

ДИСКРЕТНЫЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Введение

В теории сигналов давно практикуется разложение сигналов в непрерывный и дискретный спектры, в первом случае привлекается аппарат интегрального исчисления, во втором — суммы ряда гармонических функций Фурье.

В теории непрерывных динамических систем дискретная форма спектральной характеристики системы не сложилась, понятие дискретной частотной характеристики (ДЧХ) отсутствует. Пояснить данное обстоятельство можно тем, что на ограниченном интервале времени элементарные гармоники, проходящие через систему, помимо вынужденной составляющей, возбуждают функции свободного движения системы. Таким образом, выходной сигнал системы, если его разложить по тем же самым гармоникам, что и входной, не обнаруживает простой преобладанности, свойственной описаниям действия гармонических сигналов на бесконечном или полубесконечном интервалах.

Выход из этого положения, для систем, описываемых оператором свертки, предложен в работах [1, 2]. В них показано, что для любого наперед заданного интервала времени $(0, T)$, можно указать не гармонику, а некоторые алгебраические суммы гармоник (полигармонический сигнал), отличающиеся от прочих сигналов тем, что возбуждаемые компонентами набора свободные составляющие компенсируют один другого. Частоты дискретны, поскольку компенсация возможна только при определенных частотах. У каждой системы — свой набор частот. Отмеченное качество реализуется и наглядно видно в примерах, если рассматривать входной или выходной сигналы системы в инверсном времени. Такая сумма гармоник может интерпретироваться как аналог гармонического сигнала, действующего на конечном интервале времени.

Настоящая статья посвящена изучению спектральных характеристик оператора свертки на конечном интервале времени $(0, T)$. Предпочтение отдается частотному подходу в сочетании с предложенным в [1] флип-методом.

Расчет дискретной частотной характеристики

Реакция линейной динамической системы при нулевом векторе начального состояния описывается линейным оператором свертки S . Он характеризует отображение множества входных сигналов, воздействующих на систему на интервале времени $(0, T)$, во множество выходных сигналов, рассматриваемых на том же интервале. Такой оператор отвечает режиму работы систем в реальном времени, типичному для большинства задач теории автоматического управления и теории электрических цепей. С помощью оператора свертки S линейный стационарный объект описывается выражением

$$y(t) = Su(t) = \int_0^t q(t - \tau)u(\tau)d\tau, \quad (1)$$

где $q(t)$ — импульсная весовая функция; $u(t)$, $y(t) \in L_2(0, T)$ — входные и выходные скалярные сигналы, определенные на ограниченном интервале $t \in (0, T)$.

Для непрерывной импульсной весовой функции возможна процедура перехода к ганкелевому оператору, для которого сингулярные числа и собственные векторы (пара Шмидта) определяют его частотные характеристики. В дискретной матричной форме выражение (1) представим ее дискретной аппроксимацией $y = Qu$, где векторы

$$u(t) = [u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_N)]^T \text{ и } y(t) = [y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_N)]^T \quad (2)$$

содержат выборки входного и выходного сигналов, взятые с шагом $\Delta t_0 = 0$, $t_N = T$, $\Delta = T/N$. Ненулевые элементы матрицы Сильвестра Q пропорциональны отсчетам импульсной весовой функции $q(t)$

$$Q = \begin{bmatrix} q(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ q(t_1) & q(t_0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q(t_N) & q(t_{N-1}) & \dots & q(t_0) \end{bmatrix} \Delta. \quad (3)$$

В этом случае оператор свертки представлен нижнетреугольной матрицей Q с одинаковыми элементами на каждой из диагоналей. Тем самым матрица Q является теплицевой.

Метод расчета ДЧХ базируется на том, что оператор свертки в дискретной матричной форме имеет теплицевую структуру и легко симметрируется инверсией входного или выходного сигнала во времени. Инверсия не нарушает линейности, зато оператор системы преобразуется к ганкелевому виду. Здесь особо подчеркнем, что собственные числа ганкелевой матрицы равны по модулю сингулярным числам связанной с ней теплицевой матрицы [2, 5]. Собственные числа ганкелевой матрицы — это и есть ДЧХ. Заметим, что знаки собственных значений для ДЧХ играют роль фазовой характеристики.

