УДК 517.9,519.816

Н.И. Недашковская

МЕТОД ОЦЕНИВАНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ВЕСОВ АЛЬТЕРНАТИВ РЕШЕНИЙ

Введение

Для решения задач поддержки принятия решений в разных предметных областях применяется декомпозиционный метод анализа иерархий [1–3], входной информацией в котором являются количественные данные и экспертные оценки. Этот метод имеет ряд преимуществ перед другими методами, использующими экспертные оценки, среди которых можно выделить следующие: экспертиза основана на процедуре парных сравнений, которая наилучшим образом учитывает психофизиологические особенности человека; в результате эксперт дает избыточное количество оценок парных сравнений, что позволяет на следующем этапе метода проанализировать согласованность знаний эксперта.

Практическое применение любого метода, использующего субъективную исходную информацию, требует ответа на вопрос о достоверности получаемых результатов. Некоторые известные методы [4–8] основаны на допущении, что оценки эксперта, заданные в шкалах, не содержат ошибок и проверять их качество нет необходимости: «Эксперт всегда прав, поскольку он выражает именно свое мнение» [4, с. 84]. Однако эксперт может не обладать полными знаниями по рассматриваемому вопросу, не всегда может выразить свои знания в предлагаемой шкале, допустить случайную ошибку и прочее. Под возможными ошибками эксперта в данной работе будем понимать неопределенность задания экспертом степени превосходства одной альтернативы над другой при их парном сравнении.

В методе анализа иерархий качество экспертных оценок парных сравнений проверяется с помощью коэффициента согласованности и предполагается, что если эксперт указал множество полностью согласованных оценок, то эти оценки истинны, т.е. отображают истинные веса альтернатив по критерию решений. Это утверждение не всегда верно, поскольку эксперты, выполняя оценивание в шкале, могут поставить в соответствие реальным весам разные множества полностью согласованных оценок парных сравнений. Поэтому требуются дополнительные средства оценивания неопределенности экспертных оценок парных сравнений. С этой целью разрабатываются методы парных сравнений в нечетких шкалах [9, 10], предлагаются законы распределения экспертных оценок [11, 12].

Для вычисления весов альтернатив решений на основе экспертных оценок парных сравнений альтернатив используется метод главного собственного вектора (EM) [1, 2], модели оптимизации [13] и др. [14].

Цель данного исследования — разработать метод оценивания неопределенности экспертных парных сравнений в задаче вычисления весов альтернатив решений. В результате альтернативам решений ставятся в соответствие доверительные интервалы для относительных весов альтернатив, которые более достоверно, по сравнению с точечными весами по методу EM (Eigenvector Method — EM) и др., отображают относительную важность альтернатив решений.

1. Постановка задачи

Дано: $A = \{a_i \mid i = 1,..., n\}$ — множество альтернатив решений, C — характеристика, по которой сравниваются эти альтернативы, в дальнейшем — критерий решений.

Необходимо определить $w = \{w_i = [\underline{w_i}, \overline{w_i}] \mid i = 1,..., n\}$ — доверительные интервалы для весовых коэффициентов (весов) альтернатив.

Используем для вычисления весов альтернатив метод парных сравнений экспертного оценивания, в соответствии с которым по оценкам эксперта, выполненным в шкале отношений, строится матрица $D_{n\times n} = \{d_{ij} \mid i, j = 1,..., n\}$ парных сравнений (МПС), $d_{ij} > 0$, $d_{ji} = 1/d_{ij}$ [1, 2]. Элементы d_{ij} показывают отношения неизвестных значений весов альтернатив по критерию решений: $d_{ij} = \frac{v_i}{v_j}\varepsilon_{ij}$, где $\varepsilon_{ij} > 0$ — возмущение. Для экспертного оценивания наиболее часто используется шкала отношений Саати {1, 2, 3,…, 9}, в которой 1 соответствует одинаковой важности сравниваемых элементов, 3 — слабому превосходству, 5 — сильному превосходству, 7 — очень сильному превосходству, 9 — абсолютному превосходству и 2, 4, 6, 8 — промежуточным значениям [1, 2].

Для оценивания противоречивости экспертных оценок парных сравнений используются коэффициенты несогласованности CR, GCI, HCR, CI^{tr}. Описание и анализ показателей несогласованности можно найти в [3, 15]. МПС D называется полностью согласованной (в дальнейшем, для сокращения, согласованной), если $d_{ij} = d_{ik}d_{kj}$ для $\forall i, j, k = 1,..., n$ [1, 2].

Несогласованность МПС допустима, когда показатели несогласованности CR, GCI, HCR, CI^{tr} не превышают установленные для них пороговые значения. МПС согласованна тогда и только тогда, когда эти показатели равны нулю.

Полная согласованность экспертных оценок парных сравнений не может быть признаком их истинности, т.е. если оценки полностью согласованны, то они не обязательно отображают истинные веса альтернатив. Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим модельный пример — обратную задачу вычисления весов.

