УДК 519.833+519.6

В.В. Романюк

РАВНОМЕРНАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ СИМПЛЕКСОВ КАК МНОЖЕСТВ СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЙ ИГРОКОВ В КОНЕЧНОЙ БЕСКОАЛИЦИОННОЙ ИГРЕ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ РАВНОВЕСНЫХ СИТУАЦИЙ С ВОЗМОЖНЫМИ УСТУПКАМИ

Модели рационального распределения ограниченных ресурсов в форме бескоалиционных игр

Рациональность является движущей силой любой задачи принятия решений. Она достижима тогда, когда учитывается реальное влияние каждой из заинтересованных сторон. И именно при распределении ограниченных ресурсов сделать это невероятно сложно в силу различных подходов к интерпретации рациональности и способов их реализации. Бескоалиционные игры представляют собой некую нейтральную модель взаимодействия субъектов с определенными сферами интересов и рычагами их управления (предъявления), именуемые стратегиями [1, 2], где рациональность вырабатывается поэтапно. Модели рационального распределения ограниченных ресурсов в форме бескоалиционных игр применимы как в социально-экономических и экологических системах и процессах [1, 3, 4], так и в технических, инженерных и технологических [2, 5, 6]. Взаимодействие субъектов по правилам бескоалиционной игры предполагает отсутствие каких-либо конвенций, что наиболее характерно для распределения ресурсов в условиях доминирующих запросов [1, 2, 4, 7, 8]. В результате можно найти и оперировать равновесными стратегиями по Нэшу (NE-стратегиями), оптимальными стратегиями по Парето, сильно равновесными стратегиями по Нэшу (SNE-стратегиями), а также чистыми или смешанными стратегиями других типов равновесия, выгодности, симметричности [1, 5, 9, 10]. Однако в случаях, когда равновесия в чистых стратегиях не существует, процесс нахождения смешанных NE-стратегий или SNE-стратегий часто вызывает затруднения, поскольку общий алгоритм точного определения смешанных NE-стратегий в играх с тремя и более игроками неизвестен.

Проблемы дискретизации игр и решения конечных бескоалиционных игр

В большинстве случаев бесконечные игры сводят к конечным, где решение найти гораздо проще. При переводе бесконечной игры в конечную, т.е. в процессе дискретизации игры посредством разбиения и выборки конечных множеств из множеств чистых стратегий всех игроков, важно не потерять своеобразие функции выигрыша каждого из игроков. Иначе такой перевод окажется неадекватным. Условия корректной дискретизации функций выигрыша на компактах [11, 12] не позволяют уменьшаться ни спектральным мощностям, ни плотностям точек с ненулевыми вероятностями их выбора при минимальном уменьшении шага дискретизации. Кроме этого, корректность дискретизации бесконечной игры подразумевает, что с уменьшением шага дискретизации разброс выигрышей игрока может разве что уменьшиться, а аппроксимирующая спектральное наполнение ломаная гиперповерхность изменяется не больше, чем если бы шаг дискретизации увеличивался. Основная трудность здесь состоит в сбалансированным выборе шага

© В.В. РОМАНЮК, 2015

дискретизации, позволяющем найти адекватное приближенное решение как можно быстрее [12, 13]. Таким образом, при дискретизации игр хорошему приближению противопоставляется скорость получения решения.

Еще одним важным аргументом за переход к конечным бескоалиционным играм является то, что только стратегии с конечным спектром могут быть реализованы практически [14, 15]. Обычная лебегова мера точек бесконечного спектра, выбираемых в процессе практической реализации, равна нулю. Так что оперировать стратегиями с бесконечным спектром в практическом смысле невозможно и все равно приходится довольствоваться конечными спектрами.

Элементарными конечными бескоалиционными играми являются диадические [1, 3], когда игрок имеет две чистые стратегии. Решение диадической игры можно найти аналитически [1]. Если же хотя бы один игрок имеет больше двух чистых стратегий, и игра не является биматричной, то аналитический путь решения оказывается громоздким [1, 16]. Кроме того, существуют классы конечных бескоалиционных игр, в которых элементами смешанных NE-стратегий являются иррациональные числа [1, 16]. Практическая ценность таких стратегий незначительна, поскольку так или иначе их приходится аппроксимировать стратегиями с вероятностями, имеющими конечное число знаков после десятичной запятой (как правило, не больше двух).

