

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

УДК 519.63

О.Н. Литвин, К.В. Носов, Т.А. Баранова

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ОПТИМАЛЬНЫМ ВЫБОРОМ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Введение

История метода конечных элементов (МКЭ) насчитывает несколько десятилетий. Вначале он рассматривался как развитие классических методов строительной механики и применялся, в основном, в этой области. В дальнейшем совместными усилиями математиков, инженеров и программистов данный метод разрабатывался и развивался как разновидность вариационно-разностных методов (методов Рунге, Бубнова–Галеркина и др.). Позднее оба подхода были объединены и в настоящее время рассматриваются как два аспекта одного и того же метода. Общая идея МКЭ, вытекающая из классических методов строительной механики, состоит в расчленении сложной системы на простые элементы с последующим объединением их в единое целое. С реализацией этой простой и очевидной идеи классических методов строительной механики исследования поведения тела на основе поведения отдельных его частей — конечных элементов — связаны наглядность и физичность метода, простота учета неоднородности материала, граничных условий и изменчивости геометрической формы, что обеспечивает широкое распространение метода. Эту идею дискретной аппроксимации удалось развить и перенести из области задач строительной механики на более сложные классы механических и немеханических задач, сделав тем самым МКЭ универсальным средством решения краевых задач математической физики.

Этот метод успешно используется в самых разнообразных задачах. Он был создан для решения сложных уравнений теории упругости и строительной механики и незаменим при учете геометрических особенностей области. В этом случае МКЭ используется не только для решения системы уравнений, но и, в первую очередь, для формулировки и построения дискретных аппроксимаций.

При построении схем данного метода возникает задача выбора системы базисных функций, с помощью которых строится приближенное решение. Во многих работах предложено большое количество различных систем базисных функций, большинство из которых представляет собой кусочно-полиномиальные интерполлянты, обеспечивающие нужный класс дифференцируемости искомого приближенного решения и согласованности этого решения с граничными условиями исходной задачи [1–3]. Из свойств приближенного решения вытекает еще одно важнейшее свойство — порядок сходимости приближенного решения к точному

© О.Н. ЛИТВИН, К.В. НОСОВ, Т.А. БАРАНОВА, 2015

в соответствующей норме при дроблении сетки. Несмотря на разнообразие схем МКЭ для эллиптических задач с частными производными, практическое получение приближенного решения с высокой точностью сопряжено с серьезными препятствиями, связанными со стремительным ростом вычислительных затрат и накоплением погрешностей округления при увеличении степеней свободы и увеличении степени используемых интерполянтов. Поэтому разработка вычислительных МКЭ, которые при заданном (как правило, небольшом) числе степеней свободы обеспечивают минимальную ошибку, остается вполне актуальной.

Проведенный анализ схем МКЭ показывает, что используемые системы базисных функций учитывают только некоторые свойства краевой задачи (упомянутые свойства принадлежности приближенного решения определенному классу гладкости, согласованность с граничными условиями задачи) и мало связаны со свойствами дифференциального оператора задачи. Учет последних свойств обеспечивает один из подходов к решению этой проблемы.

Схемы МКЭ с выбором базисных функций, оптимальных с точки зрения минимизации функционала энергии вариационной задачи, эквивалентной исходной, впервые предложены в работах [4, 5]. В работах [6, 7] были разработаны различные вычислительные схемы МКЭ с выбором базисных функций. Так, в работе [7] координатные функции приближенного решения строились с использованием сплайнов первой степени, параметры которых определялись из условия минимума функционала энергии с использованием метода Гаусса–Зейделя. В работах [8–10] разработана итерационная схема «flip-flop», согласно которой совокупности узловых параметров и базисные функции вычислялись на отдельных шагах итерационного процесса.

Цель данной работы — разработка вычислительной схемы МКЭ с выбором координатных функций, которая является обобщением работ [4–12]. Обобщение касается использования отдельной системы базисных функций для каждого узла разбиения. Вычислительный эксперимент, проведенный для модельной задачи на нескольких областях, подтвердил высокую точность предложенной схемы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим граничную задачу для самосопряженного дифференциального оператора

$$\begin{aligned} Au(x) &= f(\mathbf{x}), \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega, \\ \partial^s u / \partial \mathbf{v}^s &= 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega, s = \overline{0, m-1}, \end{aligned} \quad (1)$$

где Ω — n -мерная область, границы которой состоят из участков гиперплоскостей размерности $n-1$, параллельных координатным гиперплоскостям; \mathbf{v} — нормаль к $\partial\Omega$, $f(\mathbf{x}) \in L_2(\Omega)$; A — самосопряженный дифференциальный оператор эллиптического типа порядка $2m$

$$Au = \sum_{|\mathbf{a}| \leq m} (-1)^{|\mathbf{a}|} D_{\mathbf{x}}^{\mathbf{a}} (a_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) D_{\mathbf{x}}^{\mathbf{a}} u), \mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad (2)$$

где $|\mathbf{a}| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, $D_{\mathbf{x}}^{\mathbf{a}} u = \partial^{|\mathbf{a}|} u / \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$. Вводится разбиение области Ω на гиперпараллелепипеды гиперплоскостями $x_k = x_{k, i_k}$, $i_k = \overline{1, N_k}$, $k = \overline{1, n}$. Приближенное решение краевой задачи (1) строится с использованием узловых параметров в каждой точке разбиения и системы функций, которые обеспечивают нужную степень гладкости решения.

Введем обозначения $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_n$, $\Delta_{k,i_k} = x_{k,i_k+1} - x_{k,i_k}$, $i_k = \overline{1, N_k}$, $k = \overline{1, n}$. Гиперпараллелепипед, отвечающий $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, обозначим $\Pi_{\mathbf{i}} = \{\mathbf{x} \mid x_k \in [x_{k,i_k}, x_{k,i_k+1}], k = \overline{1, n}\}$. В $\Pi_{\mathbf{i}}$ приближенное решение представим в форме

$$\tilde{u}_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}) = \sum_{r_1=0}^{m-1} \dots \sum_{r_n=0}^{m-1} \sum_{\mu_1=0}^1 \dots \sum_{\mu_n=0}^1 u_{\mathbf{i}+\boldsymbol{\mu}}^{\langle r_1, \dots, r_n \rangle} \prod_{q=1}^n h_{q,\mathbf{i},1-\mu_q,r_q} \left(\frac{x_q - x_{q,i_q}}{\Delta_{q,i_q}} \right) \Delta_{q,i_q}^{r_q}, \quad (3)$$

где использованы обозначения $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, $\mathbf{i} + \boldsymbol{\mu} = (i_1 + \mu_1, i_2 + \mu_2, \dots, i_n + \mu_n)$, а функции $h_{q,\mathbf{i},1-\mu,p}(\cdot)$ имеют достаточную степень гладкости и обладают свойствами

$$h_{q,\mathbf{i},1-\mu,p}^{(s)}(\gamma) = \delta_{\mu,\gamma} \delta_{s,p}, \quad \mu = 0, 1; \quad s = \overline{0, m-1}; \quad p = \overline{0, m-1}; \quad q = 0, 1. \quad (4)$$

Легко проверяется, что $\tilde{u}_{\mathbf{i}}(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию

$$D^{\boldsymbol{\alpha}} \tilde{u}(x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, \dots, x_{n,i_n}) = u_{i_1, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}$$

для всех узловых параметров $u_{i_1, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}$ области Ω .

Существенным расширением схемы, предложенной в работе [5], является использование для каждого узлового параметра отдельной системы координатных функций, что и отображено в (1).