Пример 1. Пусть известны реальные веса $w^{real} = (0{,}45,\ 0{,}25,\ 0{,}10,\ 0{,}20)$ четырех альтернатив относительно некоторой общей для них характеристики. Не сообщая реальных весов, экспертов попросили рассмотреть и попарно сравнить эти альтернативы в шкале Саати так, чтобы оценки были полностью согласованными. Для построения согласованной МПС D_{nxn} достаточно определить ее $n-1$ ведущих элементов [5]. Каждый из экспертов выбрал разные множества пар альтернатив в качестве ведущих элементов МПС. Остальные элементы МПС вычислены на основании множества ее ведущих элементов, используя условия согласованности $d_{ij} = d_{ik}d_{kj}$ для $\forall i, j, k = 1,..., n$ и обратной симметричности $d_{ji} = 1/d_{ij}$. В результате разные эксперты поставили в соответствие заданным альтернативам разные полностью согласованные МПС $D^1 - D^4$ (ведущие элементы обозначены кружочками):

$$D^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1/2 & 1 & 2 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 2 \\ 1/2 & 1 & 3 & 1 \\ 1/6 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 6 \\ 1/2 & 1 & 3 & 3 \\ 1/6 & 1/3 & 1 & 1 \\ 1/6 & 1/3 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ D^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1/2 & 1 & 2 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

МПС в вещественнозначной шкале, соответствующая весам w^{real}, очевидно равна

$$D^{real} = \left(\frac{w_i^{real}}{w_j^{real}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}8 & 4{,}5 & 2{,}25 \\ 1/1{,}8 & 1 & 2{,}5 & 1{,}25 \\ 1/4{,}5 & 1/2{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 1/2{,}25 & 1/1{,}25 & 1/0{,}5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Все эксперты имели высокую компетентность. Экспертов, которые задали МПС D^1 и D^2, назовем экспертами-реалистами, поскольку определенные ими значения ведущих элементов МПС в точности равны соответствующим отношениям реальных весов $\left(\frac{w_i^{real}}{w_j^{real}}\right)$, округленным по законам математики к ближайшим делениям шкалы Саати. МПС D^1 и D^2 ближайшие в шкале Саати к D^{real} при разных множествах ведущих элементов. Будем их называть в дальнейшем несмещенными МПС по отношению к реальным весам.

Экспертов, которые задали МПС D^3 и D^4, назовем экспертами-оптимистами/пессимистами: ведущие элементы $d_{3,4}^3$ и $d_{3,4}^4$ в МПС D^3 и D^4 были завышены на одно деление шкалы, а ведущий элемент $d_{2,3}^4$ в МПС D^4 занижен на одно деление шкалы, т.е. проявляются такие личные качества эксперта, как оптимизм и пессимизм, выражаемые в склонности к незначительному (на одно деление шкалы) завышению или занижению реальных значений. Такие МПС в дальнейшем будем называть смещенными МПС.

Веса $w^1 - w^4$ альтернатив, вычисленные известным методом анализа иерархий [1–3] по МПС $D^1 - D^4$:

$$w^1 = (0{,}444,\ 0{,}222,\ 0{,}111,\ 0{,}222), \quad w^2 = (0{,}462,\ 0{,}231,\ 0{,}077,\ 0{,}231),$$

$$w^3 = (0{,}545,\ 0{,}273,\ 0{,}091,\ 0{,}091), \quad w^4 = (0{,}500,\ 0{,}250,\ 0{,}125,\ 0{,}125),$$

отличаются между собой и от реальных весов w^{real}. Различие в построенных МПС $D^1 - D^4$ и, следовательно, в полученных весах $w^1 - w^4$ обусловлено шкалой, используемой для построения МПС (так, шкала не позволяет различить альтернативы a_2 и a_4 в МПС D^1 и D^2), и требованием полной согласованности МПС.

Таким образом, подтверждается утверждение, что полная согласованность экспертных оценок парных сравнений не может быть признаком их истинности.

В данной работе ставится задача — разработать метод оценивания неопределенности, которая присутствует в МПС и обусловлена используемой шкалой Саати и возможными ошибками эксперта при выполнении парных сравнений вследствие таких личных качеств эксперта, как пессимизм и оптимизм.

2. Метод оценивания неопределенности экспертных оценок парных сравнений при вычислении весов альтернатив решений

В основу предлагаемого метода при вычислении весов альтернатив решений по заданной экспертом МПС $D_{n\times n} = \{d_{ij} \mid i,\ j = 1,\ldots,n\}$ положено утверждение, что эта МПС только в некоторой степени отражает реальные отношения весов альтернатив и содержит неопределенность независимо от уровня ее согласованности.

Предположим, что задача вычисления весов на основании МПС содержит следующие виды неопределенности.

1. Неопределенность, вносимую шкалой, в которой эксперт выполняет оценивание. С теоретической точки зрения, чем большее количество делений имеет шкала, тем более точными могут быть оценки. Однако на практике вследствие психофизиологических особенностей человека не рекомендуется использовать шкалу, содержащую более девяти делений [16]. От выбранной шкалы (числа ее делений) зависит, очевидно, количество объектов, которые могут быть в ней различимы.

2. Второй вид неопределенности обусловлен возможными ошибками эксперта при выполнении парных сравнений и его личными качествами, такими как оптимизм/пессимизм. Ошибочность оценок не связываем с понятием их согласованности: как показано выше в примере 1, согласованные оценки парных сравнений также могут содержать ошибки.

Для количественного оценивания неопределенности описанных выше видов, в дальнейшем будем называть ее неопределенностью экспертных оценок, и построения доверительных интервалов для весов альтернатив в работе предлагается метод, использующий аппарат теории доверия (свидетельств) [17, 18].

