

МЕТОДЫ АНАЛИЗА ДАННЫХ И ПРОБЛЕМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ТРАЕКТОРИЙ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН

Введение

Задачи определения траекторий уединенных волн по результатам их наблюдений в отдельные моменты времени представляют интерес при изучении процессов распространения солитоноподобных возмущений в различных средах. В частности, на основании численного моделирования уединенных волн, движущихся в анизотропной упругой среде, в работе [1] предложены подходы к построению соответствующих траекторий, базирующиеся на решении систем моментных соотношений. При этом рассматривался случай существования одной уединенной волны. Методы решения соответствующих систем, а также постановки задач можем найти в работах М.Г. Крейна, А.А. Нудельмана, в частности в [2], восходящих к работам П.Л. Чебышева и А.А. Маркова.

В случае одновременного существования нескольких уединенных волн возникают новые задачи, в частности задача группировки данных наблюдений, относящихся к траектории одной уединенной волны. При построении соответствующих систем моментных соотношений, решения которых позволяют определять параметры траекторий уединенных волн, особое значение принимают вопросы их совместности, которые более детально рассматриваются в данной работе.

Специфика решаемой задачи в нашем случае заключается в предположении одновременного существования нескольких уединенных волн, движущихся в некоторой ограниченной области пространства и не известно, какие именно наблюдаемые точки принадлежат одной и той же траектории уединенной волны.

Модель и постановка задачи

В ряде работ, в частности в [3, 4], предложено находить решения систем дифференциальных уравнений в частных производных, моделирующих процессы распространения уединенных волн, в виде

$$(u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)})^T = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))^T W(x, t), \quad (1)$$

где $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)}$ — возмущения по соответствующим координатам в декартовой системе, $W(x, t) = \exp(-\mu(x, \tilde{x}(t))/\varepsilon)$, $\mu(a, b)$ — некоторая неотрицательная функция, $a, b \in R^n$ (в простейшем случае это функция меры, определенная на множестве интервалов $\{[a, b], a, b \in R^n\}$), $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)$ — функции, определяющие компоненты амплитуд соответствующих возмущений, ε — параметр, определяющий локализацию возмущения, $\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_n(t)$ — функции, определяющие координаты максимума возмущения в момент времени t . В таком случае под траекторией уединенной волны будем понимать множество вида $\{(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_n(t)), t \in [t_0, T], 0 \leq t_0 < T < \infty\}$. Вопросы генерации таких волн обсуждались, например, в работе [4]. В частности, в формуле (1) найден класс точных решений системы уравнений движения для анизотропной упругой среды.

© А.Я. БОМБА., Ю.В. ТУРБАЛ, 2015

Пусть в некотором фазовом пространстве $\Omega \subset R^2$ движется одновременно несколько уединенных волн вида (1) (в общем случае их количество неизвестно). В качестве информации задано некоторое множество вида $G_0 = \{(x_1, t_1), (x_2, t_2), \dots, (x_k, t_k)\}$, где $x_1, x_2, \dots, x_k \in R^2$ — точки наблюдений максимумов соответствующих возмущений, $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$ — соответствующие моменты времени (x_i принадлежит одной из траекторий). Можем считать, что моменты наблюдений t_1, t_2, \dots, t_k — случайные величины. В таком случае x_1, x_2, \dots, x_k — случайные векторы.

В работе ставится задача разработки алгоритма, позволяющего из множества точек наблюдений x_1, x_2, \dots, x_k выделять подмножества, принадлежащие траектории одной и той же уединенной волны. Соответствующий алгоритм строится, в частности, на основании метода проверки совместности систем моментных соотношений.