Приближенное решение находится из условия минимума функционала энергии, отвечающего задаче (1)

$$J(u) = \int_{\Omega} \left[\sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq m} a_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) (D_{\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\alpha}} u(\mathbf{x}))^2 - 2f(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) \right] d\mathbf{x},$$

по координатным функциям $h_{q,\mathbf{i},1-\mu,p}(\cdot)$ и узловым параметрам $u_{i_1, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}$.

Исходя из работы [5], можно показать, что узловые параметры $u_{i_1, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}$ и координатные функции $h_{q,\mathbf{i},1-\mu,p}(\cdot)$, реализующие минимум функционала энергии, удовлетворяют системе Ритца

$$\frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial u_{i_1, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}} = 0$$

по всем узловым параметрам $u_{i_1, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}$ и системе уравнений, определяющей минимум функционала $J(\tilde{u})$ по системе координатных функций $h_{q,\mathbf{i},1-\mu,p}(\cdot)$. Если выполнено условие $h_{q,\mathbf{i},1-\mu,p}(\cdot) \in W_2^{2m}[0, 1]$, последняя система представляет собой краевую задачу для системы обыкновенных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

$$\delta h_{q,\mathbf{i},1-\mu_q,r_q} J(\tilde{u}) = 0,$$

где δ — вариация функционала $J(\tilde{u})$ по функциям $h_{q,\mathbf{i},1-\mu_q,r_q}(\cdot)$. Каждая такая вариация представляет собой обыкновенное нелинейное интегро-дифференциальное уравнение. Краевые условия, накладываемые на неизвестные функции $h_{q,\mathbf{i},1-\mu_q,r_q}(\cdot)$, входящие в эти уравнения, определяются условиями (4).

2. Модельная задача — краевая задача Дирихле для уравнения Пуассона

Детально исследуем схему построения приближенного решения для модельной задачи — задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= f(x, y), (x, y) \in G \subset R^2, \\ u(x, y) &= 0, (x, y) \in \partial G. \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая предположения относительно области G , можно разбить ее прямыми $x = x_i, i = \overline{0, n_x}, y = y_j, j = \overline{0, n_y}$, на прямоугольные элементы $\Pi_{i,j} = \{(x, y) : x_i \leq x \leq x_{i+1}; y_j \leq y \leq y_{j+1}\}$. В соответствии со схемой с каждым узлом разбиения связывается система из четырех базисных функций. Приближенное решение в прямоугольнике $\Pi_{i,j}$ представляется в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y) &= u_{i,j} h_{1,i,j} \left(\frac{x-x_i}{\Delta_{1,i}} \right) H_{1,i,j} \left(\frac{y-y_j}{\Delta_{2,j}} \right) + u_{i+1,j} h_{0,i+1,j} \left(\frac{x-x_i}{\Delta_{1,i}} \right) H_{1,i+1,j} \left(\frac{y-y_j}{\Delta_{2,j}} \right) + \\ &+ u_{i,j+1} h_{1,i,j+1} \left(\frac{x-x_i}{\Delta_{1,i}} \right) H_{0,i,j+1} \left(\frac{y-y_j}{\Delta_{2,j}} \right) + u_{i+1,j+1} h_{0,i+1,j+1} \left(\frac{x-x_i}{\Delta_{1,i}} \right) H_{0,i+1,j+1} \left(\frac{y-y_j}{\Delta_{2,j}} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Считаем, что функции $h_{1,i,j}(\cdot), h_{0,i,j}(\cdot), H_{1,i,j}(\cdot), H_{0,i,j}(\cdot)$ имеют вторую производную, интегрируемую в квадрате, и удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} h_{1,i,j}(0) &= 1, h_{1,i,j}(1) = 0, \\ h_{0,i,j}(0) &= 0, h_{0,i,j}(1) = 1, \\ H_{1,i,j}(0) &= 1, H_{1,i,j}(1) = 0, \\ H_{0,i,j}(0) &= 0, H_{0,i,j}(1) = 1. \end{aligned}$$

Согласно изложенной схеме, приближенное решение $\tilde{u}(x, y)$ ищем из условия минимизации функционала энергии

$$J(u) = \iint_{\Omega} ((u'_x)^2 + (u'_y)^2 + 2f(x, y)) dx dy, \quad (7)$$

соответствующего задаче (1), по функциям $h_{1,i,j}(\cdot), h_{0,i,j}(\cdot), H_{1,i,j}(\cdot), H_{0,i,j}(\cdot)$.

В дальнейшем, если не оговорено иное, весь набор узловых параметров $u_{i,j}$ обозначим $\{u_{i,j}\}$, а обозначение $u_{i,j}$ применим для узлового параметра, соответствующего узлу сетки (x_i, y_j) . Аналогично $h_{1,i,j}(\cdot)$ обозначим функцию, формирующую приближенное решение в прямоугольнике $\Pi_{i,j}$, а $\{h_{1,i,j}(\cdot)\}$ — всю совокупность данных функций (это распространяется и на функции $h_{0,i,j}(\cdot), H_{1,i,j}(\cdot), H_{0,i,j}(\cdot)$).

В зависимости от выбора классов базисных функций $\{h_{1,i,j}(\cdot)\}, \{h_{0,i,j}(\cdot)\}, \{H_{1,i,j}(\cdot)\}, \{H_{0,i,j}(\cdot)\}$, возможны различные подходы к построению решения задачи (5). Опишем два возможных подхода, отличающихся условиями гладкости базисных функций.

2.1. Базисные функции из класса $D_{0,1}^2(0,1)$, $D_{1,0}^2(0,1)$. Следуя [8], обозначим $D_{\alpha,\beta}^2(a,b)$ класс функций из $C^2[a,b]$, удовлетворяющих условиям $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$.

Считаем, что функции $\{h_{1,i,j}(\cdot)\}$, $\{H_{1,i,j}(\cdot)\}$ принадлежат классу $D_{1,0}^2(0,1)$, а $\{h_{0,i,j}(\cdot)\}$, $\{H_{0,i,j}(\cdot)\}$ — классу $D_{0,1}^2(0,1)$.

Теорема 1. Если базисные функции $\{h_{1,i,j}(\cdot)\}$, $\{h_{0,i,j}(\cdot)\}$, $\{H_{1,i,j}(\cdot)\}$, $\{H_{0,i,j}(\cdot)\}$ принадлежат указанным выше классам, то необходимыми условиями экстремума функционала на наборе узловых параметров $\{\bar{u}_{i,j}\}$ и наборе функций $\{\bar{h}_{1,i,j}(\cdot)\}$, $\{\bar{h}_{0,i,j}(\cdot)\}$, $\{\bar{H}_{1,i,j}(\cdot)\}$, $\{\bar{H}_{0,i,j}(\cdot)\}$ являются