2.1. Основные понятия теории доверия. Рассмотрим основные понятия теории доверия, приведенные в [19]. Пусть Θ — конечное множество. Возможными гипотезами в теории доверия являются все возможные подмножества множества Θ. Базовым распределением доверия называется функция $m : 2^{\Theta} \to [0, 1]$, определенная на подмножествах Θ и удовлетворяющая аксиомам: $m(\varnothing) = 0$ и $\sum_{B \in 2^{\Theta}} m(B) = 1$.

Значение доверия $m(\Theta)$ к множеству Θ показывает уровень неопределенности.

Функция доверия $Bel : 2^{\Theta} \to [0, 1]$ определяется следующими аксиомами: $Bel(\varnothing) = 0$, $Bel(\Theta) = 1$ и $Bel(A) + Bel(\neg A) \le 1$. Величина $Bel(A)$ вычисляется как сумма базовых доверий по всем подмножествам A: $Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$ и показывает полное доверие к гипотезе $A \subseteq \Theta$. Величина $Bel(\neg A)$ показывает уровень сомнения в гипотезе A и вычисляется по формуле $Bel(\neg A) = \sum_{\substack{B \subseteq \Theta \\ A \cap B = \varnothing}} m(B)$.

Функция правдоподобия $Pls : 2^{\Theta} \to [0, 1]$, где $Pls(A)$ показывает величину максимального значения доверия, которое может быть по возможности назначено $A \subseteq \Theta$: $Pls(A) = 1 - Bel(\neg A)$.

Функции $Bel(A)$ и $Pls(A)$ интерпретируются как нижние и верхние вероятности появления гипотезы A в том смысле, что предполагается существование некоторой истинной вероятности $p(A)$ появления гипотезы A, такой что $Bel(A) \le p(A) \le Pls(A)$. Интервал $[Bel(A), Pls(A)]$ называется доверительным интервалом.

Следующие два неравенства: $Bel(A) + Bel(\neg A) \le 1$ и $Pls(A) + Pls(\neg A) \ge 1$, $A \subseteq \Theta$, которые являются следствием приведенных выше определений, показывают главное отличие теории доверия от традиционного байесовского подхода, в котором вероятность $p(A)$ события A удовлетворяет условию $p(A) + p(\neg A) = 1$. В случае, когда каждое подмножество A состоит только из одного элемента, получим $Bel(A) = Pls(A) = m(A)$, следовательно, в этом случае выполняется $Bel(A) + Bel(\neg A) = 1$. Поэтому теорию доверия можно рассматривать как обобщение байесовской теории вероятности.

Для агрегирования независимых доверий относительно одних и тех же гипотез разработаны правила Демпстера, Ягера, Иганаки, дисконтирования доверий, Дюбуа–Прада и др. (сравнение и анализ этих правил можно найти, например, в [20]).

2.2. Вычисление показателя неопределенности в задаче нахождения весов альтернатив с использованием теории доверия и результатов моделирования. Пусть $D_{n\times n} = \{d_{ij} \,|\, i, j = 1,..., n\}$ — построенная на основании экспертных оценок МПС альтернатив решений $a_1, a_2,..., a_n$. При решении задачи вычисления весов альтернатив на основе МПС с использованием теории доверия рассмотрим следующие гипотезы:

• одноэлементные множества $\{a_1\}, \{a_2\},..., \{a_n\}$ включают отдельные альтернативы решений;

• множество $A = \{a_1, a_2,..., a_n\} = \Theta$ включает все альтернативы решений.

Базовые доверия $m_i = m(\{a_i\})$ к альтернативам соответствуют весам альтернатив, а базовое доверие $m(\Theta)$ к множеству, содержащему все альтернативы, как доверие к гипотезе, что все альтернативы неразличимы экспертом или имеют одинаковую важность для эксперта, предлагается использовать для выражения уровня неопределенности экспертных оценок в задаче вычисления весов.

Базовое доверие к альтернативе a_i определим следующим образом:

$$m_i = \frac{v_i}{\sum_{j=1}^{n} v_j + X}, \quad i = 1,..., n, \tag{1}$$

где $v_i > 0$ — ненормированный вес a_i, вычисленный на основе МПС одним из известных методов анализа иерархий: главного собственного вектора EM, геометрической средней RGMM или др., $X > 0$ — ненормированный показатель уровня неопределенности экспертных оценок.

Значение базового доверия ко всему множеству альтернатив — нормированный показатель уровня неопределенности экспертных оценок — определим

$$m_\Theta = \frac{X}{\sum_{j=1}^{n} v_j + X}. \tag{2}$$

Выполняется равенство $\sum_i m_i + m_\Theta = 1$.

Показатель X определим как некоторый процент от суммы $\sum_j v_j$ всех весов следующим образом:

• если экспертные оценки полностью согласованы, то $X = X_1 = k_1 \sum_{j=1}^{n} v_j$, где параметр $k_1 \in (0, 1)$ моделирует неопределенность, которую вносит шкала Саати, а также неопределенности вследствие личных качеств эксперта, таких как пессимизм и оптимизм;

• если в экспертных оценках присутствует несогласованность, то уровень неопределенности X_1 увеличивается мультипликативно в соответствии со значением показателя согласованности (ПС) МПС, взятым с некоторым коэффициентом $k_2 > 0$: $X = X_1(1 + k_2 \cdot \text{ПС})$.