Но общей теории аналитического решения даже конечных бескоалиционных игр (с тремя и более игроками, по крайней мере один из которых имеет не меньше трех недоминируемых чистых стратегий) пока не существует. Поэтому проблема решения конечных бескоалиционных игр открыта. Решение отдельно взятой бескоалиционной игры представляется самостоятельной задачей, требующей, как правило, рассуждений [1], обобщение которых затруднительно. Общеизвестно лишь то, что всякая конечная бескоалиционная игра, не имеющая NE-ситуаций в чистых стратегиях, имеет хотя бы одну NE-ситуацию в смешанных стратегиях [1, 16]. В дальнейшем нас будут интересовать только такие игры.

Если конечная бескоалиционная игра имеет NE-ситуации в чистых стратегиях, то их можно найти прямым перебором, ведь множество всех ситуаций в чистых стратегиях конечно. Перебор распараллеливается, когда находятся множества приемлемых ситуаций для каждого игрока. И если бы множество всех ситуаций в смешанных стратегиях было также конечным, то можно было бы попытаться найти NE-ситуации в смешанных стратегиях (в бескоалиционной игре, не имеющей NE-ситуаций в чистых стратегиях), на что потребовалось бы конечное число итераций. Возможно, в дискретизированном множестве ситуаций в смешанных стратегиях и не будет NE-ситуаций (когда, например, в исходной игре элементы смешанных NE-стратегий — иррациональные числа), но в любом случае нам нужны стратегии с конечным спектром и вероятностями, имеющими один-два знака после десятичной запятой. Поэтому необходимо обосновать метод дискретизации множеств смешанных стратегий игроков, используя постоянный шаг дискретизации. При этом укажем условия приемлемости выполняемой дискретизации, обеспечивающие контролируемое изменение выигрышей игроков при минимальном изменении ситуации по узлам решетки множества ситуаций в смешанных стратегиях. Также покажем, как использовать дискретизированное множество ситуаций в смешанных стратегиях для поиска NE-решений и ситуаций, являющихся равновесными с некоторыми уступками [17, 18]. Впоследствии будут обсуждены варианты ускорения вычислений.

 ISSN 0572-2691

Условия дискретизации фундаментальных симплексов как множеств смешанных стратегий игроков

Пусть дана бескоалиционная игра

$$\left\langle \{X_n = \{x_{nm}\}_{m=1}^{M_n}\}_{n=1}^{N},\ \{\mathbf{K}_n = [k_J^{<n>}]_{\mathsf{F}}\ \}_{n=1}^{N} \right\rangle \tag{1}$$

с $N \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ игроками, где X_n — множество чистых стратегий n-го игрока, а $\mathbf{K}_n$ — матрица его выигрышей, формат которой $\mathsf{F} = \bigtimes_{r=1}^{N} M_r$ при $M_r \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ и индексации

$$J = \{j_i\}_{i=1}^{N},\ \ j_i \in \{\overline{1, M_i}\}\ \ \forall\ i = \overline{1, N}. \tag{2}$$

Множество всех смешанных стратегий n-го игрока суть $(M_n - 1)$-мерный фундаментальный симплекс

$$\mathsf{P}_n = \left\{ \mathbf{P}_n = [p_{nm}]_{1 \times M_n} \in \mathrm{P}^{M_n} : p_{nm} \in [0; 1], \sum_{m=1}^{M_n} p_{nm} = 1 \right\}. \tag{3}$$

Ожидаемый выигрыш n-го игрока в ситуации $\{\mathbf{P}_i\}_{i=1}^{N} \in \bigtimes_{r=1}^{N} \mathsf{P}_r$ равен

$$v_n(\{\mathbf{P}_i\}_{i=1}^{N}) = \sum_{j_q = \overline{1, M_q},\, q = \overline{1, N}} \left(k_J^{<n>} \cdot \prod_{r=1}^{N} p_{rj_r} \right). \tag{4}$$

Если шаг дискретизации в каждом измерении симплекса (3) положить равным s^{-1} для $s \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, то симплекс (3) превращается в решетку

$$\overline{\mathsf{P}}_n = \left\{ \overline{\mathbf{P}}_n = [\overline{p}_{nm}]_{1 \times M_n} \in \mathsf{P}_n : \overline{p}_{nm} = \frac{h-1}{s},\ h = \overline{1, s+1}\ \forall\ m = \overline{1, M_n} \right\} \subset \mathsf{P}_n. \tag{5}$$

Будем считать, что именно такое конечное разбиение множества (3) корректно, поскольку концы единичных отрезков в каждом из его измерений должны войти в решетку. Согласно этой концепции все чистые стратегии входят в симплексную решетку (5).