Исходя из результатов, приведенных в работах [1, 5], можем рассматривать траектории уединенных волн в классе кривых вида $r(\varphi) = \alpha_1 e^{-\mu_1 \varphi} + \alpha_2 e^{-\mu_2 \varphi} + \dots + \alpha_m e^{-\mu_m \varphi}$ (записаны в полярной системе координат), где $\alpha_j > 0$, $\mu_j > 0$, $j = \overline{1, m}$. Тогда точки наблюдений $x_{j_k} = r_{j_k} e^{i\varphi_{j_k}}$, $k = \overline{0, l}$, принадлежат соответствующей кривой, если выполняется система моментных соотношений:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \beta_1^{\varphi_0} + \alpha_2 \beta_2^{\varphi_0} + \dots + \alpha_m \beta_m^{\varphi_0} &= r_{j_0}, \\ \alpha_1 \beta_1^{\varphi_1} + \alpha_2 \beta_2^{\varphi_1} + \dots + \alpha_m \beta_m^{\varphi_1} &= r_{j_1}, \\ &\dots \\ \alpha_1 \beta_1^{\varphi_l} + \alpha_2 \beta_2^{\varphi_l} + \dots + \alpha_m \beta_m^{\varphi_l} &= r_{j_l}. \end{aligned} \quad (2)$$

где $e^{-\mu_i} = \beta_i$, $i = \overline{1, m}$ (отсюда, вытекает очевидное условие: $1 > \beta_i > 0$, $i = \overline{1, m}$). Без ограничения общности можем считать, что $\varphi_0 = 0$. Как следует из результатов работы [2, с. 121], система (3) имеет единственное решение для случая $l = 2m - 1$ или $l = 2m$, если последовательность $r_{j_0}, r_{j_1}, \dots, r_{j_l}$ строго позитивна [2, с. 84]. Таким образом, задача группировки результатов наблюдений, относящихся к одной и той же траектории уединенной волны, сводится к проверке совместности систем уравнений вида (2), которая эквивалентна существованию решения проблемы моментов для системы функций Чебышева вида $\{t^{\varphi_i}, i = \overline{1, l}\}$ в постановке А.А. Маркова. Заметим, что совместность соответствующей системы моментных соотношений с вероятностью 1 позволяет идентифицировать траекторию соответствующей уединенной волны.

Условия совместности систем моментных соотношений

Для проверки совместности систем уравнений вида (2) воспользуемся подходом, предложенным в работе [1] для определения параметров траекторий уединенных волн. Рассмотрим вспомогательную систему вида

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 + \dots + \tilde{\alpha}_m &= r_{j_0}, \\ \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_1 + \tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta}_2 + \dots + \tilde{\alpha}_m \tilde{\beta}_m &= r_{j_1}, \\ &\dots \\ \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_1^{2m-1} + \tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta}_2^{2m-1} + \dots + \tilde{\alpha}_m \tilde{\beta}_m^{2m-1} &= r_{j_{2m-1}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Если система (3) совместна, то можем определить функцию $\tilde{r}(\varphi)$:
 $\tilde{r}(\varphi) = \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_1^\varphi + \tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta}_2^\varphi + \dots + \tilde{\alpha}_m \tilde{\beta}_m^\varphi$. Аналогично в случае совместности системы (2) определим функцию вида $r(\varphi) = \alpha_1 \beta_1^\varphi + \alpha_2 \beta_2^\varphi + \dots + \alpha_m \beta_m^\varphi$.

Тогда существуют биективные отображения $f_k : [\varphi_k, \varphi_{k+1}] \rightarrow [k, k+1]$ такие, что $\tilde{r}(f_k(\varphi)) = r(\varphi)$ на интервалах $[\varphi_k, \varphi_{k+1}]$, $k = \overline{0, 2m-2}$. Их можем определить так: $f_k(\varphi) = \tilde{r}^{-1}(r(\varphi))$ (в [1] показано, что функция $r(\varphi)$ в общем случае либо монотонна, либо имеет единственную точку минимума). Пусть $f(\varphi) = \sum_{i=0}^{2m-2} f_i(\varphi) \times \chi(\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]) + f_{2m-1}(\varphi) \chi(\varphi \in [\varphi_{2m-1}, \infty))$. Очевидно, что $\tilde{r}(f(\varphi_i)) = r(\varphi_i) = r_i$, $i = \overline{0, 2m-1}$. В таком случае выполняется система соотношений

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m &= \tilde{r}(f(0)), \\ \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_m \beta_m &= \tilde{r}(f(1)), \\ &\dots \\ \alpha_1 \beta_1^{2m-1} + \alpha_2 \beta_2^{2m-1} + \dots + \alpha_m \beta_m^{2m-1} &= \tilde{r}(f(2m-1)). \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, получаем условие: если система (3) совместна и совместна система (2), то совместна и система (4). Параметры $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m$ в работе [1] находятся как решение системы (4).