Таким образом,

$$X = X_1 = k_1 \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot (1 + k_2 \cdot \text{ПС}), \tag{3}$$

где $k_1 \in (0, 1)$, $k_2 > 0$, $\text{ПС} \geq 0$.

Тогда значение базового доверия к альтернативе a_i равно

$$m_i = \frac{v_i}{(1 + k_1 \cdot (1 + k_2 \cdot \text{ПС})) \sum_{j=1}^{n} v_j}, \tag{4}$$

а нормированный показатель уровня неопределенности экспертных оценок —

$$m_\Theta = \frac{k_1 \cdot (1 + k_2 \cdot \text{ПС})}{1 + k_1 \cdot (1 + k_2 \cdot \text{ПС})}, \quad i = 1, ..., n. \tag{5}$$

Если МПС полностью согласованна, то значения базовых доверий $m_i = \frac{v_i}{(1 + k_1) \sum_{j=1}^{n} v_j}$ к альтернативам уменьшаются, а значение показателя неопределенности $m_\Theta = \frac{k_1}{1 + k_1}$ увеличивается с ростом параметра k_1.

Доверие *Bel* к одноэлементному множеству совпадает со значением базового доверия к нему, поэтому доверие к $\{a_i\}$ равно $Bel(\{a_i\}) = m_i$. Правдоподобие для $\{a_i\}$: $Pls(\{a_i\}) = m_i + m_\Theta$. Таким образом, доверительный интервал для альтернативы a_i:

$$[Bel_i, Pls_i] = [m_i, m_i + m_\Theta]. \tag{6}$$

Проведем сравнение со значением $w_i = v_i / \sum_j v_j$ локального веса альтернативы в традиционном методе анализа иерархий. Выполняется неравенство $m_i < w_i < m_i + m_\Theta$, где m_i и m_Θ вычисляются по (1) и (2) соответственно, поэтому получаем следующее утверждение.

Утверждение 1. Локальный вес альтернативы a_i в известном методе анализа иерархий [1–3] всегда содержится в доверительном интервале (6).

Рассмотрим предельный случай: шкала, в которой эксперт выполняет парные сравнения — это множество положительных вещественных чисел R_+^n. Тогда элементы МПС, построенной на основании экспертных оценок в этой шкале, $d_{ij} \in R_+^n$. Для такой шкалы справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть $v^{real} \in R_+^n$ — вектор ненормированных весов *n* альтернатив, $D = \left\{ d_{ij} = \frac{v_i^{real}}{v_j^{real}} \middle| i, j = 1, ..., n \right\}$ — МПС, $w^{real} = v^{real} / \sum_k v_k^{real}$, $I = \{[Bel_i, Pls_i] \,|\, i = 1, ..., n\}$ — доверительные интервалы (6) для весов альтернатив, вычисленные на основании МПС *D*. Тогда $w_i^{real} \in [Bel_i, Pls_i]$ для всех $i = 1, ..., n.$.

Доказательство. По построению МПС *D* полностью согласованна. Поэтому векторы $w = v / \sum_k v_k$ нормированных весов, где v вычислены на основании *D* разными методами парных сравнений (EM, RGMM и др.), совпадают между собой и совпадают с w^{real}: $w^{EM} = w^{RGMM} = w = w^{real}$.

Для согласованной МПС D вектор весов равен нормированному столбцу D:

$$w_i = \frac{d_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} d_{kj}} \text{ для любого } j = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Зафиксируем j — номер столбца D, $j = 1, \ldots, n$. Пусть вектор ненормированных весов $v = (d_{ij} \,|\, i = 1, \ldots, n)$. Тогда в доверительном интервале (6) величины

$$m_i = \frac{v_i}{\sum_{j=1}^{n} v_j + X} = \frac{d_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} d_{kj} + X}, \quad m_\Theta = \frac{X}{\sum_{j=1}^{n} v_j + X} == \frac{X}{\sum_{k=1}^{n} d_{kj} + X}.$$

Так как $w_i^{real} = w_i$, с учетом (7) и $X > 0$ получим неравенство $m_i < w_i^{real} < m_i + m_\Theta$, что и требовалось доказать.

Предлагается следующий подход к оцениванию значения параметра k_1 в (3)–(5) с использованием результатов компьютерного моделирования суждений экспертов.

2.3. Моделирование оценок эксперта-реалиста, пессимиста и оптимиста. Моделирование оценок эксперта-реалиста. Пусть парные сравнения проводятся экспертом-реалистом, т.е. неопределенность задачи обусловлена только используемой шкалой Саати. Пусть $v^{real} \in R_+^n$ — случайным образом сгенерированный вектор ненормированных весов [21], $w_i^{real} = v_i^{real} / \sum_k v_k^{real}$. Вычисляется МПС D^* (несмещенная МПС), которая наиболее близка к отношениям весов v_i^{real} / v_j^{real}, т.е. элемент d_{ij}^* этой МПС — это округленное к ближайшему делению шкалы Саати значение отношения v_i^{real} / v_j^{real}. Выполняется округление отношений $v_i^{real} / v_j^{real} \geq 1$ в соответствии с законами математики, когда это не приводит к конфликту (см. пример 2 ниже). Остальные значения МПС D^* вычисляются с учетом $d_{ji} = 1/d_{ij}$.