Потребуем, чтобы для некоторого $\alpha_n > 0$ было

$$\left| v_n(\{\overline{\mathbf{P}}_i\}_{i=1}^{N}) - v_n(\{\{\overline{\mathbf{P}}_i\}_{i=1}^{N} \setminus \{\overline{\mathbf{P}}_q\}\} \cup \{\overline{\mathbf{P}}_q^{<0>}\}) \right| \le \alpha_n \tag{6}$$

при $\overline{\mathbf{P}}_q^{<0>} \in \overline{\Pi}_q$ и

$$\left\| \overline{\mathbf{P}}_q - \overline{\mathbf{P}}_q^{<0>} \right\| = \min_{\overline{\mathbf{P}}_q^{*} \in \overline{\Pi}_q,\ \overline{\mathbf{P}}_q^{**} \in \overline{\Pi}_q,\ \overline{\mathbf{P}}_q^{*} \neq \overline{\mathbf{P}}_q^{**}} \left\| \overline{\mathbf{P}}_q^{*} - \overline{\mathbf{P}}_q^{**} \right\| \tag{7}$$

для $n = \overline{1, N}$ и $q = \overline{1, N}$ с обычной евклидовой метрикой в P^{M_q}. Требование (6) с расстоянием (7) означает, что при минимальном изменении ситуации по узлам решетки $\bigtimes_{r=1}^{N} \overline{\mathsf{P}}_r$ выигрыш n-го игрока изменяется не больше, чем на величину α_n. Иными словами, дискретизация фундаментальных симплексов как множеств смешанных стратегий игроков должна отвечать принципу «дискретной α_n-непрерывности» ожидаемых выигрышей игроков. Согласно этому принципу один игрок, действуя в одиночку с минимальным шагом, отвечающим расстоянию (7), не может изменить выигрыш любого игрока более, чем на некоторую положительную величину, — на величину α_n для n-го игрока. Описание этого минимального шага приводится в следующем разделе.

Построение симплексной решетки (5)

Во избежание неоднозначностей можно рассматривать нумерацию Z_n элементов каждой симплексной решетки (5). Если

$$\overline{\mathsf{P}}_n = \{\overline{\mathbf{P}}_n^{<z>} = [\overline{p}_{nm}^{<z>}]_{1\times M_n}\}_{z=1}^{Z_n}, \tag{8}$$

то

$$\overline{\mathbf{P}}_n^{<1>} = [\overline{p}_{nm}^{<1>}]_{1\times M_n} \text{ при } \overline{p}_{n1}^{<1>} = 1 \text{ и } \overline{p}_{nm}^{<1>} = 0 \ \ \forall\, m = \overline{2, M_n}. \tag{9}$$

Элемент $\overline{p}_{n1}$ изменяется от 1 до 0 с шагом s^{-1}. Элементы $\{\overline{p}_{nm}\}_{m=2}^{M_n-1}$ также изменяются от 1 до 0 с шагом s^{-1}, но перед вхождением в цикл для их вычисления перед t-м элементом при $t = \overline{2, M_n - 1}$ производится обнуление типа

$$\overline{p}_{nm} = 0 \ \ \forall\, m = \overline{t, M_n - 1} \tag{10}$$

и проверка условия

$$\sum_{m=1}^{M_n-1} \overline{p}_{nm} \le 1. \tag{11}$$

В цикле для $(M_n - 1)$-го элемента вычисляется

$$\overline{p}_{nM_n} = 1 - \sum_{m=1}^{M_n-1} \overline{p}_{nm}, \tag{12}$$

если только неравенство (11) верно. Очевидно, что последним элементом во множестве (8) будет

$$\overline{\mathbf{P}}_n^{<Z_n>} = [\overline{p}_{nm}^{<Z_n>}]_{1\times M_n} \text{ при } \overline{p}_{nm}^{<Z_n>} = 0 \ \ \forall\, m = \overline{1, M_n - 1} \text{ и } \overline{p}_{nM_n}^{<Z_n>} = 1. \tag{13}$$