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial J(\{u_{i,j}\}, \{\bar{h}_{1,i,j}(\cdot)\}, \{\bar{h}_{0,i,j}(\cdot)\}, \{\bar{H}_{1,i,j}(\cdot)\}, \{\bar{H}_{0,i,j}(\cdot)\})}{\partial u_{i,j}} \right|_{\{u_{i,j}\}=\{\bar{u}_{i,j}\}} = 0, \\ & \delta_{h_{1,i,j}(\cdot)} J(\{u_{i,j}\}, \{\bar{h}_{1,i,j}(\cdot)\}, \{\bar{h}_{0,i,j}(\cdot)\}, \{\bar{H}_{1,i,j}(\cdot)\}, \{\bar{H}_{0,i,j}(\cdot)\}) \Big|_{h_{1,i,j}(\cdot)=\bar{h}_{1,i,j}(\cdot)} = 0, \\ & \delta_{h_{0,i,j}(\cdot)} J(\{u_{i,j}\}, \{\bar{h}_{1,i,j}(\cdot)\}, \{\bar{h}_{0,i,j}(\cdot)\}, \{\bar{H}_{1,i,j}(\cdot)\}, \{\bar{H}_{0,i,j}(\cdot)\}) \Big|_{h_{0,i,j}(\cdot)=\bar{h}_{0,i,j}(\cdot)} = 0, \\ & \delta_{H_{0,i,j}(\cdot)} J(\{u_{i,j}\}, \{\bar{h}_{1,i,j}(\cdot)\}, \{\bar{h}_{0,i,j}(\cdot)\}, \{\bar{H}_{1,i,j}(\cdot)\}, \{\bar{H}_{0,i,j}(\cdot)\}) \Big|_{H_{0,i,j}(\cdot)=\bar{H}_{0,i,j}(\cdot)} = 0, \\ & \delta_{H_{1,i,j}(\cdot)} J(\{u_{i,j}\}, \{\bar{h}_{1,i,j}(\cdot)\}, \{\bar{h}_{0,i,j}(\cdot)\}, \{\bar{H}_{1,i,j}(\cdot)\}, \{\bar{H}_{0,i,j}(\cdot)\}) \Big|_{H_{1,i,j}(\cdot)=\bar{H}_{1,i,j}(\cdot)} = 0. \end{aligned}$$

Доказательство можно получить, повторяя с очевидными изменениями выкладки теоремы 2.1 [8], основанной на теореме о полном дифференциале для производной Фреше [13].

Для нахождения приближенного решения используем следующую итерационную схему. Считаем функции $\{h_{\mu,i,j}(\cdot)\}$, $\{H_{\mu,i,j}(\cdot)\}$ известными (например, на первом шаге положим, что это — линейные функции, удовлетворяющие соответствующим краевым условиям), находим неизвестные $\{u_{i,j}\}$ из системы Ритца $\partial J(u)/\partial u_{i,j} = 0$. Используем обозначения $\{h_{\mu,i,j}^{[k]}(\cdot)\}$ для функций $\{h_{\mu,i,j}(\cdot)\}$, найденных на шаге k итерационного процесса, аналогично $\{H_{\mu,i,j}^{[k]}(\cdot)\}$ — k -я итерация функции $\{H_{\mu,i,j}(\cdot)\}$. Таким образом, начальные приближения функций $\{h_{\mu,i,j}(\cdot)\}$ и $\{H_{\mu,i,j}(\cdot)\}$ обозначим $\{h_{\mu,i,j}^{[0]}(\cdot)\}$ и $\{H_{\mu,i,j}^{[0]}(\cdot)\}$. Обозначим $\{u_{i,j}\}$, найденные на этом шаге, как $\{u_{i,j}^{[0,0]}\}$, где верхний индекс соответствует номеру итерации для базисных функций ($\{h_{\mu,i,j}^{[0]}(\cdot)\}$ и $\{H_{\mu,i,j}^{[0]}(\cdot)\}$), используемых для нахождения $\{u_{i,j}^{[0,0]}\}$. Затем, используя найденные узловые параметры $\{u_{i,j}^{[0,0]}\}$ и считая функции $\{H_{\mu,i,j}^{[0]}(\cdot)\}$ фиксированными, из условия $\delta_{h_{\mu,i,j}(\cdot)} J(\tilde{u}) = 0$ ($\mu = 0, 1$, по всем i, j) найдем систему функций $\{h_{\mu,i,j}(\cdot)\}$, которую обозначим $\{h_{\mu,i,j}^{[1]}(\cdot)\}$. Из системы Ритца, считая $\{h_{\mu,i,j}^{[1]}(\cdot)\}$ и $\{H_{\mu,i,j}^{[0]}(\cdot)\}$ известными, находим узловые параметры $\{u_{i,j}\}$, которые обозначим $\{u_{i,j}^{[1,0]}\}$. Аналогично из условия $\delta_{H_{\mu,i,j}(\cdot)} J(\tilde{u}) = 0$ ($\mu = 0, 1$, по всем i, j) находим систему функций $\{H_{\mu,i,j}^{[1]}(\cdot)\}$, после чего алгоритм повторяется.

Последовательность начальных итераций для нахождения узловых параметров и координатных функций представим условной схемой

$$\begin{aligned} \{h_{\mu,i,j}^{[0]}(\cdot)\}, \{H_{\mu,i,j}^{[0]}(\cdot)\} &\mapsto \{u_{i,j}^{[0,0]}\}, \\ \{u_{i,j}^{[0,0]}\}, \{H_{\mu,i,j}^{[0]}(\cdot)\} &\mapsto \{h_{\mu,i,j}^{[1]}(\cdot)\}, \\ \{h_{\mu,i,j}^{[1]}(\cdot)\}, \{H_{\mu,i,j}^{[0]}(\cdot)\} &\mapsto \{u_{i,j}^{[1,0]}\}, \\ \{u_{i,j}^{[1,0]}\}, \{h_{\mu,i,j}^{[1]}(\cdot)\} &\mapsto \{H_{\mu,i,j}^{[1]}(\cdot)\}, \\ \{h_{\mu,i,j}^{[1]}(\cdot)\}, \{H_{\mu,i,j}^{[1]}(\cdot)\} &\mapsto \{u_{i,j}^{[1,1]}\}. \end{aligned}$$

Аналогично шаг k итерационного процесса задается схемой

$$\begin{aligned} \{h_{\mu,i,j}^{[k]}(\cdot)\}, \{H_{\mu,i,j}^{[k]}(\cdot)\} &\mapsto \{u_{i,j}^{[k,k]}\}, \\ \{u_{i,j}^{[k,k]}\}, \{H_{\mu,i,j}^{[k]}(\cdot)\} &\mapsto \{h_{\mu,i,j}^{[k+1]}(\cdot)\}, \\ \{h_{\mu,i,j}^{[k+1]}(\cdot)\}, \{H_{\mu,i,j}^{[k]}(\cdot)\} &\mapsto \{u_{i,j}^{[k+1,k]}\}, \\ \{u_{i,j}^{[k,k]}\}, \{h_{\mu,i,j}^{[k+1]}(\cdot)\} &\mapsto \{H_{\mu,i,j}^{[k+1]}(\cdot)\}, \\ \{h_{\mu,i,j}^{[k+1]}(\cdot)\}, \{H_{\mu,i,j}^{[k+1]}(\cdot)\} &\mapsto \{u_{i,j}^{[k+1,k+1]}\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Рассмотрим каждый тип итераций данной схемы. Нахождение очередной итерации узловых параметров (решение системы Ритца) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений, так как поставленная задача минимизации функционала по узловым параметрам $\{u_{i,j}\}$ квадратична. Из квадратичности следует единственность решения системы Ритца при произвольных координатных функциях $\{h_{\mu,i,j}(\cdot)\}, \{H_{\mu,i,j}(\cdot)\}$, удовлетворяющих указанным условиям.

Для решений систем $\delta_{h_{\mu,i,j}(\cdot)}J(\tilde{u}) = 0, \delta_{H_{\mu,i,j}(\cdot)}J(\tilde{u}) = 0$ используется теорема.