Моделирование проводится в общем случае для большого количества тестовых МПС D^* разных размерностей $n = 3, 4, 5, \ldots, 9$. Зафиксируем n. Пусть $w^{real}(l) \in R_+^n$ — случайным образом сгенерированный вектор реальных весов, $D^*(l)$ — соответствующая ему несмещенная МПС, l — номер эксперимента, $l = 1, \ldots, 10^5$. Рассматриваются значения норм отклонения $w^{real}(l)$ от вектора $w(l)$ вычисленных весов:

$$p_1(l) = \| w(l) - w^{real}(l) \|_\infty, \tag{8}$$

где $\| a \|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |a_i|$ — чебышевская норма, $w(l) = v(l) / \sum_k v_k(l)$, вектор $v(l)$ вычислен на основании $D^*(l)$ методом главного собственного вектора ЕМ [1–3], $l = 1, \ldots, 10^5$.

Параметр k_1 определим как некоторую функцию от p_1:

$$k_1 = f(p_1). \tag{9}$$

На рисунке представлены гистограммы распределений величины $p_1(l) = \| w(l) - w^{real}(l) \|_\infty$ для эксперта-реалиста при n=3 (*а*), n=5 (*б*), n=7 (*в*), n=9 (*г*), полученные по результатам M=10^5 экспериментов. Эти гистограммы и значения величин эксцесса и асимметрии (рисунок) позволяют сделать вывод, что величина $p_1(l)$ (8) чебышевской нормы отклонений вычисленных весов от реальных весов для эксперта-реалиста при $n \geq 5$ имеет распределение, близкое к нормальному с параметрами, приведенными в табл. 1. В качестве оценки для параметра p_1, которая затем используется при вычислении k_1 (9) и далее — доверия $Bel_i(l) = m_i(l)$ (4), уровня неопределенности задачи $m_\Theta(l)$ (5) и правдоподобия $Pls_i(l) = m_i(l) + m_\Theta(l)$, предлагается использовать значение

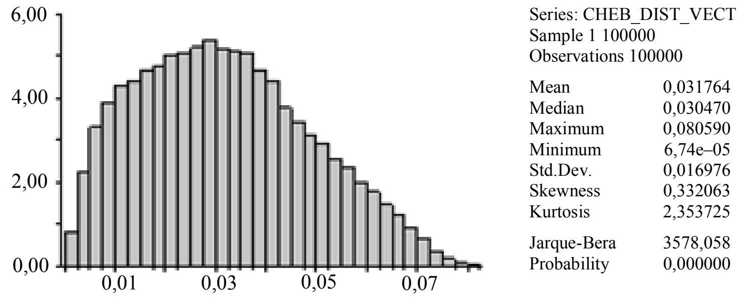
$$\hat{p}_1^{0,90} = \hat{p}_1^{av} + 1{,}3\,\sigma(p_1), \qquad (10)$$

которое соответствует квантилю уровня 0,90.

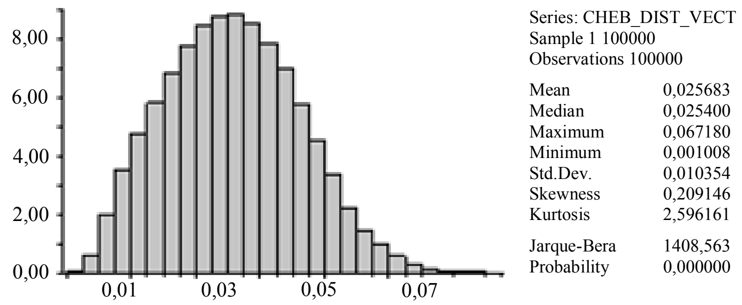
Таблица 1

n	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{p}_1^{av}$	0,032	0,029	0,026	0,021	0,017	0,014	0,012
$\sigma(p_1)$	0,017	0,013	0,010	0,009	0,006	0,005	0,004

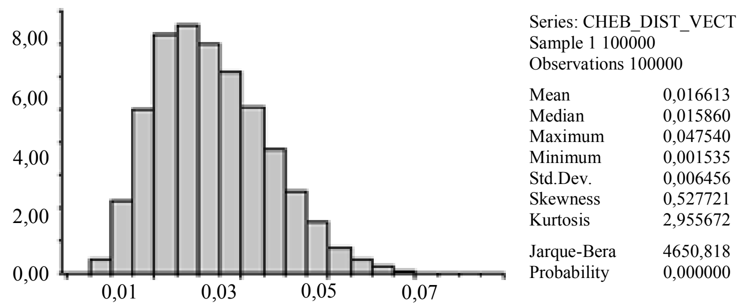
Запишем оценки значений параметра p_1 в равенстве (9) при вычислении доверительных интервалов для весов альтернатив (эксперт-реалист): $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; $\hat{p}_1 = \hat{p}_1^{0,90}$: 0,054, 0,046, 0,039, 0,033, 0,025, 0,021, 0,017.