Не ограничивает общности и тот факт, что, согласно описанному алгоритму построения симплексной решетки (5),

$$\overline{\mathbf{P}}_n^{<2>} = [\overline{p}_{nm}^{<2>}]_{1\times M_n} \text{ при } \overline{p}_{n1}^{<2>} = 1 - s^{-1}$$

$$\text{и } \overline{p}_{n2}^{<2>} = s^{-1} \text{ для } \overline{p}_{nm}^{<2>} = 0 \ \ \forall\, m = \overline{3, M_n}, \tag{14}$$

$$\overline{\mathbf{P}}_n^{<Z_n-1>} = [\overline{p}_{nm}^{<Z_n-1>}]_{1\times M_n} \text{ при } \overline{p}_{nm}^{<Z_n-1>} = 0$$

$$\forall\, m = \overline{1, M_n - 2} \text{ и } \overline{p}_{n(M_n-1)}^{<Z_n-1>} = s^{-1} \text{ для } \overline{p}_{nM_n}^{<Z_n-1>} = 1 - s^{-1}. \tag{15}$$

Тогда легко видеть, что минимальное расстояние между элементами (узлами) симплексной решетки (5) равно

$$\min_{\overline{\mathbf{P}}_n^* \in \overline{\Pi}_n,\ \overline{\mathbf{P}}_n^{**} \in \overline{\Pi}_n,\ \overline{\mathbf{P}}_n^* \ne \overline{\mathbf{P}}_n^{**}} \left\| \overline{\mathbf{P}}_n^* - \overline{\mathbf{P}}_n^{**} \right\| = \min_{l=\overline{1, Z_n-1},\ u=\overline{l+1, Z_n}} \left\| \overline{\mathbf{P}}_n^{<l>} - \overline{\mathbf{P}}_n^{<u>} \right\| =$$

$$= \left\| \overline{\mathbf{P}}_n^{<1>} - \overline{\mathbf{P}}_n^{<2>} \right\| = \sqrt{s^{-2} + s^{-2}} = s^{-1}\sqrt{2}. \tag{16}$$

Итак, игрок может изменить свою стратегию не менее, чем на величину (16). И если один из игроков изменяет свою стратегию на величину (16), то выигрыш n -го игрока изменится не больше, чем на величину α_n.

Поиск NE-ситуаций и ситуаций, являющихся равновесными с уступкой

Напомним, что в игре (1) с обозначениями (2)–(4) ситуация $\{\mathbf{P}_i^*\}_{i=1}^N$ называется NE-ситуацией, если

$$v_n(\{\{\mathbf{P}_i^*\}_{i=1}^N \setminus \{\mathbf{P}_n^*\}\} \cup \{\mathbf{P}_n\}) \leq v_n(\{\mathbf{P}_i^*\}_{i=1}^N)$$
$$\forall\ \mathbf{P}_n \in \mathsf{P}_n \text{ и } \forall\, n = \overline{1, N}. \tag{17}$$

В пределах узлов симплексной решетки $\bigtimes_{r=1}^{N} \overline{\mathsf{P}}_r$ множество NE-ситуаций может оказаться пустым, поэтому можно рассматривать ситуацию $\{\overline{\mathbf{P}}_i^*\}_{i=1}^N \in \bigtimes_{r=1}^{N} \overline{\mathsf{P}}_r$ равновесной с уступкой $\beta_n \geq 0$ для n -го игрока, если

$$v_n(\{\{\overline{\mathbf{P}}_i^*\}_{i=1}^N \setminus \{\overline{\mathbf{P}}_n^*\}\} \cup \{\overline{\mathbf{P}}_n\}) \leq v_n(\{\overline{\mathbf{P}}_i^*\}_{i=1}^N) + \beta_n$$
$$\forall\, \overline{\mathbf{P}}_n \in \overline{\mathsf{P}}_n \text{ и } \forall\, n = \overline{1, N}. \tag{18}$$

Использовав нумерацию в (8), неравенства (18) запишем в более удобном (для конечного перебора) виде:

$$v_n(\{\{\overline{\mathbf{P}}_i^*\}_{i=1}^N \setminus \{\overline{\mathbf{P}}_n^*\}\} \cup \{\overline{\mathbf{P}}_n^{<z>}\}) \leq v_n(\{\overline{\mathbf{P}}_i^*\}_{i=1}^N) + \beta_n$$
$$\forall\, z = \overline{1, Z_n} \text{ и } \forall\, n = \overline{1, N}. \tag{19}$$