Теорема 2. Пусть $\Pi_{i,m}, \Pi_{i,m+1}, \dots, \Pi_{i,M}$ — прямоугольные элементы, удовлетворяющие таким условиям:

- стороны $\{(x, y) \mid x_i \leq x \leq x_{i+1}, y = y_m\}$ и $\{(x, y) \mid x_i \leq x \leq x_{i+1}, y = y_{M+1}\}$ элементов $\Pi_{i,m}$ и $\Pi_{i,M}$ соответственно принадлежат ∂G .
- ни одна из сторон $\{(x, y) \mid x_i \leq x \leq x_{i+1}, y = y_j\}, j = \overline{m+1, M}$, элементов $\Pi_{i,j}$ не принадлежит ∂G .

В данном случае вариации функционала $J(\tilde{u})$ по функциям $h_{1,i,j}(\cdot), j = \overline{m+1, M}$, представляют краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} A\mathbf{h}''(t) + B\mathbf{h}(t) = \mathbf{C}(t), \\ \mathbf{h}(0) = \mathbf{h}_1, \mathbf{h}(1) = \mathbf{h}_0, \end{cases} \tag{9}$$

где $\mathbf{h}(t) = \begin{pmatrix} h_{1,i,m+1}(t) \\ h_{1,i,m+2}(t) \\ \vdots \\ h_{1,i,M}(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{h}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, A, B — трехдиагональные матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{m+1,m+1} & a_{m+1,m+2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{m+2,m+1} & a_{m+2,m+2} & a_{m+2,m+3} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{m+3,m+2} & a_{m+3,m+3} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{M-2,M-2} & a_{M-2,M-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{M-1,M-2} & a_{M-1,M-1} & a_{M-1,M} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{M,M-1} & a_{M,M} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{m+1,m+1} & b_{m+1,m+2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b_{m+2,m+1} & b_{m+2,m+2} & b_{m+2,m+3} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{m+3,m+2} & b_{m+3,m+3} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{M-2,M-2} & b_{M-2,M-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{M-1,M-2} & b_{M-1,M-1} & b_{M-1,M} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{M,M-1} & b_{M,M} \end{bmatrix},$$

где

$$a_{j,j} = -\frac{u_{i,j}^2}{\Delta_{1,i}} \int_0^1 (\Delta_{2,j-1} H_{0,i,j}^2(t) + \Delta_{2,j} H_{1,i,j}^2(t)) dt, \quad j = \overline{m+1, M},$$

$$a_{j,j+1} = a_{j+1,j} = -\frac{\Delta_{2,j} u_{i,j} u_{i,j+1}}{\Delta_{1,i}} \int_0^1 H_{0,i,j+1}(t) H_{1,i,j}(t) dt, \quad j = \overline{m+1, M-1},$$

$$b_{j,j} = -\frac{u_{i,j}^2}{\Delta_{1,i}} \int_0^1 \left(\frac{(H'_{0,i,j}(t))^2}{\Delta_{2,j-1}} + \frac{(H'_{1,i,j}(t))^2}{\Delta_{2,j}} \right) dt, \quad j = \overline{m+1, M},$$

$$b_{j,j+1} = b_{j+1,j} = -\frac{\Delta_{1,i} u_{i,j} u_{i,j+1}}{\Delta_{2,j}} \int_0^1 H'_{0,i,j+1}(t) H'_{1,i,j}(t) dt, \quad j = \overline{m+1, M-1},$$

$$\mathbf{C}(t) = \begin{pmatrix} c_{m+1}(t) \\ c_{m+2}(t) \\ \vdots \\ c_M(t) \end{pmatrix},$$

$$c_j(t) = 2u_{i,j} \Delta_{1,i} \int_0^1 (\Delta_{2,j-1} H_{0,i,j}(\tau) + \Delta_{2,j} H_{1,i,j}(\tau)) d\tau -$$

$$- h_{0,1+i,j}(t) u_{i,j} u_{i+1,j} \Delta_{1,i} \int_0^1 \left(\frac{H'_{0,i,j}(\tau) H'_{0,i+1,j}(\tau)}{\Delta_{2,j-1}} + \frac{H'_{1,i,j}(\tau) H'_{1,i+1,j}(\tau)}{\Delta_{2,j}} \right) d\tau -$$

$$\begin{aligned}
& -h_{0,1+i,j+1}(t)u_{i,j}u_{i+1,j+1} \frac{\Delta_{1,i}}{\Delta_{2,j}} \int_0^1 H'_{0,i+1,j+1}(\tau)H'_{1,i,j}(\tau) d\tau - \\
& -h_{0,1+i,j-1}(t)u_{i,j}u_{i+1,j-1} \frac{\Delta_{1,i}}{\Delta_{2,j-1}} \int_0^1 H'_{0,i,j}(\tau)H'_{1,i+1,j-1}(\tau) d\tau + \\
& + h''_{0,1+i,j-1}(t)u_{i,j}u_{i+1,j-1} \frac{\Delta_{2,j-1}}{\Delta_{1,i}} \int_0^1 H_{0,i,j}(\tau)H_{0,i+1,j-1}(\tau) d\tau + \\
& + h''_{0,1+i,j}(t) \frac{u_{i,j}u_{i+1,j}}{\Delta_{1,i}} \int_0^1 (\Delta_{2,j-1}H_{0,i,j}(\tau)H_{0,i+1,j}(\tau) + \Delta_{2,j}H_{1,i,j}(\tau)H_{0,i+1,j}(\tau)) d\tau + \\
& + h''_{0,1+i,j+1}(t)u_{i,j}u_{i+1,j+1} \frac{\Delta_{1,i}}{\Delta_{2,j}} \int_0^1 H_{0,i+1,j+1}(\tau)H_{1,i,j}(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Доказательство основано на приравнении 0 вариаций функционала энергии по соответствующим функциям.

Теорема 3. Обобщенное решение краевой задачи (9) существует и является единственным.

Доказательство. Воспользуемся хорошо известным результатом [14, с. 89], гарантирующим существование обобщенного решения операторного уравнения

$$\Lambda v = f$$

в гильбертовом пространстве в случае, если Λ — положительно-определенный оператор. Перейдем в (9) к новым искомым функциям, удовлетворяющим однородным граничным условиям. Заменим $\tilde{h}_{1,i,j}(\cdot) = h_{1,i,j}(\cdot) + \cdot - 1$, $j = m+1, M$. Тогда

$$h_{1,i,j}(\cdot) \in D_{0,0}^2, \quad \text{поскольку} \quad h_{1,i,j}(\cdot) \in D_{1,0}^2(0,1). \quad \text{Обозначим} \quad \tilde{\mathbf{h}}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{h}_{1,i,m+1}(t) \\ \tilde{h}_{1,i,m+2}(t) \\ \vdots \\ \tilde{h}_{1,i,M}(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда краевая задача (9) приводится к виду

$$\begin{cases} A\tilde{\mathbf{h}}''(t) + B\tilde{\mathbf{h}}(t) = \tilde{\mathbf{C}}(t), \\ \tilde{\mathbf{h}}(0) = \tilde{\mathbf{h}}_1, \quad \tilde{\mathbf{h}}(1) = \tilde{\mathbf{h}}_0, \end{cases} \quad (10)$$

что эквивалентно (9).

В (10) входят те же матрицы A, B , что и в (9). Для сокращения записи не приводим $\tilde{\mathbf{C}}(t)$.

Введем линейное пространство $H = \underbrace{D_{0,0}^2(0,1) \times D_{0,0}^2(0,1) \times \dots \times D_{0,0}^2(0,1)}_N$.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1(\cdot), x_2(\cdot), \dots, x_N(\cdot)) \in H$, $\mathbf{y} = (y_1(\cdot), y_2(\cdot), \dots, y_N(\cdot)) \in H$, тогда скалярное произведение в H можно задать следующим образом:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N \int_0^1 x_i(t) y_i(t) dt.$$

Рассмотрим дифференциальный оператор Λ , который действует в пространстве H по правилу

$$\Lambda \mathbf{h} = A\mathbf{h}''(t) + B\mathbf{h}(t),$$

где $\mathbf{h}(\cdot) \in H$. Покажем положительную определенность Λ .