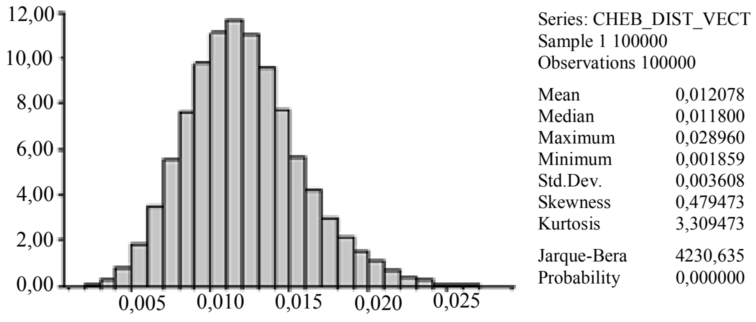
а



б



в



г

Эти значения оценивают неопределенность экспертных суждений в задаче вычисления весов альтернатив методом главного собственного вектора EM, когда эта неопределенность обусловлена используемой шкалой Саати. Как видно из значений, эта неопределенность уменьшается с ростом n.

2.4. Моделирование оценок эксперта-пессимиста и оптимиста. Компьютерное моделирование осуществляется аналогично предыдущему, за исключением того, что в каждом эксперименте после вычисления МПС $D^*(l)$ осуществляется ее смещение по следующим правилам:

- для оптимиста каждый элемент $1 \le d^*_{ij}(l) < 9$, $i \ne j$ случайным образом увеличивается на единицу (одно деление шкалы Саати) или остается неизменным: $d^{optim}_{ij}(l) = d^*_{ij}(l) + \Delta(l)$, где $\Delta(l)$ выбирается случайным образом из множества $\{0, 1\}$;
- для пессимиста каждый элемент $1 < d^*_{ij}(l) \le 9$ случайным образом уменьшается на единицу (одно деление шкалы Саати) или остается неизменным: $d^{pessim}_{ij}(l) = d^*_{ij}(l) + \Delta(l)$, где $\Delta(l)$ выбирается случайным образом из множества $\{0, -1\}$.

Далее на основании $D^{optim}(l)$ и $D^{pessim}(l)$ вычисляются значения чебышевских норм $p_1^{optim}(l)$ и $p_1^{pessim}(l)$ в соответствии с (8). Распределения величин $p_1^{optim}(l)$ и $p_1^{pessim}(l)$ близки к нормальному; гистограммы распределений и значения коэффициентов эксцесса и асимметрии аналогичны приведенным на рисунке для оценок эксперта-реалиста. Выборочные средние значения и стандартные отклонения для величин $p_1^{optim}(l)$ и $p_1^{pessim}(l)$ приведены в табл. 2. Оценки величины p_1 для эксперта-пессимиста и оптимиста вычисляются по формуле (10) и соответствуют квантилю уровня 0,90 (табл. 3).

Таблица 2

Эксперт-пессимист							
n	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{p}_1^{av}$	0,073	0,066	0,058	0,050	0,044	0,039	0,036
$\sigma(p_1)$	0,041	0,030	0,023	0,018	0,015	0,013	0,011
Эксперт-оптимист							
n	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{p}_1^{av}$	0,063	0,061	0,055	0,049	0,044	0,040	0,036
$\sigma(p_1)$	0,033	0,026	0,022	0,018	0,015	0,013	0,011

 ISSN 0572-2691

Таблица 3

n	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{p}_1^{pessim}$	0,126	0,105	0,088	0,073	0,064	0,056	0,050
$\hat{p}_1^{optim}$	0,106	0,095	0,084	0,072	0,064	0,056	0,050

Результаты табл. 2 и 3 показывают, что параметры распределений, как и оценки значений параметра p_1 для оценок эксперта-пессимиста и оптимиста, совпадают в пределах практической точности. Значения, приведенные в табл. 3, оценивают неопределенность экспертных оценок в задаче вычисления весов альтернатив методом главного собственного вектора EM, обусловленную такими личными качествами эксперта, как пессимизм и оптимизм, и используемой шкалой Саати. Эта неопределенность уменьшается с ростом n.

Пример 2. Для вектора весов $w^{real} = (0{,}45;\, 0{,}25;\, 0{,}10;\, 0{,}20)$ из примера 1 несмещенная МПС равна

$$D^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1/2 & 1 & 3 & 1 \\ 1/5 & 1/3 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Конфликт имеет место, например, для $w^{real} = (0{,}42;\, 0{,}28;\, 0{,}10;\, 0{,}20)$. В этом случае ближайшее к отношению $w_2^{real} / w_4^{real} = 1{,}4$ деление шкалы Саати равно единице, $d_{24} = 1$ и соответственно $d_{42} = 1$ (назовем это первым вариантом приведения к шкале Саати). Если же рассматривать обратно симметричное отношение $w_4^{real} / w_2^{real} = 0{,}7$, то ближайшее к нему деление шкалы равно 1/2, следовательно, $d_{42} = 1/2$ и $d_{24} = 2$ (второй вариант приведения к шкале Саати).

Исследуя средние по всем экспериментам значения нормы (8) для первого и второго вариантов приведения отношений v_i^{real} / v_j^{real} к шкале Саати, приходим к выводу, что в вычисленных весах меньше ошибок при втором варианте, который и используется в данной работе в случае возникновения конфликта при построении МПС $D^*(l)$.

