g}\right]+1\right)^L \prod_{\sigma=1}^{L} d(\varphi_\sigma^g) \quad (g = 1, 2);$$

стратегий, где $d(\varphi_\sigma^g)$ — число целых неотрицательных решений уравнения (10).

Известно [6], что $d(\varphi_\sigma^g) = \binom{q + m^g - \varphi_\sigma^g - 1}{m^g - \varphi_\sigma^g}$.

Итак, рассматриваемая дифференциальная игра двух систем $S^g(n^g, m^g, \overline{s^g})$ свелась к матричной игре $(K(\widetilde{z}_{1i}, \widetilde{z}_{2j}))$ размерности $\psi_1 \times \psi_2$, где $\widetilde{z}_{1i} \in \widetilde{W}^1$ — i-я стратегия игрока 1, $\widetilde{z}_{2j} \in \widetilde{W}^2$ — j-я стратегия игрока 2. Более того, обозначив $\alpha_{ij} = K(\widetilde{z}_{1i}, \widetilde{z}_{2j})$, получим нормальную форму матричной игры $A = (\alpha_{ij})$ без ограничений на стратегии игроков, так как все ограничения (7)–(10) учтены при построении матрицы A и множеств $\widetilde{W}^1, \widetilde{W}^2$. Как известно [7], нормальная форма матричной игры всегда имеет решение если не в чистых, то в смешанных стратегиях.

Найдем решение матричной игры A в смешанных стратегиях, так как выяснить существование седловой точки в матрице A практически невозможно даже для небольших чисел ω, L и достаточно малых $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Для решения применим метод фиктивного разыгрывания [7], который по существу является имитацией многократного повторения игры. В соответствии с этим методом определяются две последовательности векторов $\{\overline{X^\alpha}\}$, $\{\overline{Y^\alpha}\}$ следующим образом.

Первоначально

$$X_i^0 = 0, \ \ i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$Y_j^0 = 0, \ \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Далее по индукции полагают, что $\overline{X^{\alpha-1}}$ и $\overline{Y^{\alpha-1}}$ выбраны и найдены такие i и j, что $k(\alpha) = i$ максимизирует $\sum_{j-1}^{\psi_2} \alpha_{ij} Y_j^{\alpha-1}$, а $c(\alpha) = j$ минимизирует $\sum_{i-1}^{\psi_1} \alpha_{ij} X_i^{\alpha-1}$.

Если существует набор решений, при которых указанные выше выражения достигают максимума или минимума, то любую из этих стратегий (максимизирующую или минимизирующую) можно взять в качестве решения [7].

При этом

$$X_i^\alpha = \begin{cases} X_i^{\alpha-1}, & \text{если } i \neq k(\alpha), \\ X_i^{\alpha-1} + 1, & \text{если } i = k(\alpha), \end{cases} \tag{11}$$

$$Y_j^\alpha = \begin{cases} Y_j^{\alpha-1}, & \text{если } j \neq c(\alpha), \\ Y_j^{\alpha-1} + 1, & \text{если } j = c(\alpha). \end{cases} \tag{12}$$

Две последовательности векторов определяют стратегии $\overline{x^\alpha}$ и $\overline{y^\alpha}$:

$$\overline{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha}\overline{X^\alpha}, \ \ \overline{y^\alpha} = \frac{1}{\alpha}\overline{Y^\alpha}.$$

Очевидно, что при $\alpha \geq 1$ стратегии $\overline{x^\alpha}$ и $\overline{y^\alpha}$ будут смешанными. Как отмечено в [7], не существует никаких гарантий, что последовательность $\{\overline{x^\alpha}\}$ или

 ISSN 0572-2691

$\overline{\{y^{\alpha}\}}$ сходится, но поскольку она лежит в компактном множестве стратегий, то должна содержать сходящуюся последовательность. Предел любой сходящейся последовательности $\overline{\{x^{\alpha}\}}$ и $\overline{\{y^{\alpha}\}}$ является оптимальной стратегией.

Данный метод требует большого числа итераций, но итерации достаточно просты и удобны для программирования.

Численный алгоритм решения задачи противоборства двух систем

На основании изложенного предлагается следующий алгоритм решения поставленной задачи противоборства двух технических, восстанавливаемых после отказов S^g-систем, который нетрудно реализовать на современных профессиональных персональных ЭВМ.

Алгоритм.

1. Начало. Задать $\varepsilon_1, \varepsilon_2, a_1, a_2, M_1, M_2, t_f, L, \{b_{1\sigma}\}, \{b_{2\sigma}\}, 0 \le \sigma \le L$.

2. Вычислить $a = \min\{a_1, a_2\}$ и $\omega = [t_f / a - 1]$.

3. Сформировать множество $\chi = \{0, a, 2a, ..., \omega a\}$.

4. Задать вектор $\overline{\tau^g} = (\tau_0^g, \tau_1^g, ..., \tau_L^g)$, $g = 1, 2$, где $\tau_\sigma^g \in \chi$.