Заметим, что на этапе проверки совместности отображение $f(\varphi)$ неизвестно. В простейшем случае отображения $f_i : [\varphi_i, \varphi_{i+1}] \rightarrow [i, i+1]$ можно реализовать как линейные преобразования вида $f_i(x) = ((i+1)\varphi_i - i\varphi_{i+1} - x)/(\varphi_i - \varphi_{i+1})$, $i = \overline{0, 2m-2}$, $f_{2m-1}(x) = \frac{(2m-1)x}{\varphi_{2m-1}}$.

Очевидно, что в целях увеличения точности можем рассмотреть отображения вида $f_i : [\varphi_i, \varphi_{i+1}] \rightarrow [i\Delta, (i+1)\Delta]$, где $\Delta(2m+1) = \varphi_{2m+1}$. В таком случае получим некоторую приближенную процедуру определения принадлежности соответствующего множества точек наблюдений траектории одной и той же уединенной волны и соответственно определения самой траектории в классе функций вида $r(\varphi) = \alpha_1 e^{-\mu_1 \varphi} + \alpha_2 e^{-\mu_2 \varphi} + \dots + \alpha_m e^{-\mu_m \varphi}$.

Таким образом, для определения проверки совместности системы (2) необходимо исследовать совместность систем вида

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m &= r_0, \\ \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_m \beta_m &= r_1, \\ &\dots \\ \alpha_1 \beta_1^{n-1} + \alpha_2 \beta_2^{n-1} + \dots + \alpha_m \beta_m^{n-1} &= r_{n-1}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $n \leq 2m$, $r_s, s = \overline{0, n-1}$, — результаты наблюдений,

$$\begin{aligned} \beta_i &\neq \beta_j, \quad i \neq j, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m}, \\ \alpha_j &> 0, \quad 1 > \beta_j > 0, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим очевидное необходимое и достаточное условие совместности системы (5), которое заключается в выполнении системы неравенств вида

$$\begin{aligned} r_0 &> 0, \\ r_i^{\min} &\leq r_i \leq r_i^{\max}, \quad i = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (7)$$

где r_i^{\min}, r_i^{\max} — решения задач нелинейного программирования:

$$\begin{aligned} r_i^{\min} &= \min_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m} (\alpha_1 \beta_1^i + \alpha_2 \beta_2^i + \dots + \alpha_m \beta_m^i), \\ r_i^{\max} &= \max_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m} (\alpha_1 \beta_1^i + \alpha_2 \beta_2^i + \dots + \alpha_m \beta_m^i), \end{aligned} \quad (8)$$

при выполнении условий (6) и системы соотношений :

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m &= r_0, \\ \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_m \beta_m &= r_1, \\ &\dots \\ \alpha_1 \beta_1^{i-1} + \alpha_2 \beta_2^{i-1} + \dots + \alpha_m \beta_m^{i-1} &= r_{i-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что процедура проверки принадлежности наблюдаемых данных соответствующим интервалам (условие (7)) характеризуется отсутствием накопления ошибок при наличии помех при измерениях.

Найдем соответствующие минимальные и максимальные значения (8). Введем функцию Лагранжа :

$$L(y, \alpha, \lambda) = \alpha_1 \beta_1^i + \alpha_2 \beta_2^i + \dots + \alpha_m \beta_m^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j (\alpha_1 \beta_1^j + \alpha_2 \beta_2^j + \dots + \alpha_m \beta_m^j - r_j).$$

Запишем систему соотношений для нахождения стационарных точек функции Лагранжа:

$$\begin{cases} \beta_k^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j \beta_k^j = 0, \\ k = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} (i \beta_k^{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} j \lambda_j \beta_k^{j-1}) \alpha_k = 0, \\ k = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m \alpha_j \beta_j^i = r_i, \\ i = \overline{0, i-1}. \end{cases} \quad (12)$$

Пусть $P_i(t) = t^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j t^j$. Из систем (10)–(12) вытекает, что $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ —

корни этого многочлена кратности ≥ 2 . Так как $i < 2m$, то система (10)–(12) несовместна при выполнении условий (6). Поэтому далее будем анализировать предельные точки допустимой области, при каких система (10)–(12) совместна.