При $\beta_n = 0\ \ \forall\, n = \overline{1, N}$ получаем обычную NE-ситуацию. Если же $\beta_n > 0$ хотя бы для одного n -го игрока, то ситуацию, удовлетворяющую неравенствам (19), назовем $\{\beta_n\}_{n \in B}$ -NE-ситуацией, где

$$B = \{q \in \{\overline{1, N}\} : \beta_q > 0\}. \tag{20}$$

Также можно оперировать и $\{\gamma_C\}_{C \subset \{\overline{1, N}\}}$ -SNE-ситуациями, т.е. ситуациями $\{\overline{\mathbf{P}}_i^*\}_{i=1}^N \in \bigtimes_{r=1}^{N} \overline{\Pi}_r$ такими, что

$$\sum_{n \in C} v_n(\{\{\overline{\mathbf{P}}_i^*\}_{i=1}^N \setminus \{\overline{\mathbf{P}}_q^*\}_{q \in C}\} \cup \{\overline{\mathbf{P}}_q^{<z>}\}_{q \in C}) \leq \sum_{n \in C} v_n(\{\overline{\mathbf{P}}_i^*\}_{i=1}^N) + \gamma_C$$
$$\forall\, z = \overline{1, Z_q} \text{ и } \forall\, C \subset \{\overline{1, N}\} \tag{21}$$

с уступками C -коалиции $\gamma_C \geq 0$.

Поиск, вообще говоря, $\{\beta_n\}_{n \in B}$ -NE-ситуаций при (20) ничем не отличается от поиска NE-ситуаций. При некотором наборе $\{z_i \in \{\overline{1, Z_i}\}\}_{i=1}^N$ фиксируется ситуация $\{\overline{\mathbf{P}}_i^*\}_{i=1}^N = \{\overline{\mathbf{P}}_i^{<z_i>}\}_{i=1}^N$, для которой вычисляются N правых частей в (19). Сначала для фиксированной ситуации $\{\overline{\mathbf{P}}_i^*\}_{i=1}^N = \{\overline{\mathbf{P}}_i^{<z_i>}\}_{i=1}^N$ при $z_i \in \{\overline{1, Z_i}\}$ проверяется неравенство (19) для $n = 1$. Если неравенство (19) последовательно выполняется для $n = \overline{1, r}$, то далее оно проверяется для $n = r + 1$, где $r \in \{\overline{1, N-1}\}$.

Иначе цикл разрывается, производится инкремент одного из номеров в наборе $\{z_i\}_{i=1}^N$ и для новой фиксированной ситуации $\{\overline{\mathbf{P}}_i^*\}_{i=1}^N = \{\overline{\mathbf{P}}_i^{<z_i>}\}_{i=1}^N$ неравенство (19) снова проверяется для $n = 1$. Эти действия выполняются до тех пор, пока не будет проверено неравенство (19) для ситуации $\{\overline{\mathbf{P}}_i^{<Z_i>}\}_{i=1}^N$.

Обсуждение возможности ускорения поиска $\{\beta_n\}_{n\in B}$ -NE- ситуаций

Кроме описанной выше процедуры поиска $\{\beta_n\}_{n\in B}$ -NE- решений, существует вариант поиска, где сначала находятся множества приемлемых ситуаций для каждого из игроков, а потом выполняется пересечение этих множеств. Однако этот вариант гораздо медленнее. В предлагаемой процедуре поиска $\{\beta_n\}_{n\in B}$-NE-решений приемлемые ситуации ищутся последовательно, начиная с первого игрока. Если некоторая ситуация оказывается неприемлемой для $(r+1)$ -го игрока, будучи приемлемой для первых r игроков при $r \in \{\overline{1, N-1}\}$, то она отбрасывается и фиксируется следующая. Так отбрасываются те ситуации, которые заведомо не будут удовлетворять неравенству (19).

Ясно, что чем больше количество элементов во множестве (20) и чем больше значения $\{\beta_n\}_{n\in B}$, тем больше будет приемлемых ситуаций. Это замедлит процесс поиска $\{\beta_n\}_{n\in B}$ -NE- решений. Ускорить его можно за счет распараллеливания перемножения матриц (массивов) при вычислении ожидаемых выигрышей по формуле (4).