Пример 3. Для иллюстрации результатов вычислим доверительные интервалы для МПС $D^1 - D^4$ из примера 1 при условии, что функция f в равенстве (9) принимает вид $k_1 = n \cdot p_1$. Значение $p_1 = 0{,}046$ для МПС D^1 и D^2, заданных экспертами-реалистами. Значение $p_1 = 0{,}095$ для МПС D^3 и D^4, заданных экспертами-оптимистами. Ненормированные веса v_i альтернатив a_i вычислим методом главного собственного вектора EM. В соответствии с (6) вычислим значения доверий $Bel_i(D^j)$ и правдоподобий $Pls_i(D^j)$ для весов альтернатив a_i (табл. 4).

Таблица 4

МПС	Значения доверий $Bel_i(D^j)$ и правдоподобий $Pls_i(D^j)$								m_Θ
	a_1		a_2		a_3		a_4		
	Bel	*Pls*	*Bel*	*Pls*	*Bel*	*Pls*	*Bel*	*Pls*	
	0,45		0,25		0,10		0,20		
МПС D^1	0,376	0,531	0,188	0,343	0,094	0,249	0,188	0,343	0,155
МПС D^2	0,390	0,545	0,195	0,350	0,065	0,220	0,195	0,350	0,155
МПС D^3	0,395	0,670	0,198	0,473	0,066	0,341	0,066	0,341	0,275
МПС D^4	0,363	0,637	0,181	0,456	0,091	0,366	0,091	0,366	0,275

Результаты табл. 4 позволяют сделать следующие выводы.

1. Реальные веса $w^{real} = (0{,}45,\ 0{,}25,\ 0{,}10,\ 0{,}20)$ содержатся во всех соответствующих интервалах: $w_i^{real} \in [Bel_i(D^j), Pls_i(D^j)]$, $i = 1,..., 4$, $j = 1,..., 4$.

2. Реальный вес w_3^{real} альтернативы a_3 практически равен значению доверия $Bel_3(D^1)$, вычисленного на основании МПС D^1 (левому концу доверительного интервала). Также для альтернативы a_4 значение w_4^{real} практически равно значению доверия $Bel_4(D^2)$, вычисленного на основании МПС D^2 (левому концу доверительного интервала). Аналогично для альтернативы a_3 значение w_3^{real} практически равно значению доверия $Bel_3(D^4)$, вычисленного на основании МПС D^4. Поэтому полученные в табл. 4 значения m_Θ неопределенности для данного примера обоснованны.

3. Значения показателя неопределенности m_Θ для МПС D^3 и D^4 превышают значения m_Θ для МПС D^1 и D^2, так как кроме неопределенности, которую вносит используемая шкала Саати, в МПС D^3 и D^4 присутствует неопределенность вследствие факторов пессимизм/оптимизм.

Заключение

В настоящей работе рассмотрена задача вычисления весов альтернатив решений на основе экспертных суждений парных сравнений альтернатив в шкале Саати. Предполагается, что эти суждения только в некоторой степени отражают реальные отношения весов альтернатив и содержат неопределенность независимо от уровня их согласованности. Сделана попытка моделирования суждений эксперта-реалиста, неопределенность которых обусловлена только используемой шкалой Саати, а также экспертов-пессимиста и оптимиста, в суждениях которых присутствует дополнительная неопределенность, обусловленная этими личными качествами эксперта. Компьютерное моделирование позволило получить количественные оценки неопределенности суждений эксперта-реалиста, пессимиста и оптимиста в задаче вычисления весов методом главного собственного вектора парных сравнений в шкале Саати. Используя аппарат теории доверия (свидетельств), предлагается общий показатель неопределенности экспертных оценок рассматриваемой задачи вычисления весов, обусловленной указанными выше факторами неопределенности.

Дальнейшие исследования будут направлены на конкретизацию вида функции (9) при определении параметра k_1, а также определение весового коэффициента k_2 уровня несогласованности экспертных оценок. Предполагается целесообразным в дальнейшем оценивать эти параметры по результатам компьютерного моделирования, исходя из условия, чтобы не менее чем в 90 % экспериментов все координаты реального вектора весов содержались в своих доверительных интервалах (6).

Н.І. Недашківська

МЕТОД ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ЕКСПЕРТНИХ ОЦІНОК ПАРНИХ ПОРІВНЯНЬ ПРИ ОБЧИСЛЕННІ ВАГ АЛЬТЕРНАТИВ РІШЕНЬ

Запропоновано метод оцінювання невизначеності експертних оцінок парних порівнянь в задачі обчислення ваг альтернатив рішень, коли невизначеність обумовлена шкалою Сааті, в якій виконується оцінювання, а також такими якостями експерта, як песимізм/оптимізм. Показано, що повна узгодженість експертних оцінок парних порівнянь не може бути ознакою їх істинності. Тому в основу запропонованого методу покладено твердження, що експертні оцінки парних порівнянь тільки частково відображають реальні відношення ваг альтернатив і містять невизначеність незалежно від рівня їх узгодженості. Використовуючи апарат теорії довіри (свідчень) і результати комп'ютерного моделювання, визначається загальний показник невизначеності експертних оцінок парних порівнянь, яка спричинена шкалою Сааті та особистими якостями експерта. Цей показник невизначеності використовується у подальшому для обчислення довірчих інтервалів для відносних ваг альтернатив рішень, які більш достовірно, порівняно з точковими вагами, відображають відносну важливість альтернатив.