Нахождение точек минимума

Рассмотрим для случая четного i множество точек, удовлетворяющих условию

$$\beta_k \neq \beta_j, \quad k \neq j, \quad k = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, p}, \quad \beta_p = \beta_{p+1} = \dots = \beta_m,$$

где $p = \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$, $[\]$ — целая часть числа. При этом система соотношений (13) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \overline{\alpha}_p &= r_0, \\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \overline{\alpha}_p\beta_p &= r_1, \\ &\dots \\ \alpha_1\beta_1^{i-1} + \alpha_2\beta_2^{i-1} + \dots + \overline{\alpha}_p\beta_p^{i-1} &= r_{i-1}, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\overline{\alpha}_p = \alpha_p + \alpha_{p+1} + \dots + \alpha_m$.

Легко показать, что последовательность, допускающая представление (13), строго позитивна. Тогда точки сосредоточения масс β_i могут быть найдены как корни многочлена $\det |r_i r_{i+1} \dots r_{i+p-1} t^i|_{i=0}^p$, а значения α_i — как решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) [7, с. 122]. Тогда решения $(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ систем (11)–(13) имеют такую структуру: $s = (\overline{y}, \overline{\alpha}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, z_p, z_{p+1}, \dots, z_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p, \beta_p, \dots, \beta_p)$, где z_p, \dots, z_m — такие неотрицательные числа, что $z_p + \dots + z_m = \overline{\alpha}_p$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, \overline{\alpha}_p, \beta_1, \dots, \beta_p$ — решения системы (13).

Покажем, что целевая функция достигает минимума в соответствующих стационарных точках функции Лагранжа.

Утверждение 1. Пусть вектор $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\lambda})$ — решение системы (10)–(12), $\overline{\alpha} = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_m^*)$, $\overline{\beta} = (\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_m^*)$, $\overline{\lambda} = (\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_{n-1}^*)$, $f(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = \alpha_1^*(\beta_1^*)^i + \alpha_2^*(\beta_2^*)^i + \dots + \alpha_m^*(\beta_m^*)^i$. Тогда выполняется соотношение $L(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\lambda}) = -\sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* r_j$.

Утверждение 2. Функция $f(\alpha, \beta) = \alpha_1\beta_1^i + \alpha_2\beta_2^i + \dots + \alpha_m\beta_m^i$ достигает своего глобального минимума в любой точке, являющейся решением (10)–(12).

Утверждение 1 проверяется непосредственно с помощью подстановки соответствующих решений в функцию Лагранжа. Доказательство утверждения 2 следует из таких рассуждений. Имеем $f(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = L(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \lambda) = L(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\lambda})$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) = L(\alpha, \beta, \lambda) &= \alpha_1\beta_1^i + \alpha_2\beta_2^i + \dots + \alpha_m\beta_m^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j (\alpha_1\beta_1^j + \alpha_2\beta_2^j + \dots \\ &+ \dots + \alpha_m\beta_m^j - r_j) = \alpha_1(\beta_1^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* \beta_1^j) + \alpha_2(\beta_2^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* \beta_2^j) + \dots + \alpha_m(\beta_m^i + \end{aligned}$$

$$\sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* r_j = \alpha_1 P_i(\beta_1) + \alpha_2 P_i(\beta_2) + \dots + \alpha_m P_i(\beta_m) + L(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \lambda) \geq L(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \lambda) = f(\overline{\alpha}, \overline{\beta}),$$

$$\text{где } P_i(t) = t^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j^* t^j = \prod_{k=0}^p (t - \beta_k^*)^2.$$