Ганкелев оператор никоим образом не связан с разделением интервалов времени подачи воздействия и реакции на него [3]. Спектр такого ганкелева оператора дискретен, но не ограничен порядком динамической системы, его можно найти тривиальным обращением к процедуре поиска собственных значений [4]. Соответствующие представления для оператора свертки в дискретной матричной форме (3) имеют следующий вид [1]:

$$Q = H_1 F = F H_2, \quad (4)$$

где H_1 и H_2 — симметричные операторы ганкелева типа, F — флип-матрица.

Таким образом, технически реализацию указанных ганкелевых операторов можно осуществить, добавляя к входу или к выходу динамической системы блок, реализующий оператор зеркального отображения функции во времени относительно середины временного интервала $(0, T)$. Этот блок — флип-матрица F [1, 4].

Флип-матрица обладает рядом специальных свойств: она симметрична $F = F^*$, ортогональна $F^* = F^{-1}$ и инволютивна $F^2 = E$, где E — тождественный оператор. Отсюда вытекает, что собственные числа флип-матрицы вещественны и по модулю равны единице, т.е. ее спектр сосредоточен в точках ± 1 .

Известно, что на множестве линейных систем системы S_1 и S_2 изометрически эквивалентны, если их операторные нормы совпадают [1]. Введенное таким образом отношение обладает свойствами симметричности, рефлексивности и транзитивности, т.е. является отношением эквивалентности $S_1 \approx S_2 \Leftrightarrow \|S_1\| = \|S_2\|$. Например, в силу своей изометричности флип-матрица не меняет энергии преобразуемых сигналов, а также их классических норм.

Системы с операторами H_1 и H_2 изометрически эквивалентны системе S в смысле любой из операторных p -норм как в конечномерном пространстве R_n , так и бесконечномерных пространствах L_1, L_2, H_∞ . Более того, поскольку действие флип-матрицы сохраняет форму непрерывных сигналов с точностью до зеркального отображения, у этих трех операторов будут совпадать и входные сигналы, на которых достигаются эти нормы. Это означает, что для решения задач, связанных с отысканием норм операторов и экстремальных сигналов, на которых достигаются нормы, можно вместо оператора свертки S использовать симметричные операторы H_1, H_2 , более просто устроенные с точки зрения классической теории операторов. Изометрическая эквивалентность операторов H_1, H_2 и S свидетельствует о том, что сингулярные числа оператора свертки совпадают с собственными числами симметрированных операторов [5].

С другой стороны, в линейной алгебре и теории операторов существуют мультипликативная и аддитивная процедуры выделения симметричных частей линейных операторов [6]. В них используется представление оператора в виде суммы симметричной и кососимметричной составляющих, а также полярное разложение. Наиболее глубокие результаты теории операторов получены для самосопряженных систем. Это объясняется тем, что они обладают высокой степенью симметрии, характеризуемой равенством $A = A^*$.

Многие операторы, возникающие при исследовании линейных динамических систем, не являются симметричными в указанном классическом смысле.

Мультипликативный подход к выделению симметричной части линейного оператора опирается на известное полярное разложение операторов согласно формуле

$$A = H_1 O_1 = O_2 H_2, \quad (5)$$

где A — исходный оператор, O_1 и O_2 — ортогональные операторы.

Указанные операторы могут быть найдены из соотношений

$$H_1^2 = AA^*; H_2^2 = A^*A; O_1 = H_1^{-1}A; O_2 = AH_2^{-1}. \quad (6)$$

Среди различных полярных разложений теплицевых матриц есть одно особенно простое. Структура его ясна из следующего утверждения [1].

Утверждение. Любая вещественная теплицева матрица может быть представлена в виде произведения ганкелевой (симметричной) и перестановочной матриц, причем ганкелева получается вращением теплицевой на 90° , а перестановочная — вращением единичной на 90° .

Алгоритм, определяемый этим утверждением, будем использовать при расчете ДЧХ непрерывной линейной динамической системы.

Пример. Рассмотрим систему второго порядка (консервативное звено) с передаточной функцией $W(p) = 1/(p^2 + 1)$.