Докажем, что для матриц A, B выполнены неравенства

$$(-A\mathbf{z}, \mathbf{z}) \geq \lambda_A \|\mathbf{z}\|^2, \quad (B\mathbf{z}, \mathbf{z}) \geq \lambda_B \|\mathbf{z}\|^2 \quad (11)$$

для некоторых $\lambda_A, \lambda_B > 0$. Здесь $\mathbf{z} \in R^N$, скалярное произведение и норма берутся в евклидовом пространстве R^N . Докажем, например, первое неравенство.

Покажем, что матрица $-A$ является матрицей Грама некоторой независимой системы функций. Известно, что для произвольной матрицы Грама G в евклидовом пространстве выполняется $(-A\mathbf{z}, \mathbf{z}) \geq \lambda \|\mathbf{z}\|^2$ для некоторого $\lambda > 0$.

Введем функции

$$\varphi_j(\tau) = \begin{cases} \frac{u_{i,j}}{\sqrt{\Delta_{1,i}}} H_{1,i,j} \left(\frac{\tau - y_j}{\Delta_{2,j}} \right), & y_j \leq \tau \leq y_{j+1}, \\ \frac{u_{i,j}}{\sqrt{\Delta_{1,i}}} H_{0,i,j} \left(\frac{\tau - y_{j-1}}{\Delta_{2,j-1}} \right), & y_{j-1} \leq \tau \leq y_j, \\ 0, & \tau \notin [y_{j-1}, y_{j+1}], \end{cases}$$

$j = \overline{m+1, M}$.

Несложно показать, что матрица $-A$ представляет собой матрицу Грама системы функций $\varphi_j(\cdot)$. Вычисляя скалярное произведение функций $\varphi_j(\cdot), \varphi_j(\cdot)$ в пространстве $L_2(y_m, y_{M+1})$, получим

$$\begin{aligned} (\varphi_j(\cdot), \varphi_j(\cdot)) &= \frac{u_{i,j}^2}{\Delta_{1,i}} \left[\int_{y_j}^{y_{j+1}} H_{1,i,j}^2 \left(\frac{\tau - y_j}{\Delta_{2,j}} \right) d\tau + \int_{y_{j-1}}^{y_j} H_{0,i,j}^2 \left(\frac{\tau - y_{j-1}}{\Delta_{2,j-1}} \right) d\tau \right] = \\ &= \frac{u_{i,j}^2}{\Delta_{1,i}} \int_0^1 (\Delta_{2,j} H_{1,i,j}^2(t) + \Delta_{2,j-1} H_{0,i,j}^2(t)) dt, \end{aligned}$$

что совпадает с $-a_{j,j}$.

Аналогично скалярное произведение функций $\varphi_j(\cdot), \varphi_{j+1}(\cdot)$ будет равно

$$\begin{aligned} (\varphi_j(\cdot), \varphi_{j+1}(\cdot)) &= \frac{u_{i,j} u_{i,j+1}}{\Delta_{1,i}} \left[\int_{y_j}^{y_{j+1}} H_{1,i,j} \left(\frac{\tau - y_j}{\Delta_{2,j}} \right) H_{0,i,j} \left(\frac{\tau - y_j}{\Delta_{2,j}} \right) d\tau \right] = \\ &= \Delta_{2,j} \frac{u_{i,j} u_{i,j+1}}{\Delta_{1,i}} \int_0^1 H_{1,i,j}(t) H_{0,i,j}(t) dt = -a_{j,j+1}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\varphi_j(\cdot)$ ($j = \overline{m+1, M}$) — линейно независимая система функций (это — функции-«крышки» с образующими $H_{0,i,j}(\cdot)$, зависящими от $H_{1,i,j}(\cdot)$).

Аналогично устанавливается, что B — матрица Грама линейно независимой системы функций. Неравенства (11) доказаны.

Теперь докажем, что для $\mathbf{h}(\cdot) \in H$ выполняется

$$\begin{aligned}
(\Lambda \mathbf{h}(\cdot), \mathbf{h}(\cdot))_H &\geq \gamma \|\mathbf{h}(\cdot)\|_H^2, \\
(\Lambda \mathbf{h}(\cdot), \mathbf{h}(\cdot))_H &= \int_0^1 \left[(a_{m+1,m+1} h_1''(t) + a_{m+1,m+2} h_2''(t)) h_1(t) + \right. \\
&+ \sum_{i=m+2}^{M-1} (a_{i-1,i} h_{i-m-1}''(t) + a_{i,i} h_{i-m}''(t) + a_{i,i+1} h_{i-m+1}''(t)) h_{i-m}(t) + (a_{M,M-1} h_{M-m-1}''(t) + \\
&+ a_{M,M} h_{M-m}''(t)) h_{M-m}(t) + (b_{m,m+1} h_1(t) + b_{m+1,m+2} h_2(t)) h_1(t) + \\
&+ \sum_{i=m+2}^{M-1} (b_{i-1,i} h_{i-m-1}(t) + b_{i,i} h_{i-m}(t) + b_{i,i+1} h_{i-m+1}(t)) h_{i-m}(t) + \\
&\left. + (b_{M,M-1} h_{M-m-1}(t) + b_{M,M} h_{M-m}(t)) h_{M-m}(t) \right] dt = \\
&= \int_0^1 \left[-a_{m+1,m+1} (h_1'(t))^2 - a_{m+1,m+2} h_1'(t) h_2'(t) - \right. \\
&- \sum_{i=m+2}^{M-1} (a_{i-1,i} h_{i-m-1}'(t) h_{i-m}'(t) + a_{i,i} (h_{i-m}'(t))^2 + a_{i,i+1} h_{i-m-1}'(t) h_{i-m}'(t) - \\
&- a_{M,M-1} h_{M-m-1}'(t) h_{M-m}'(t) - a_{M,M} h_{M-m}'(t) h_{M-m}'(t) + (b_{m+1,m+1} h_1(t) + \\
&+ b_{m+1,m+2} h_2(t)) h_1(t) + \sum_{i=m+2}^{M-1} (b_{i-1,i} h_{i-m-1}(t) + b_{i,i} h_{i-m}(t) + b_{i,i+1} h_{i-m+1}(t)) h_{i-m}(t) + \\
&\left. + (b_{M,M-1} h_{M-m-1}(t) + b_{M,M} h_{M-m}(t)) h_{M-m}(t) \right] dt \geq \lambda_A \int_0^1 \sum_{l=m+1}^M (h_{i-m}'(t))^2 dt + \\
&+ \lambda_B \int_0^1 \sum_{l=m+1}^M (h_{i-m}^2(t) dt) \geq (\pi^2 \lambda_A + \lambda_B) \int_0^1 \sum_{l=m+1}^M (h_{i-m}^2(t) dt) = (\pi^2 \lambda_A + \lambda_B) \|\mathbf{h}(\cdot)\|_H^2.
\end{aligned}$$

При преобразованиях использовалось интегрирование по частям и неравенство В.А. Стеклова [15, с. 346].

Из положительной определенности Λ следует, что обобщенное решение краевой задачи (10), а значит и задачи (9), существует и является единственным. Заметим при этом, что введенное пространство H может оказаться слишком узким для существования решения, но это пространство и положительно-определенный оператор Λ всегда могут быть расширены [14, с. 88].

Теорема 3 доказана.