Пусть i нечетное и выполняется условие

$$\beta_{p+1} = \dots = \beta_m = 0, \text{ где } p = [i/2]. \quad (14)$$

Тогда систему (12) запишем в виде

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p + \alpha_{p+1} &= r_0, \\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_p\beta_p &= r_1, \\ &\dots \\ \alpha_1\beta_1^{i-1} + \alpha_2\beta_2^{i-1} + \dots + \alpha_p\beta_p^{i-1} &= r_{i-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Последняя система, как известно [7, с. 122], имеет единственное решение (числа r_0, r_1, \dots, r_{i-1} допускают единственное нижнее главное представление), точки сосредоточения масс находятся как корни многочлена $t \det |r_{j+1} \dots r_{j+p} t^j|_{j=0}^p$, вектор $\bar{\alpha} = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_m^*)$ находим как решение соответствующей СЛАУ. Доказательство того факта, что соответствующая функция достигает минимума, в точности повторяет доказательство, представленное в случае четного i . Заметим только, что $\lambda_0^* = 0$ и $P_i(t) = t(t - \beta_1)^2(t - \beta_2)^2 \dots (t - \beta_p)^2 \geq 0, t \in [0, 1]$.

Нахождение точек максимума

Пусть i четное и выполняются условия

$$\beta_m = \beta_{m-1} = \dots = \beta_{i/2+1} = 1, \beta_{i/2} = 0. \quad (16)$$

В таком случае система (11) будет иметь вид

$$\begin{cases} \beta_k^i + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \beta_k^j = 0, \\ k = \overline{1, [i/2]-1}, \\ 1 + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Рассмотрим многочлен вида $P_i(t) = t(t-1)(t-\beta_1)^2 \dots (t-\beta_{i/2-1})^2$. Из систем (17) и (11) вытекает, что $0, 1, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{[i/2]-1}$ — корни многочлена $t^i + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j t^j$,

причем $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{[i/2]-1}$ имеют ранг 2. Заметим, что система (12) при условиях (16) совместна. Действительно, последовательность r_1, r_2, \dots, r_m , допускающая представление (10), строго позитивна. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \alpha_1\beta_1^2 + \alpha_2\beta_2^2 + \dots + \alpha_{[i/2]-1}\beta_{[i/2]-1}^2 &= r_2 - (\alpha_{[i/2]+1} + \dots + \alpha_m), \\ &\dots \\ \alpha_1\beta_1^{i-1} + \alpha_2\beta_2^{i-1} + \dots + \alpha_{[i/2]-1}\beta_{[i/2]-1}^{i-1} &= r_{i-1} - (\alpha_{[i/2]+1} + \dots + \alpha_m). \end{aligned}$$

Она имеет единственное решение относительно переменных $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_{[i/2]-1}, \beta_{[i/2]-1}$. Подставляя это решение в уравнение $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_{[i/2]-1}\beta_{[i/2]-1} + \alpha_{[i/2]+1} + \dots + \alpha_m = r_1$, находим $\alpha_{[i/2]+1} + \dots + \alpha_m$. Тогда из уравнения $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = r_0$ находим $\alpha_{[i/2]}$.

Повторяя предыдущие рассуждения, легко показать, что функция $\alpha_1\beta_1^i + \alpha_2\beta_2^i + \dots + \alpha_m\beta_m^i$ достигает максимума в точке $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\lambda})$, являющейся решением системы (10)–(12) при условии (14).

Если i нечетное, выполняются условия $\beta_m = \beta_{m-1} = \dots = \beta_{i/2+1} = 1$.

Записывая условия стационарности функции Лагранжа и проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, получаем структуру решения, в котором достигается максимум.

Легко видеть, что соответствующая система имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_{[i/2]}\beta_{[i/2]} + \alpha_{[i/2]+1} + \dots + \alpha_m &= r_1, \\ \dots \\ \alpha_1\beta_1^{i-1} + \alpha_2\beta_2^{i-1} + \dots + \alpha_{[i/2]}\beta_{[i/2]}^{i-1} + \alpha_{[i/2]+1} + \dots + \alpha_m &= r_{i-1}. \end{aligned}$$

Она имеет единственное решение относительно переменных $\alpha_1, \beta_1^1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_{[i/2]}, \beta_{[i/2]}$, так как последовательность r_1, r_2, \dots, r_m строго позитивна. Подставляя это решение в уравнение $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = r_0$, находим $\alpha_{[i/2]+1} + \dots + \alpha_m$. При этом легко доказать достижение максимума функцией $\alpha_1\beta_1^i + \alpha_2\beta_2^i + \dots + \alpha_m\beta_m^i$, аналогично, как в предыдущих случаях, с использованием многочлена вида $P_i(t) = (t-1)(t-\beta_1)^2 \dots (t-\beta_{[i/2]})^2$.