Значения $\{\alpha_n\}_{n=1}^N$ и $\{\beta_n\}_{n\in B}$ подбираются с учетом разбросов

$$\max_{J=\{j_i\}_{i=1}^N,\ j_i=\overline{1, M_i},\ i=\overline{1, N}} (k_J^{<n>}) - \min_{J=\{j_i\}_{i=1}^N,\ j_i=\overline{1, M_i},\ i=\overline{1, N}} (k_J^{<n>}) \text{ при } n = \overline{1, N}. \tag{22}$$

В процентном эквиваленте эти значения, исходя из практических соображений, могут составлять до 10 % от соответствующих разбросов (22), хотя здесь удобнее оперировать нормированными выигрышами. Для матриц выигрышей $\{\mathbf{G}_n = [g_J^{<n>}]_{\mathsf{F}}\}_{n=1}^N$ формата $\mathsf{F} = \mathop{\times}\limits_{r=1}^{N} M_r$ при индексации (2) необходимо осуществлять аффинно-эквивалентный [1, 16] переход

$$\overline{g}_J^{<n>} = g_J^{<n>} - \min_{I=\{t_i\}_{i=1}^N,\ t_i=\overline{1, M_i},\ i=\overline{1, N}} (g_I^{<n>}) + 1,$$

$$k_J^{<n>} = \frac{\overline{g}_J^{<n>}}{\max\limits_{I=\{t_i\}_{i=1}^N,\ t_i=\overline{1, M_i},\ i=\overline{1, N}} (\overline{g}_I^{<n>})} \text{ для } n = \overline{1, N} \tag{23}$$

к игре (1). Если же требуется однородная аффинная эквивалентность [1, 16], вместо (23) нормирование следует производить так:

$$\overline{g}_J^{<n>} = g_J^{<n>} - \min_{r=\overline{1, N}} \left(\min_{I=\{t_i\}_{i=1}^N,\ t_i=\overline{1, M_i},\ i=\overline{1, N}} (g_I^{<r>}) \right) + 1,$$

$$k_J^{<n>} = \frac{\overline{g}_J^{<n>}}{\max\limits_{r=\overline{1, N}} \left(\max\limits_{I=\{t_i\}_{i=1}^N,\ t_i=\overline{1, M_i}, i=\overline{1, N}} (\overline{g}_I^{<r>}) \right)} \text{ для } n = \overline{1, N}. \tag{24}$$

В результате будет $k_J^{<n>} \in (0; 1]$ $\forall n = \overline{1, N}$. Это позволит там, где требуется, брать $\beta_n = 0{,}01$ или $\beta_n = 0{,}02$, поскольку, как показали примеры, значение

ISSN 0572-2691

$\beta_n = 0{,}1$ или даже $\beta_n = 0{,}05$ уже слишком велико. В частности, в одной $3\times 3\times 3$-игре без NE-ситуаций в чистых стратегиях после нормирования (24) при $s = 5$ получилась одна $\{0{,}01\}_{n\in\{\overline{1,3}\}}$-NE-ситуация. При этом длительность процесса поиска этой ситуации оказалась лишь на 17 % больше длительности процесса для $\beta_n = 0 \quad \forall\, n = \overline{1,3},$ в этой же игре при $s = 5$ существует девять $\{0{,}02\}_{n\in\{\overline{1,3}\}}$-NE-ситуаций, которые были найдены за время, превышающее на 39 % период поиска обычных NE-ситуаций. Следовательно, рациональный выбор небольших значений $\{\beta_n\}_{n\in B}$ ускоряет поиск $\{\beta_n\}_{n\in B}$-NE-ситуаций.

С подбором значений $\{\alpha_n\}_{n=1}^{N}$ дело обстоит несколько сложнее. Если требование (6) с расстоянием (7) невыполнимо, понадобится либо повышение значений $\{\alpha_n\}_{n=1}^{N}$, либо уменьшение шага дискретизации s^{-1}. Последнее неизбежно приведет к замедлению процесса поиска $\{\beta_n\}_{n\in B}$-NE-ситуаций. Как следствие, значения $\{\alpha_n\}_{n=1}^{N}$ рекомендуется выбирать достаточно большими в зависимости не только от разбросов (22), но и от количества разбросов выигрышей игроков по ситуациям в чистых стратегиях.

Заключение

Естественно, не существует гарантии, что после дискретизации фундаментальных симплексов с очень малым шагом множество NE-ситуаций, удовлетворяющих (17) по определению, окажется непустым. Это оправдывает введение $\{\beta_n\}_{n\in B}$-NE-ситуаций, а также и $\{\gamma_C\}_{C\subset\{\overline{1,N}\}}$-SNE-ситуаций. Здесь можно говорить о переходе к NE-ситуациям с уступками, вызванном не столько незнанием аналитического способа решения игры, сколько ограничением количества возможных повторов игры, что вынуждает работать со спектральными вероятностями, имеющими один-два знака после десятичной запятой.