2.2. Базисные функции из класса кусочно-линейных функций. Рассмотрим задачу (5) с приближенным решением в виде (6). В отличие от случая в разд. 2, считаем, что базисные функции $h_{\mu,i,j}(\cdot)$, $H_{\mu,i,j}(\cdot)$, $\mu = 0, 1$, являются кусочно-линейными. Определим эти функции следующим образом. Пусть N_x, N_y — целые числа больше 1. Считаем, что функции $h_{\mu,i,j}(\cdot)$, $\mu = 0, 1$, являются линейными на интервалах $[k/N_x, (k+1)/N_x]$, $k = 0, N_x - 1$, аналогично $H_{\mu,i,j}(\cdot)$ — линейные на $[k/N_y, (k+1)/N_y]$, $k = 0, N_y - 1$. Кроме того, выполнено

$$\begin{aligned}
h_{1,i,j}(k/N_x) &= h_{1,i,j,k}, \quad k = 0, 1, \dots, N_x, \quad h_{1,i,j,0} = 1, \quad h_{1,i,j,N_x} = 0, \\
h_{0,i,j}(k/N_x) &= h_{0,i,j,k}, \quad k = 0, 1, \dots, N_x, \quad h_{0,i,j,0} = 0, \quad h_{0,i,j,N_x} = 1, \\
H_{1,i,j}(k/N_y) &= H_{1,i,j,k}, \quad k = 0, 1, \dots, N_y, \quad H_{1,i,j,0} = 1, \quad H_{1,i,j,N_y} = 0, \\
H_{0,i,j}(k/N_y) &= H_{0,i,j,k}, \quad k = 0, 1, \dots, N_y, \quad H_{0,i,j,0} = 0, \quad H_{0,i,j,N_y} = 1.
\end{aligned}$$

В соответствии с этими определениями, каждая базисная функция $h_{\mu,i,j}(\cdot)$ и $H_{\mu,i,j}(\cdot)$ имеет соответственно $N_x - 1$ и $N_y - 1$ свободных параметров (степеней свободы).

Очевидно, при таком определении функций $h_{1,i,j}(\cdot)$, $h_{0,i,j}(\cdot)$, $H_{1,i,j}(\cdot)$, $H_{0,i,j}(\cdot)$ выполняется равенство $\tilde{u}(x_i, y_j) = u_{i,j}$ для всех внутренних точек (x_i, y_j) разбиения области.

Приближенное решение $\tilde{u}(x, y)$ находим из условия минимизации функционала энергии (7).

Минимизацию осуществляем по узловым параметрам $u_{i,j}$ и свободным параметрам функций $h_{1,i,j,k}$, $h_{0,i,j,k}$ ($k = 0, N_x - 1$), $H_{1,i,j,k}$, $H_{0,i,j,k}$ ($k = 0, N_y - 1$)

$$J(\tilde{u}) \rightarrow \min \text{ (по } u_{i,j}, h_{1,i,j,k}, h_{0,i,j,k}, H_{1,i,j,k}, H_{0,i,j,k}\text{)}.$$

Минимизацию проводим с помощью следующего итерационного процесса. В качестве начального приближения для параметров $h_{1,i,j,k}$, $h_{0,i,j,k}$, $H_{1,i,j,k}$, $H_{0,i,j,k}$ выберем следующие:

$$\begin{aligned}
h_{1,i,j,k}^{[0]} &= (N_x - k)/N_x, \quad h_{0,i,j,k}^{[0]} = k/N_x, \quad k = 1, 2, \dots, N_x - 1, \\
H_{1,i,j,k}^{[0]} &= (N_y - k)/N_y, \quad H_{0,i,j,k}^{[0]} = k/N_y, \quad k = 1, 2, \dots, N_y - 1.
\end{aligned}$$

Верхний индекс [0] означает начальное приближение. Подставляя $h_{1,i,j,k}^{[0]}$, $h_{0,i,j,k}^{[0]}$ ($k = 1, N_x - 1$), $H_{1,i,j,k}^{[0]}$, $H_{0,i,j,k}^{[0]}$ ($k = 1, N_y - 1$) в $\tilde{u}(x, y)$, получаем задачу минимизации $J(\tilde{u})$ по узловым параметрам $u_{i,j}$. Эта задача сводится к системе Ритца $\frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial u_{i,j}} = 0$ по всем внутренним узлам (x_i, y_j) и решается однозначно.

Обозначим $u_{i,j}^{[0,0]}$ узловые параметры, найденные на этом шаге. Верхний индекс [0, 0] означает, что при вычислении $u_{i,j}$ использовались начальные приближения параметров $h_{1,i,j,k}$, $h_{0,i,j,k}$, $H_{1,i,j,k}$, $H_{0,i,j,k}$.

Подставим параметры $h_{0,i,j,k}^{[0]}$ ($k = 1, N_x - 1$), $H_{1,i,j,k}^{[0]}$, $H_{0,i,j,k}^{[0]}$ ($k = 1, N_y - 1$) в $\tilde{u}(x, y)$ и найдем минимум функционала $J(\tilde{u})$ по параметрам $h_{1,i,j,k}$ ($k = 1, 2, \dots, N_x - 1$). Найденные таким образом параметры $h_{1,i,j,k}$ обозначим $h_{1,i,j,k}^{[1]}$, где [1] означает первое приближение. Подставим $h_{1,i,j,k}^{[1]}$ ($k = 1, N_x - 1$), $H_{1,i,j,k}^{[0]}$, $H_{0,i,j,k}^{[0]}$ ($k = 1, N_y - 1$) и $u_{i,j}^{[0,0]}$ в $\tilde{u}(x, y)$ и найдем минимум функционала $J(\tilde{u})$ по параметрам $h_{0,i,j,k}$ ($k = 1, 2, \dots, N_x - 1$).

Как и на начальном шаге, подставим $h_{0,i,j,k}^{[1]}$ ($\overline{k=1, N_x-1}$), $H_{1,i,j,k}^{[0]}$, $H_{0,i,j,k}^{[0]}$ ($\overline{k=1, N_y-1}$) в $\tilde{u}(x, y)$, минимизируем $J(\tilde{u})$ по $u_{i,j}$, найденные таким образом узловые параметры обозначим $u_{i,j}^{[1,0]}$.

После подстановки $u_{i,j}^{[1,0]}$, $h_{1,i,j,k}^{[1]}$, $h_{0,i,j,k}^{[1]}$ ($k=1, 2, \dots, N_x-1$) и $H_{0,i,j,k}^{[0]}$ ($\overline{k=1, N_y-1}$) в $\tilde{u}(x, y)$ получаем задачу минимизации $J(\tilde{u})$ по $H_{1,i,j,k}$. Найденные параметры обозначим $H_{0,i,j,k}^{[1]}$ ($\overline{k=1, N_y-1}$). Теперь подставляем в $\tilde{u}(x, y)$ параметры $u_{i,j}^{[1,0]}$, $h_{1,i,j,k}^{[1]}$, $h_{0,i,j,k}^{[1]}$ ($\overline{k=1, N_x-1}$), $H_{1,i,j,k}^{[1]}$ ($\overline{k=1, N_y-1}$) и минимизируем $J(\tilde{u})$ по $H_{0,i,j,k}^{[0]}$. Найденные значения обозначим $H_{0,i,j,k}^{[1]}$.

Аналогично описанному выше способу после подстановки $h_{1,i,j,k}^{[1]}$, $h_{0,i,j,k}^{[1]}$, $H_{1,i,j,k}^{[1]}$, $H_{0,i,j,k}^{[1]}$ в $\tilde{u}(x, y)$ находим минимальное значение $J(\tilde{u})$ по $u_{i,j}$, найденные узловые параметры обозначим $u_{i,j}^{[1,1]}$.