Дополнительные условия для выделения траекторий уединенных волн

Рассмотрим другие возможные эвристические подходы к проблеме группировки данных наблюдений, относящихся к траектории одной волны. Заметим, что на начальном этапе существенно использование информации о характере движения уединенных волн в конкретной физической среде. Предположим, например, что имеет место убывание скорости уединенной волны со временем (что соответствует подавляющему большинству реальных случаев). Тогда из множества $G_0 = \{(x_1, t_1), (x_2, t_2), \dots, (x_n, t_n)\}$ можем выделять такие подмножества $(x_{i_1}, t_{i_1}), (x_{i_2}, t_{i_2}), \dots, (x_{i_l}, t_{i_l}), l \in N$, для которых выполняется условие $\tilde{v}_{i_1 i_2} \geq \tilde{v}_{i_2 i_3} \geq \dots \geq \tilde{v}_{i_{l-1} i_l}$, где $\tilde{v}_{ij} = \frac{\rho(x_j, x_i)}{t_j - t_i}$, $j > i, i, j = 1, l$, $\rho(x_j, x_i)$ — расстояние между точками.

Очевидно, можем требовать выполнения и других условий, исходя из специфики характера движения волн. Например, из условия выпуклости функции скорости получаем очевидное соотношение $\tilde{v}_r \leq \tilde{v}_{r-1} + \frac{\tilde{v}_{r+1} - \tilde{v}_{r-1}}{\bar{t}_{r+2} - \bar{t}_r} (\bar{t}_{r+1} - \bar{t}_r)$, где $\bar{t}_r = t_r$ или $\bar{t}_r = \frac{t_r - t_{r-1}}{2}$, $\tilde{v}_r = \frac{\rho(x_{i_{r+1}}, x_{i_r})}{t_{i_{r+1}} - t_{i_r}}$, $r = 1, 2, \dots, l-1$.

В случае неменяющейся скорости получаем $\tilde{v}_{i_1 i_2} + \varepsilon_1 = \tilde{v}_{i_2 i_3} + \varepsilon_2 = \dots = \tilde{v}_{i_{k-1} i_k} + \varepsilon_k$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ — некоторые параметры (поправки кривизны), а при ее возрастании $\tilde{v}_{i_1 i_2} \leq \tilde{v}_{i_2 i_3} \leq \dots \leq \tilde{v}_{i_{k-1} i_k}$. В общем случае информация о характере скоростей может отсутствовать.

Для дальнейшей идентификации траекторий можем предложить подход, аналогичный автокорреляционному критерию существования тренда [6, 7, 10].

Соответствующие результаты наблюдений запишем в полярной системе координат:

$$x_{jk} = r_{jk} e^{i\phi_{jk}}, k = \overline{0, l}.$$

Рассмотрим последовательность чисел $r_{j_1}, r_{j_2}, \dots, r_{j_l}$ и определим коэффициент автокорреляции первого порядка:

$$R_l^1 = \frac{\sum_{i=2}^l (r_{j_i} - \bar{r}_1)(r_{j_{i-1}} - \bar{r}_1)}{\sqrt{\sum_{i=2}^l (r_{j_i} - \bar{r}_1)^2 (r_{j_{i-1}} - \bar{r}_1)^2}}, \quad \bar{r}_1 = \frac{1}{l-1} \sum_{i=2}^l r_{j_i}, \quad \bar{r}_2 = \frac{1}{l-1} \sum_{i=2}^l r_{j_{i-1}}.$$

Аналогично определим коэффициент автокорреляции R_{l+1}^2 для ряда $r_{j_1}, r_{j_2}, \dots, r_{j_{l+1}}$. В таком случае, если точка $x_{j_{l+1}}$ не связана с $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l}$, т.е. случайна (не принадлежит одной траектории солитона), получим неравенство $R_l^1 > R_{l+1}^2$. Таким образом, с помощью коэффициента автокорреляции можем идентифицировать траектории солитонов. Заметим, что при таком подходе можем строить прогноз, находя максимум коэффициента корреляции между рядом наблюдений и его сдвигом на одну позицию вправо.