Вариант построения самой решетки (8) для n-го игрока, где предусматривается выполнение соотношений (9)–(15), не является единственным. Впрочем, особого внимания он не заслуживает ввиду того, что его осуществление происходит на несколько порядков быстрее поиска $\{\beta_n\}_{n\in B}$-NE-ситуаций. Практически все время уходит на вычисление ожидаемых выигрышей по формуле (4), фигурирующих в обеих частях неравенств (19) и (21). Все остальные операции требуют ничтожно малой доли времени (ориентировочно — менее 1 %).

Программная реализация предлагаемой дискретизации множеств смешанных стратегий выполнима в любой среде, допускающей операции с многомерными массивами. Приоритетными выступают среды, поддерживающие многопоточные вычисления и использование многоядерных процессоров, включая видеопроцессоры с поддержкой CUDA для эффективного распараллеливания процедур вычисления ожидаемых выигрышей согласно (4).

Подбирая значения $\{\alpha_n\}_{n=1}^{N}$, следует помнить о том, что чрезмерно большие правые части в (6) могут стать причиной грубой конечной аппроксимации фундаментальных симплексов. Но подбор рациональных значений $\{\beta_n\}_{n\in B}$ намного важнее. Величины $\{\beta_n\}_{n\in B}$ желательно понижать до тех пор, пока не получится единственная $\{\beta_n\}_{n\in B}$-NE-ситуация. В результате имеем еще одно ощутимое преимущество решения игры (1) на решетке $\mathop{\times}\limits_{r=1}^{N} \overline{\mathsf{P}}_r$, ведь количество $\{\beta_n\}_{n\in B}$-NE-ситуаций регулируемо благодаря изменяемым значениям $\{\beta_n\}_{n\in B}$. Отсюда следует, что известная проблема единственности решения игры [19, 20] устраняема с помощью предлагаемой дискретизации и концепции уступок.

В перспективе результат представленной работы можно дополнить. Во-первых, игроки, обладая разными значениями $\{\alpha_n\}_{n=1}^{N}$ и уступая в равновесии по-разному, могут иметь свои собственные шаги дискретизации. Во-вторых, шаг дискретизации можно подстроить индивидуально вдоль каждого из измерений смешанной стратегии. Это вызвано тем, что иногда чистые стратегии бывают различной важности (рангов), поэтому после их ранжирования вероятность выбора чистой стратегии с высшим рангом должна меняться с меньшим шагом. В-третьих, предлагаемая равномерная дискретизация легко распространяема на любые другие игровые модели распределения ограниченных ресурсов и взаимодействия в условиях конфликта, разрешаемого лишь с помощью смешанных (вероятностных) расширений. Заметим, что для динамических игровых моделей потребуется согласование с шагом кусочно-программного управления [2, 21].

В.В. Романюк

РІВНОМІРНА ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ СИМПЛЕКСІВ ЯК МНОЖИН ЗМІШАНИХ СТРАТЕГІЙ ГРАВЦІВ У СКІНЧЕННІЙ БЕЗКОАЛІЦІЙНІЙ ГРІ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ РІВНОВАЖНИХ СИТУАЦІЙ З МОЖЛИВИМИ ПОСТУПКАМИ

Запропоновано метод рівномірної дискретизації фундаментальних симплексів як множин змішаних стратегій гравців у скінченній безкоаліційній грі для її наближеного розв'язку. Цей розв'язок сприймається як рівноважні ситуації з можливими поступками, оскільки на скінченній симплексній решітці не обов'язково знаходяться рівноважні ситуації за Нешем. Умови дискретизації передбачають, що при мінімальній зміні ситуації за вузлами цієї решітки виграш гравця змінюється не більше, ніж на деяку постійну для нього величину. Побудова симплексної решітки множини змішаних стратегій гравця виконується циклічним спуском від першої чистої стратегії до останньої. Пошук ситуацій, котрі є рівноважними з поступкою, можна прискорити за рахунок розпаралелювання перемноження масивів при обчисленні очікуваних виграшів.