Рассчитаем для этого звена ДЧХ, используя матричную форму (3) для оператора свертки и полярное разложение (4)–(6) его теплицевой матрицы. Алгоритм расчета ДЧХ заключается в нахождении спектра (собственные числа) ганкелевого представления теплицевой матрицы Q .

В дальнейшем под собственной функцией (вектором) будем понимать входной сигнал, проходящий через флип с передаточной функцией $F(p)$ [1] и системе с передаточной функцией $W(p)$ без искажения, сохраняясь с точностью до масштабного коэффициента λ собственного числа.

Для получения собственных функций скалярной системы можно использовать несколько подходов. Первый подход справедлив для разнесенных интервалов времени

управления и реакции [3]. Алгоритм включает операции вычисления матрицы $W = W_c W_0$, ее собственных векторов и моделирования свободного движения исследуемой системы при различных начальных условиях; W_c — грамиан управляемости, W_0 — грамиан наблюдаемости. Второй подход (более универсальный относительно выбора интервалов) основывается на моделировании в реальном масштабе времени с помощью флип-метода на основе итерационного алгоритма, описанного в [4]. Рассмотрим метод математического моделирования для совмещенных интервалов.

Мультигармонический входной сигнал образуется взвешенной суммой гармоник с частотами — основной и сопряженной, отвечающими сечению амплитудно-частотной характеристики (АЧХ), линиями одинаковой высоты на уровне коэффициента усиления λ . Гармоники проходят с равным коэффициентом усиления, их частоты образуют искомые точки на оси частот, при которых входной сигнал проходит с входа на выход не искажаясь. Каждая точка на частотной характеристике отвечает своей гармонике. Точке на комплексной оси $p = j\omega$ отвечает, например, круговая гармоника вида $a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)$.

Для звена второго порядка основная и сопряженная частоты для λ определяются формулами

$$\omega_1 = (1 - 1/\lambda)^{1/2}, \quad \omega_2 = (1 + 1/\lambda)^{1/2}.$$

Собственные функции этого звена находим по выражению

$$f(t) = \sin(\theta_2) \sin(\omega_1 t + \theta_1) - \sin(\theta_1) \sin(\omega_2 t + \theta_2), \quad (7)$$

где фазы $\theta_1 = (\pi - \omega_1 T)/2$, $\theta_2 = -\omega_2 T/2$ учитывают условие нулевого начального состояния (выходной сигнал и его производная в стартовый момент равны нулю).

Если спектральные точки ДЧХ размещаются ниже статического коэффициента усиления, младшие собственные функции, помимо круговой гармоники, содержат гиперболические составляющие, для поиска которых потребуется срез комплексной частотной характеристики вдоль вещественной оси. Потребность в них невелика, поскольку точек ДЧХ — бесконечное множество, и наибольший интерес представляет главная собственная функция, описываемая заметно проще и зависящая, наравне с соседними младшими собственными функциями, от парных частот. Отметим, что главное собственное значение (выделяющееся по амплитуде $|\lambda|$) может иметь как положительное, так и отрицательное значение. Знак зависит от протяженности интервала, он может меняться.

В табл. 1 приведены сопряженная $\bar{\omega}_n$ и основная ω_n (одна из частот выбрана опорной) и частоты для ряда собственных чисел динамической системы, отвечающих интервалу времени (0, 10) с.

Таблица 1

$ \lambda $	3,914	3,221	1,311	1,143
$\bar{\omega}_n$	0,863	0,831	0,486	0,351
ω_n	1,121	1,145	1,321	1,371

В табл. 2 приведены амплитуды A_n , определяемые модулями собственных значений, и соответствующие им частоты (основные частоты ω_n) десяти первых точек ДЧХ для интервала времени (0, 10) с.

Таблица 2

A_n	3,914	3,221	1,311	1,143	0,796
ω_n	1,121	1,145	1,321	1,371	1,502
A_n	0,466	0,304	0,215	0,161	0,125
ω_n	1,773	2,071	2,376	2,685	3,000

На рис. 1 приведен нанесенный на АЧХ дискретный частотный спектр консервативного звена с сопряженными точками на резонансном пике (данные из табл. 1 и 2). Из рисунка видно, что на конечном интервале длительностью 10 с на резонансном пике имеется ряд сложносоставных гармоник.