Покажем, что если система (3) совместна, то с вероятностью 1 точки $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l}$ принадлежат траектории одного солитона. Действительно, рассмотрим первые m уравнений системы, с помощью которых легко получить соотношения для параметров $\alpha_i, i = \overline{1, m}$, как решения СЛАУ. Соответствующие решения для этих же параметров можно получить, рассматривая m уравнений, начиная со второго, третьего и т.д. Рассмотрим соотношения, полученные для первых m уравнений и уравнений, начиная со второго.

Тогда приравнявая соотношения для параметра α_1 , получаем равенство двух выражений, одно из которых содержит значения $r_{j_0}, r_{j_1}, \dots, r_{j_m}$ а другое — $r_{j_1}, \dots, r_{j_{m+1}}$. Но вероятность такого события, очевидно, равна нулю, если только точки $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{m+1}}$ не принадлежат кривой вида $L = \{(r, \varphi) : r = \alpha_2 e^{-\mu_2 \varphi} + \dots + \alpha_m e^{-\mu_m \varphi}\}$. Таким образом, получили достаточное условие принадлежности точек наблюдений $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{m+1}}$ траектории одного солитона и далее остановимся на проблеме существования представлений (2).

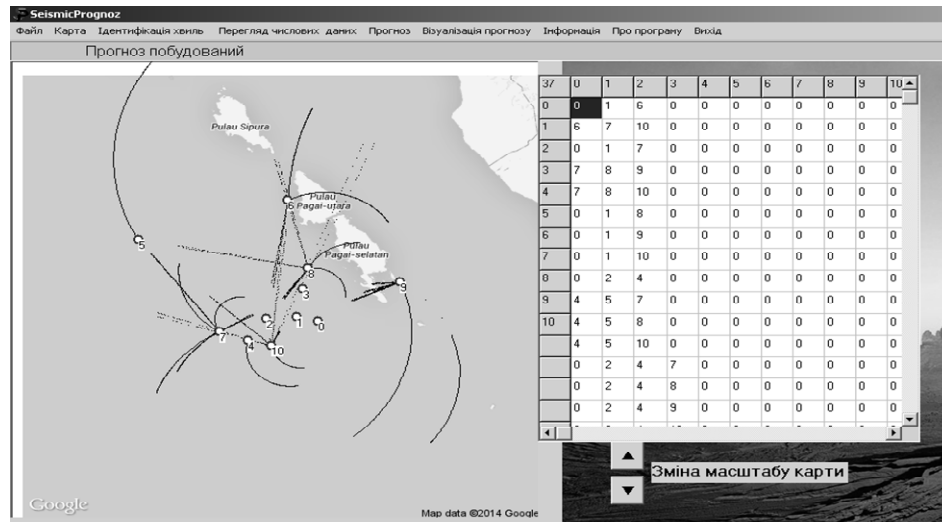
На рисунке представлены результаты работы алгоритма идентификации траекторий уединенных волн по данным наблюдений сейсмических толчков в районе острова Суматра, а также построения прогноза в классе сумм логарифмических спиралей. Точки сейсмических толчков для удобства пронумерованы числами 0–10. Справа в рисунке представлены подпоследовательности, построенные в соответствии с предложенным алгоритмом идентификации. Кривые — это прогнозные траектории, построенные для интервала времени 3 ч при следующих исходных данных:

$$G_0 = \{(-3,466; 100,122; 0,00); (-3,44; 100,01; 28,00); (-3,449; 99,843; 37,00);$$

$$(-3,263; 100,04; 46,00); (-3,586; 99,743; 72,00); (-2,95; 99,151; 73,00);$$

$$(-2,7; 99,96; 236,00); (-3,531; 99,588; 290,00); (-3,134; 100,07; 295,00);$$

$$(-3,22; 100,57; 314,00); (-3,62; 99,87; 321,00)\}.$$



Заклучение

Таким образом, в работе предложены методы анализа данных, базирующиеся на исследовании условных скоростей, построении автокорреляционных функций, а также проверке совместности систем моментных соотношений, и на этой основе разработан подход для идентификации траекторий уединенных волн по результатам наблюдений.