V.V. Romanuke

UNIFORM SAMPLING OF FUNDAMENTAL SIMPLEXES AS SETS OF PLAYERS' MIXED STRATEGIES IN THE FINITE NONCOOPERATIVE GAME FOR FINDING EQUILIBRIUM SITUATIONS WITH POSSIBLE CONCESSIONS

A method is suggested for sampling uniformly fundamental simplexes as sets of players' mixed strategies in the finite noncooperative game for its approximate solution. This solution is treated in the sense of equilibrium situations with possible concessions, as Nash equilibrium situations are not necessarily to be on a finite simplex lattice. The sampling conditions presume that, by changing minimally a situation over nodes of the lattice, the player's payoff varies no greater than within its constant value. Building a simplex lattice of the player's mixed strategies set is fulfilled by cyclic descent from the first pure strategy down to the last one. Retrieval of concession-equilibrium situations can be sped up by parallelizing arrays' multiplication when expected payoffs are calculated.

1. *Воробьев Н.Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. — М. : Наука, 1984. — 496 с.
2. *Чикрий А.А.* Конфликтно-управляемые процессы. — Киев : Наук. думка, 1992. — 383 с.
3. *Romanuke V.V.* Environment guard model as dyadic three-person game with the generalized fine for the reservoir pollution // Екологічна безпека та природокористування. — 2010. — Вип. 6. — С. 77–94.
4. *Scheffran J.* The dynamic interaction between economy and ecology: cooperation, stability and sustainability for a dynamic-game model of resource conflicts // Mathematics and Computers in Simulation. — 2000. — **53**, N 4–6. — P. 371–380.
5. *Gąsior D., Drwal M.* Pareto-optimal Nash equilibrium in capacity allocation game for self-managed networks // Computer Networks. — 2013. — **57**, N 14. — P. 2817–2832.
6. *Ye D., Chen J.* Non-cooperative games on multidimensional resource allocation // Future Generation Computer Systems. — 2013. — **29**, N 6. — P. 1345–1352.
7. *Власенко Л.А., Чикрий А.А.* Об одной дифференциальной игре в системе с распределенными параметрами // Тр. Института математики и механики УрО РАН. — 2014. — **20**, № 4. — С. 71–80.
8. *Чикрий А. А., Белоусов А. А.* О линейных дифференциальных играх с выпуклыми интегральными ограничениями // Там же. — 2013. — **19**, № 4. — С. 308 — 319.
9. *Fudenberg D., Tirole J.* Perfect Bayesian equilibrium and sequential equilibrium // Journal of Economic Theory. — 1991. — **53**, N 2. — P. 236–260.
10. *Scalzo V.* Pareto efficient Nash equilibria in discontinuous games // Economics Letters. — 2010. — **107**, N 3. — P. 364 — 365.
11. *Романюк В.В.* Дискретизация континуальной антагонистической игры на единичном гиперкубе и преобразование многомерной матрицы для решения соответствующей матричной игры // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2015. — № 1. — С. 118–126.
12. *Romanuke V.V.* Approximation of unit-hypercubic infinite antagonistic game via dimension-dependent irregular samplings and reshaping the payoffs into flat matrix wherewith to solve the matrix game // Journal of Information and Organizational Sciences. — 2014. — **38**, N 2. — P. 125 — 143.
13. *Kontogiannis S.C., Panagopoulou P.N., Spirakis P.G.* Polynomial algorithms for approximating Nash equilibria of bimatrix games // Theoretical Computer Science. — 2009. — **410**, N 17. — P. 1599–1606.
14. *Bernhard P., Shinar J.* On finite approximation of a game solution with mixed strategies // Applied Mathematics Letters. — 1990. — **3**, N 1. — P. 1–4.
15. *Романюк В.В.* Сходимость и оценка процесса компьютерной реализации принципа оптимальности в матричных играх с видимым горизонтом разыгрываний // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2013. — № 5. — С. 96–102.
16. *Воробьев Н.Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. — М. : Наука, 1985. — 272 с.
17. *Tanaka K., Yokoyama K.* On ε-equilibrium point in a noncooperative n-person game // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1991. — **160**, N 2. — P. 413–423.
18. *Gerardi D., Myerson R.B.* Sequential equilibria in Bayesian games with communication // Games and economic behavior. — 2007. — **60**, N 1. — P. 104–134.
19. *Harsanyi J. C., Selten R.* A general theory of equilibrium selection in games. — Cambridge Mass. : The MIT Press, 1988. — 396 p.
20. *Romanuke V.V.* Superoptimal mixed strategies in antagonistic games as the advantaged subsets of the optimal mixed strategies set // Bulletin of Donetsk National University. Ser. A. Natural sciences. — 2010. — N 2. — P. 289–298.
21. *Чикрий А.А., Матичин И.И.* Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков // Тр. Института математики и механики УрО РАН. — 2005. — **11**, № 1. — С. 212–224.

Получено 30.04.2015