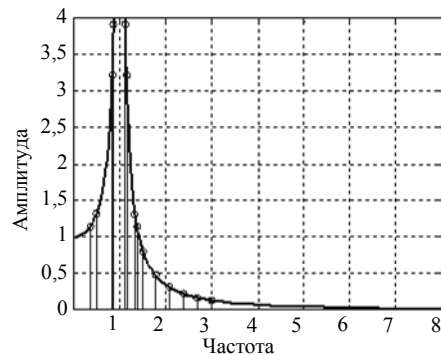


Рис. 1

Главному собственному значению (первой колонке таблиц) отвечает максимальный амплитудный коэффициент усиления 3,914, достижимый динамической системой на интервале в 10 с. Как видно, такой расчет заметно конкретнее и точнее абстрактной оценки, получаемой для бесконечного или полубесконечного интервала времени.

Таким образом, опираясь на ДЧХ, мы можем давать реальную оценку, качественно и количественно отличающуюся от результатов прежней теории в лучшую, более прагматичную сторону. При этом первые четыре собственные функции динамической системы предпочтительнее прочих своим более простым описанием, и среди них главная — собственная функция, соответствующая максимальному $|\lambda|$, представляющая собой альтернативу импульсной и весовой характеристик звена для конкретного интервала времени.

Вид неискажаемого входного сигнала (сплошная кривая), отвечающего максимальному собственному числу, приведен на рис. 2. Для проверки рядом вычислена и приведена реакция (главная собственная функция (7)) на входной сигнал (штриховая линия). Реакция совпадает с входным сигналом по форме, но инверсна ему во времени. Напомним, что на флип F , предшествующий динамической системе, поступает неинвертированный сигнал (7), как раз инверсия во времени и входит в его основное предназначение.

Уменьшим в нашем исследовании временной интервал до 5 с и вычислим ДЧХ для этого интервала. На рис. 3 и 4 приведены соответственно ДЧХ и главная собственная функция консервативного звена для этого интервала времени.

ДЧХ оценивают последствия сокращения времени и способствуют осмысленному описанию резонансов.

Сформулируем общий вывод: собственные значения линейной динамической системы, равные сингулярным числам оператора свертки [1], образуют для рассматриваемого интервала длительности T дискретное множество, точки которого, взятые по амплитуде, расположены на классической непрерывной АЧХ. Чем протяженнее интервал T , тем плотнее линии ДЧХ.

Указанная закономерность нетривиальна и не повторяет во всех деталях соотношения дискретного и непрерывного спектров сигналов, известного в теории преобразования Фурье. В отличие от теории сигналов при переходе от бесконечного интервала времени к конечному спектр хотя и становится дискретным, но его отсчеты на оси частот изначально неравномерны и определяются спецификой звена (передаточной функцией).

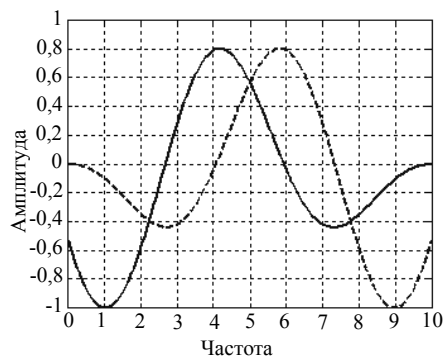


Рис. 2

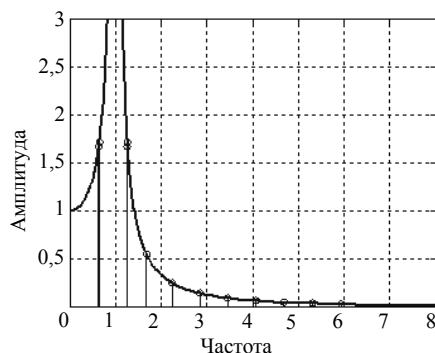


Рис. 3

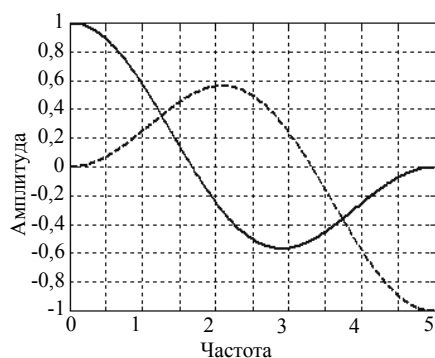


Рис. 4

Заключение

Классическая теория линейных динамических систем в значительной степени ориентирована на бесконечный или полубесконечный интервалы времени. Это касается аппарата частотных характеристик, преобразования Лапласа, фильтров Калмана, анализа устойчивости и других областей, где получено много полезных результатов. Однако на практике такой подход применим лишь для динамических систем, время работы которых значительно больше длительности переходных процессов.