Этот итерационный процесс на начальном шаге можно представить следующей схемой

$$\begin{aligned} \{h_{1,i,j,k}^{[0]}, h_{0,i,j,k}^{[0]}, H_{1,i,j,k}^{[0]}, H_{0,i,j,k}^{[0]}\} &\mapsto u_{i,j}^{[0,0]}, \\ \{u_{i,j}^{[0,0]}, h_{0,i,j,k}^{[0]}, H_{1,i,j,k}^{[0]}, H_{0,i,j,k}^{[0]}\} &\mapsto h_{1,i,j,k}^{[1]}, \\ \{u_{i,j}^{[0,0]}, h_{1,i,j,k}^{[1]}, H_{1,i,j,k}^{[0]}, H_{0,i,j,k}^{[0]}\} &\mapsto h_{0,i,j,k}^{[1]}, \\ \{h_{1,i,j,k}^{[1]}, h_{0,i,j,k}^{[1]}, H_{1,i,j,k}^{[0]}, H_{0,i,j,k}^{[0]}\} &\mapsto u_{i,j}^{[1,0]}, \\ \{u_{i,j}^{[1,0]}, h_{1,i,j,k}^{[1]}, h_{0,i,j,k}^{[1]}, H_{0,i,j,k}^{[0]}\} &\mapsto H_{1,i,j,k}^{[1]}, \\ \{u_{i,j}^{[1,0]}, h_{1,i,j,k}^{[1]}, h_{0,i,j,k}^{[1]}, H_{1,i,j,k}^{[1]}\} &\mapsto H_{0,i,j,k}^{[1]}, \\ \{h_{1,i,j,k}^{[1]}, h_{0,i,j,k}^{[1]}, H_{1,i,j,k}^{[1]}, H_{0,i,j,k}^{[1]}\} &\mapsto u_{i,j}^{[1,1]}. \end{aligned}$$

Соответственно, на шаге n схема имеет вид

$$\begin{aligned} \{h_{1,i,j,k}^{[n]}, h_{0,i,j,k}^{[n]}, H_{1,i,j,k}^{[n]}, H_{0,i,j,k}^{[n]}\} &\mapsto u_{i,j}^{[n,n]}, \\ \{u_{i,j}^{[n,n]}, h_{0,i,j,k}^{[n]}, H_{1,i,j,k}^{[n]}, H_{0,i,j,k}^{[n]}\} &\mapsto h_{1,i,j,k}^{[n+1]}, \\ \{u_{i,j}^{[n,n]}, h_{1,i,j,k}^{[n+1]}, H_{1,i,j,k}^{[n]}, H_{0,i,j,k}^{[n]}\} &\mapsto h_{0,i,j,k}^{[n+1]}, \\ \{h_{1,i,j,k}^{[n+1]}, h_{0,i,j,k}^{[n+1]}, H_{1,i,j,k}^{[n]}, H_{0,i,j,k}^{[n]}\} &\mapsto u_{i,j}^{[n+1,n]}, \\ \{u_{i,j}^{[n+1,n]}, h_{1,i,j,k}^{[n+1]}, h_{0,i,j,k}^{[n+1]}, H_{0,i,j,k}^{[n]}\} &\mapsto H_{1,i,j,k}^{[n+1]}, \\ \{u_{i,j}^{[n+1,n]}, h_{1,i,j,k}^{[n+1]}, h_{0,i,j,k}^{[n+1]}, H_{1,i,j,k}^{[n+1]}\} &\mapsto H_{0,i,j,k}^{[n+1]}, \\ \{h_{1,i,j,k}^{[n+1]}, h_{0,i,j,k}^{[n+1]}, H_{1,i,j,k}^{[n+1]}, H_{0,i,j,k}^{[n+1]}\} &\mapsto u_{i,j}^{[n+1,n+1]}. \end{aligned}$$

Нахождение $u_{i,j}$ из системы Ритца не представляет трудностей.

Опишем нахождение параметров $h_{1,i,j,k}$, $h_{0,i,j,k}$, $H_{1,i,j,k}$, $H_{0,i,j,k}$.

Пусть $\Pi_{i,m}$, $\Pi_{i,m+1}$, \dots , $\Pi_{i,M}$ — совокупность прямоугольных элементов, для которых границы $\{(x, y) | x_i \leq x \leq x_{i+1}, y = y_m\}$ и $\{(x, y) | x_i \leq x \leq x_{i+1}, y = y_{m+1}\}$ элементов $\Pi_{i,m}$ и $\Pi_{i,M}$ соответственно принадлежат ∂G и ни одна из границ $\{(x, y) | x_i \leq x \leq x_{i+1}, y = y_j\}$, $j = \overline{m+1, M}$, не принадлежит ∂G . Это означает, что область $[x_i, x_{i+1}] \times [y_m, y_{m+1}]$ (за исключением границы) лежит в G . Как следует из представленной итерационной процедуры, на шаге n при фиксированных значениях $u_{i,j}^{[n]}$, $H_{1,i,j,k}^{[n]}$, $H_{0,i,j,k}^{[n]}$ (здесь индексы i, j такие, что параметры $u_{i,j}^{[n]}$, $H_{1,i,j,k}^{[n]}$, $H_{0,i,j,k}^{[n]}$ ($k = 1, N_y - 1$) определяют значение $\tilde{u}(x, y)$ в $[x_i, x_{i+1}] \times [y_m, y_{m+1}]$) в соответствии с данной процедурой могут быть найдены параметры $h_{0,i,j,k}^{[n+1]}$, $h_{1,i,j,k}^{[n+1]}$ ($k = 1, N_x - 1$). При этом в соответствии со структурой приближенного решения нахождение $h_{0,i,j,k}^{[n+1]}$ и $h_{1,i,j,k}^{[n+1]}$ можно производить в каждой области $[x_i, x_{i+1}] \times [y_m, y_{m+1}]$, удовлетворяющей указанному выше условию.

Предположим, что область $[x_i, x_{i+1}] \times [y_m, y_{m+1}]$, удовлетворяющая на-
званным выше условиям, выделена. Приведем формулы для нахождения $h_{1,i,j,k}^{[n+1]}$ ($k = 1, 2, \dots, N_x - 1, j = \overline{m+1, M}$) при фиксированных $u_{i,j}^{[n]}$, $h_{0,i,j,k}^{[n]}$, $H_{1,i,j,k}^{[n]}$, $H_{0,i,j,k}^{[n]}$. Ниже для сокращения записи верхние индексы в обозначениях этих параметров опустим.

Значения $h_{1,i,j,k}$ находим как решение системы уравнений

$$\frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial h_{1,i,j,k}} = 0 \quad ((k = \overline{1, N_x - 1}, j = \overline{m+1, M}), (x_i, y_j) \notin \partial G).$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Пусть все узлы (x_i, y_j) при $j = m+1, m+2, \dots, M$ являются внут-
ренними для области G : $(x_i, y_j) \notin \partial G$. Тогда система уравнений $\frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial h_{1,i,j,k}} = 0$ для $k = 1, 2, \dots, N_x - 1, j = m+1, m+2, \dots, M$ представляет систему линейных уравнений

$$Ah = F,$$

где A — матрица $(N_x - 1)(M - m) \times (N_x - 1)(M - m)$, F — вектор размерности $(N_x - 1)(M - m)$. Матрица A имеет блочно-трехдиагональную структуру:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{32} & A_{33} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A_{M-m-2, M-m-2} & A_{M-m-2, M-m-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A_{M-m-1, M-m-2} & A_{M-m-1, M-m-1} & A_{M-m-1, M-m} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & A_{M-m, M-m-1} & A_{M-m, M-m} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} — блоки размером $(N_x - 1) \times (N_x - 1)$, $\mathbf{0}$ — нулевые блоки размером $(N_x - 1) \times (N_x - 1)$.