Алгоритм проверки совместности систем нелинейных уравнений в классе сумм логарифмических спиралей может использоваться для проверки совместности любых систем нелинейных алгебраических уравнений при условии существования конструктивных процедур нахождения минимальных (максимальных) значений целевых функций.

Заметим, что действительные числа допускают соответствующие моментные представления в случае степенной проблемы моментов, если они образуют строго позитивную последовательность относительно системы функций $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$. Таким образом, предложенные в работе необходимые и достаточные условия совместности системы моментных соотношений эквивалентны критерию строгой позитивности системы вещественных чисел и соответственно решению проблемы моментов Маркова.

Соответствующий алгоритм реализован в подсистеме интеллектуального анализа данных системы прогнозирования землетрясений, разрабатываемой авторами данной публикации.

А.Я. Бомба, Ю.В. Турбал

МЕТОДИ АНАЛІЗУ ДАНИХ ТА ПРОБЛЕМИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ТРАЕКТОРІЙ ВІДОКРЕМЛЕНИХ ХВИЛЬ

Запропоновано методи ідентифікації траекторій відокремлених хвиль за результатами дискретних спостережень в середовищі, де існує декілька хвиль одночасно. Методи складаються з окремих етапів аналізу швидкостей, пошуку взаємозв'язку даних та аналізу траекторій. При побудові прогнозних траекторій задача зводиться до перевірки сумісності систем моментних співвідношень, еквівалентній проблемі моментів Маркова.

DATA ANALYSIS AND PROBLEMS OF IDENTIFICATION OF THE SOLITARY WAVES TRAJECTORIES

A method of solitary waves individual trajectories identification using the results of discrete observations is proposed. It is supposed an existence of a few solitary waves simultaneously. The method consists of several stages of velocity analysis, searching data relationship and trajectory analysis. A problem of building a predictive trajectories reduces to the verification of the compatibility of moment ratios systems which is equivalent to the Markov moment problem.

1. *Бомба А.Я., Турбал Ю.В.* Прогнозирование траекторий уединенных волн деформации в анизотропных упругих телах // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2014. — № 3. — С. 12–21.
2. *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1963. — 553 с.
3. *Turbal Y.* The trajectories of self-reinforcing solitary wave in the gas disc of galaxies//Proceedings of the 3-rd International Conference on Nonlinear Dynamic. — Kharkov, 2010. — P. 112–118
4. *Турбал Ю.В.* Исследование нелинейных эффектов взаимодействия уединенных волн деформации с областями изменяющейся плотности для анизотропного твердого тела // Физико-математическое моделирование и информационные технологии. — 2013. — Вып. 18. — С. 112–119
5. *Kozak J. and Sileny J.* Seismic events with non-shear component. I. Shallow earthquakes with a possible tensile source component // PAGEOPH. — 1985. — **123**. — P. 1–15.
6. *Беркович А. С., Лемешко Б. Ю., Щеглов А. Е.* Исследование распределений статистик критериев тренда и случайности // Материалы X международной конференции «Актуальные проблемы электронного приборостроения АПЭП-2010». — Новосибирск, 2010. — **6**. — С. 13–17.
7. *Кобзарь А. И.* Прикладная математическая статистика. — М.: Физматлит. — 2006. — 816 с.
8. *Бомба А.Я., Турбал Ю.В.* Математична модель сейсмічного процесу, що враховує повільні відокремлені хвилі деформації // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. — 2013. — № 4(81). — С. 88–93.
9. *Ерофеев В.И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой – М.: Изд-во Москов. ун-та. — 1999. — 328 с.
10. *Bartels R.* The rank version of von Neumann’s ratio test for randomness // JASA. — 1982. — **77**, N 377. — P. 40–46.

*Получено 02.12.2014
После доработки 26.05.2015*