N.I. Nedashkovskaya

METHOD FOR EVALUATION OF EXPERT PAIRWISE COMPARISON JUDGEMENTS UNCERTAINTY WHEN CALCULATING DECISION ALTERNATIVES' WEIGHTS

Method for evaluation of expert pairwise comparison judgements uncertainty when solving the problem of decision alternatives weights calculation is supposed in the paper. This uncertainty is caused by the Saaty's evaluation scale and such expert qualities as pessimism/optimism. It is shown that total consistency of expert pairwise comparison judgments can't be indication of their truth. Therefore proposed method is based on the statement that expert pairwise comparison judgments reflect real ratios of decision alternative weights only to a certain extent and contain uncertainty regardless of their consistency level. Using the theory of trust (evidence) and results of a computer modeling, the general index of expert pairwise comparison judgments uncertainty is defined when this uncertainty is caused by the Saaty's evaluation scale and personal expert qualities. The general index is subsequently used to calculate confidence intervals for decision alternatives' relative weights, which reflect alternatives' importance more reliably in comparison with the point weights.

1. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий. — М. : Радио и связь, 1993. — 320 с.
2. *Саати Т.Л.* Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети. Изд. 2-е. — М. : ЛИБРОКОМ, 2009. — 360 с.
3. *Панкратова Н.Д., Недашківська Н.І.* Моделі і методи аналізу ієрархій: Теорія. Застосування. — Київ: Політехніка, 2010. — 371 с.
4. *Тоценко В.Г.* Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. — Киев : Наук. думка, 2002. — 381 с.
5. *Ногин В.Д.* Упрощенный вариант метода анализа иерархий на основе нелинейной свертки критериев // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2004. — **44**, № 7. — С. 1261–1270.
6. *Macharis C., Springael J., Brucker K.D., Verbeke A.* PROMETHEE and AHP: The design of operational synergies in multicriteria analysis. Strenhthening PROMETHEE with ideas of AHP // European Journal of Operational Research. — 2004. — **153**, N 2. — P. 307–317.
7. *Beynon M.J.* DS/AHP method: A mathematical analysis, including an understanding of uncertainty // Ibid. — 2002. — **140.** — P. 148–164.
8. *Beynon, M.J.* Reflections on DS/AHP: Lessons to be learnt // Belief Functions: Theory and Applications. Lecture Notes in Computer Science. — 2014. — **8764**. — P. 95–104.
9. *Wang Y.M., Chin K.S.* A linear goal programming priority method for fuzzy analytic hierarchy process and its applications in new product screening // International Journal of Approximate Reasoning. — 2008. — **49**, N 2. — P. 451–465.

10. *Wang J., Lan J., Ren P., Luo Y.* Some programming models to derive priority weights from additive interval fuzzy preference relation // Knowledge-Based Systems. — 2012. — **27**. — P. 69–77.
11. *Durbach I., Lahdelma R., Salminen P.* The analytic hierarchy process with stochastic judgements // European Journal of Operational Research. — 2014. — **238**, N 2. — P. 552–559.
12. *Hahn E.D.* Decision making with uncertain judgments: a stochastic formulation of the analytic hierarchy process // Decision Sciences. — 2003. — **34**, N 3. — P. 443–466.
13. *Павлов А.А., Лищук Е.И., Кут В.И.* Математические модели оптимизации для обоснования и нахождения весов объектов в методе парных сравнений // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2007. — № 2. — С. 13–21.
14. *Циганок В.В.* Метод обчислення ваг альтернатив на основі результатів парних порівнянь, проведених групою експертів // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2008. — **10**, № 2. — С. 121–127.
15. *Pankratova N., Nedashkovskaya N.* The method of estimating the consistency of paired comparisons // Information Technologies and Knowledge. — 2013. — **7**, N 4. — P. 347–361.
16. *Saaty T.L., Ozdemir M.S.* Why the magic number seven plus or minus two // Mathematical and Computer Modelling. — 2003. — **38**, N 3–4. — P. 233–244.
17. *Dempster A.P.* A generalization of Bayesian inference (with discussion) // Journal of the Royal Statistical Society Ser. B. — 1968. — **30**. — P. 205–247.
18. *Shafer G.* A Mathematical theory of evidence. — New York: Princeton University Press, — 1976. — 314 p.
19. *Недашковская Н.И.* Принятие решений по многим критериям при неполных экспертных оценках на базе метода анализа иерархий и теории Демпстера-Шафера // Наукові праці. Науково-методичний журнал Миколаївського державного гуманітарного університету ім. Петра Могили. Серія «Комп'ютерні технології». — 2010. — **143**, вип. 130. — С. 6–14.
20. *Pankratova N., Nedashkovskaya N.* Estimation of sensitivity of the DS/AHP method while solving foresight problems with incomplete data // Intelligent Control and Automation. — 2013. — **4**, N 1. — P. 80–86.
21. *Недашковская Н.И.* Сравнительный анализ методов парного экспертного оценивания альтернатив решений // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2014. — № 4. — С. 35–44.

Получено 19.01.2015
После доработки 23.05.2015