Вместе с тем реальные системы часто работают на конечных интервалах времени, соизмеримых со временем переходных процессов системы. В таких условиях многие результаты классической теории перестают быть справедливыми или вообще теряют смысл. Это касается, например, вопросов устойчивости систем на конечном интервале времени, а также той роли, которые играют синусоидальные гармонические сигналы в частотном анализе. Поэтому представляется важным изучение, во-первых, тех результатов и положений классической теории, которые сохраняются и на конечных интервалах времени (возможно, с частичной модификацией), во-вторых, изучение новых эффектов и свойств, которые здесь появляются.

В статье исследован один из аспектов этой теории, связанный с изучением спектральных характеристик оператора свертки на конечном интервале времени. Сингулярные функции оператора свертки совпадают с собственными векторами симметрированных операторов, которые изометрически эквивалентны оператору свертки. Они постулируются как собственные векторы (функции) динамической системы и могут быть получены набором разнообразных методов для каждого элементарного звена.

В настоящей работе использован метод математического моделирования для расчета спектральных характеристик, имеющих общие черты с частотным синтезом систем автоматического управления по АЧХ и ФЧХ. Исследована система второго порядка. Прикладное значение полученных результатов состоит в том, что сингулярные функции оператора свертки обладают рядом экстремальных свойств и могут быть полезны при решении задач оптимизации, например в спорте для решения задачи оптимизации техники движений [7]. Для поддержки работ и ознакомления с практикой и теорией динамических систем, работающих на конечном интервале времени, авторы создали ресурсы Интернет [7, 8].

М.О. Балонін, В.С. Суздаль, О.В. Соболев

ДИСКРЕТНІ ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПЕРЕРВНИХ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Досліджено один з аспектів теорії лінійних динамічних систем, пов'язаний з вивченням спектральних характеристик оператора згортки на кінцевому інтервалі часу. Прикладне значення отриманих результатів в тому, що сингулярні функції оператора згортки мають ряд екстремальних властивостей та можуть бути корисні при вирішенні задач оптимального керування.

N.A. Balonin, V.S. Suzdal, A.V. Sobolev

THE DISCRETE FREQUENCY RESPONSES OF CONTINUOUS LINEAR SYSTEMS

One aspect of linear dynamical system theory with the study of the spectral responses of the convolution operator on a finite time interval is considered. The practical significance of the result is that singular functions of the convolution operator have extreme properties and may be useful for solving optimal control problems.

1. Балонин Н.А. Компьютерные методы анализа линейных динамических систем: Дис. ... д-ра техн. наук. — СПб: — 2008. — 400 с.
2. Балонин Н.А., Мироновский Л.А. Спектральные характеристики линейных систем на ограниченном интервале времени // Автоматика и телемеханика. — 2002. — № 6. — С. 3–22.
3. Glover K. All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L-error bounds // Intern. J. Control. — 1984. — **39**, N 6. — P. 1115–1193.
4. Балонин Н.А., Мироновский Л.А. Флип-метод определения сингулярных функций ганкелева оператора и оператора свертки // Автоматика и телемеханика. — 1999. — № 11. — С. 3–18.
5. Балонин Н.А. Сингулярные функции линейных динамических систем. — Lambert: Academic Publishing, 2011. — 112 с.
6. Балонин Н.А. Линейные операторы динамической системы // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 11. — С. 57–68.
7. Balonin N.A. Finite time interval dynamic system, available at. — <http://mathscinet.ru/systems/finite/> (accessed 5 november 2014).
8. Балонин Н.А., Суздаль В.С. Эмулятор системы Чохральского. <http://mathscinet.ru/crystals/czochralski/> (accessed 5 november 2014).

*Получено 28.01.2015
После доработки 20.04.2015*