5. Задать матрицу $\Lambda^g = (\lambda_{\sigma i}^g)$, $g = 1, 2$, $0 \le \sigma \le L$, $1 \le i \le q$, где $\lambda_{\sigma i}^g = v_{\sigma i}^g \varepsilon_g$, а $v_{\sigma i}^g \in \{0, 1, 2, ..., [M_g]\}$.

6. Вычислить $\overline{\mu^g}$, $g = 1, 2$, по формулам (9).

7. Вычислить целочисленное неотрицательное решение $\overline{s^g}$, $g = 1, 2$, уравнения (10).

8. Вычислить $T^1(S^1(z_1))$ и $T^2(S^2(z_2))$ как корни уравнения $F_g(t) = 0$, $g = 1, 2$.

9. Вычислить $\alpha_{ij} = T^1(S^1(z_1)) - T^2(S^2(z_2))$.

10. Выполнить процедуру пп. 7 и 8 для всех целых неотрицательных решений $\overline{s^1}$, $\overline{s^2}$ уравнения (10).

11. Выполнить процедуру пп. 5–10 для всевозможных комбинаций $v_{\sigma i}^g \in \{0, 1, 2, ..., [M_g]\}$, $g = 1, 2$.

12. Выполнить процедуру пп. 4–11 для всевозможных $\overline{\tau^g}$, $g = 1, 2$, где $\tau_\sigma^g \in \chi$, $0 \le \sigma \le L$.

13. Сформировать матрицу $A = (a_{ij})_{\psi_1 \times \psi_2}$.

14. Задать число $\varepsilon > 0$ (точность решения).

15. Положить $\overline{X^0} = \overline{0}$, $\overline{Y^0} = \overline{0}$.

16. Положить $\alpha = 1$.

17. Вычислить $k(\alpha) = i$, максимизирующее $\sum_{j=1}^{\psi_2} a_{ij} Y_j^{\alpha-1}$; и $c(\alpha) = j$ — минимизирующее $\sum_{i=1}^{\psi_1} a_{ij} X_i^{\alpha-1}$.

18. Вычислить $\overline{X^\alpha}$, $\overline{Y^\alpha}$ по формулам (11) и (12).

19. Вычислить $\overline{x^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\overline{X^{\alpha}}$, $\overline{y^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\overline{Y^{\alpha}}$, считая, что $\overline{x^0} = \overline{X^0}$, $\overline{y^0} = \overline{Y^0}$.

20. Если $\left\| \overline{x^{\alpha}} - \overline{x^{\alpha-1}} \right\| + \left\| \overline{y^{\alpha}} - \overline{y^{\alpha-1}} \right\| < \varepsilon$, перейти к п. 23. Здесь $\|\bar{x}\|$ — евклидова норма вектора $\bar{x}$.

21. Положить $\alpha = \alpha + 1$.

22. Перейти к п. 17.

23. Конец. $\overline{x^{\alpha}}$, $\overline{y^{\alpha}}$ — оптимальные стратегии.

В приведенном алгоритме сам метод фиктивного разыгрывания [7] описан в процедуре 15–23.

В.І. Потапов

МОДЕЛЬ І АЛГОРИТМ ЧИСЕЛЬНОГО РІШЕННЯ ЗАДАЧІ ПРОТИБОРСТВА ДВОХ НАДМІРНИХ, ВІДНОВЛЮВАЛЬНИХ ПІСЛЯ ВІДМОВ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

Поставлено завдання і розроблено математичну модель протиборства двох відновлювальних після відмов надмірних технічних систем, що беруть участь у конфліктній ситуації. Розроблено алгоритм рішення поставленої задачі, що зведена до диференціальної гри між двома конфліктуючими системами.

V.I. Potapov

MODEL AND ALGORITHM OF NUMERICAL SOLVING OF COUNTERACTION PROBLEM OF TWO EXCESS TECHNICAL SYSTEMS RESTORED AFTER FAILURE

Model of counteraction of two technical systems restored after failure in conflict situation was developed and the problem has been stated. Algorithm of solving the formulated problem was developed and the given task has been reduced to differential game between two conflicting system.

1. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. — М. : Наука, 1971. — 383 с.
2. *Оуэн Г.* Теория игр. — М. : Мир, 1971. — 226 с.
3. *Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г.* Введение в прикладную теорию игр. — М. : Наука, 1981. — 336 с.
4. *Потапов В.И., Братцев С.Г.* Новые задачи оптимизации резервированных систем. — Иркутск : Изд-во Иркут. ун-та, 1986. — 112 с.
5. *ГОСТ* 27.002-89. Надежность в технике. Основные понятия. Термины и определения. — М. : Изд-во стандартов, 1990. — 36 с.
6. *Сачков В.Н.* Комбинаторные методы дискретной математики. — М. : Наука, 1977. — 320 с.
7. *Оуэн Г.* Теория игр и игровое моделирование. Исследование операций. Методологические основы и математические методы. — М. : Мир, 1981. — Т. 1. — С. 513–549.

Получено 23.04.2014
После доработки 26.08.2014