Каждый блок A_{ij} является трехдиагональной матрицей:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij,1,1} & a_{ij,1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{ij,2,1} & a_{ij,2,2} & a_{ij,2,3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{ij,3,2} & a_{ij,3,3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{ij,N_x-2,N_x-2} & a_{ij,N_x-2,N_x-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{ij,N_x-1,N_x-2} & a_{ij,N_x-1,N_x-1} \end{pmatrix}.$$

Блоки A_{ii} , $i = \overline{1, M-m}$, являются симметричными матрицами, а для блоков A_{ij} , $i \neq j$, выполняется равенство $A_{ij} = A_{ji}^T$. Следовательно, вся матрица A является симметричной.

Доказательство осуществляется путем подстановки решения $\tilde{u}(x, y)$ в функционал энергии и нахождения производных $\frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial h_{1,i,j,k}} = 0$ для $k = 1, 2, \dots, N_x - 1$,

$j = m+1, m+2, \dots, M$.

Приведем значения некоторых коэффициентов блоков A_{ij} .

$$\begin{aligned} a_{jj,k,k} &= 4u_{i,j}^2 \left(\frac{1}{N_x N_y \Delta_{1,i} \Delta_{2,j}} \sum_{j'=1}^{N_y-1} ((N_y^2 \Delta_{1,i}^2 + N_x^2 \Delta_{2,j}^2) H_{1,i,j,j'}^2 + \right. \\ &+ (N_x^2 \Delta_{2,j}^2 - 2N_y^2 \Delta_{1,i}^2) H_{1,i,j,j'} H_{1,i,j,j'+1} + (N_y^2 \Delta_{1,i}^2 + N_x^2 \Delta_{2,j}^2) H_{1,i,j,j'+1}^2) + \\ &+ \frac{1}{N_x N_y \Delta_{1,i} \Delta_{2,j-1}} \sum_{j'=1}^{N_y-1} ((N_y^2 \Delta_{1,i}^2 + N_x^2 \Delta_{2,j-1}^2) H_{0,i,j,j'}^2 + \\ &+ (N_x^2 \Delta_{2,j-1}^2 - 2N_y^2 \Delta_{1,i}^2) H_{0,i,j,j'} H_{0,i,j,j'+1} + (N_y^2 \Delta_{1,i}^2 + N_x^2 \Delta_{2,j-1}^2) H_{0,i,j,j'+1}^2)), \\ &k = \overline{1, N_x - 1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{jj,k,k+1} &= \frac{1}{3N_x N_y \Delta_{1,i} \Delta_{2,j}} u_{i,j}^2 \sum_{j'=1}^{N_y-1} ((N_y^2 \Delta_{1,i}^2 - 2N_x^2 \Delta_{2,j}^2) H_{1,i,j,j'}^2 - \\ &- 2(N_y^2 \Delta_{1,i}^2 + N_x^2 \Delta_{2,j}^2) H_{1,i,j,j'} H_{1,i,j,j'+1} + (N_y^2 \Delta_{1,i}^2 - 2N_x^2 \Delta_{2,j}^2) H_{1,i,j,j'+1}^2) + \\ &+ \frac{1}{3N_x N_y \Delta_{1,i} \Delta_{2,j-1}} u_{i,j}^2 \sum_{j'=1}^{N_y-1} ((N_y^2 \Delta_{1,i}^2 - 2N_x^2 \Delta_{2,j-1}^2) H_{0,i,j,j'}^2 - \\ &- 2(N_x^2 \Delta_{2,j-1}^2 + N_y^2 \Delta_{1,i}^2) H_{0,i,j,j'} H_{0,i,j,j'+1} + (N_y^2 \Delta_{1,i}^2 - 2N_x^2 \Delta_{2,j-1}^2) H_{0,i,j,j'+1}^2)), \\ &k = \overline{1, N_x - 2}. \end{aligned}$$

Для правой части системы коэффициенты, соответствующие блоку с номером j , равны

$$\begin{aligned}
F_j = & \frac{\Delta_{1,i}\Delta_{2,j}}{N_x N_y} u_{i,j} \sum_{j'=1}^{N_y-1} (H_{1,i,j,j'} + H_{1,i,j,j'+1}) - \frac{u_{i,j}u_{i+1,j}}{3N_x N_y \Delta_{1,i} \Delta_{1,j}} \times \\
& \times \sum_{j'=1}^{N_y-1} h_{0,i+1,j,j'} (H_{1,i,j,j'} (2(N_y^2 \Delta_{1,i}^2 + N_x^2 \Delta_{2,j}^2) H_{1,i+1,j,j'} + \\
& + (N_x^2 \Delta_{2,j}^2 - 2N_y^2 \Delta_{1,i}^2) H_{1,i+1,j+1,j'+1}) + H_{1,i,j,j'+1} ((N_x^2 \Delta_{2,j}^2 - 2N_y^2 \Delta_{1,i}^2) H_{1,i+1,j,j'+1} + \\
& + 2(N_x^2 \Delta_{2,j}^2 + 2N_y^2 \Delta_{1,i}^2) H_{1,i+1,j,j'+1})).
\end{aligned}$$

Аналогичные результаты имеют место и для других шагов итерационного процесса, т.е. при решении систем $\frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial h_{0,i,j,k}} = 0$, $\frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial H_{1,i,j,k}} = 0$, $\frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial H_{0,i,j,k}} = 0$.

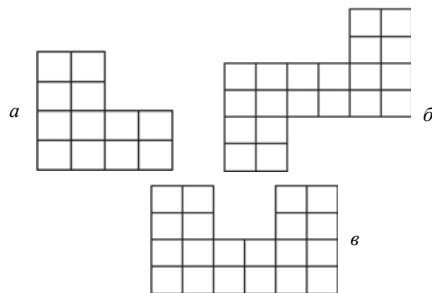
В соответствии со свойствами блочных 3-диагональных матриц матрица A невырождена.

3. Вычислительный эксперимент

С модельной задачей — двумерной граничной задачей Дирихле для уравнения Пуассона с постоянной правой частью

$$\begin{aligned}
\Delta u(x, y) &= -1, \quad (x, y) \in G, \\
u(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in \partial G,
\end{aligned} \tag{12}$$

для трех областей: Г-образной ($([0, 2] \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times [0, 2])$), обозначается как область a), Z-образной ($([0, 1] \times [0, 1]) \cup ([0, 3] \times [1, 2]) \cup ([2, 3] \times [2, 3])$), область b), П-образной ($([0, 3] \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times [1, 2]) \cup ([2, 3] \times [1, 2])$), область $в$) — был проведен вычислительный эксперимент. Выбрано равномерное разбиение $\Delta_x = \Delta_y = 1/2$ (для удобства используем обозначения Δ_x, Δ_y вместо $\Delta_{1,i}, \Delta_{2,i_2}$ соответственно). На рисунке представлены используемые в эксперименте области $a, b, в$ с нанесенными сетками, соответствующими разбиению $\Delta_x = \Delta_y = 1/2$.



Эксперимент проводился для обоих описанных методов — с базисными функциями из класса $W_2^2(0, 1)$ и кусочно-линейными базисными функциями. Для метода с базисными функциями из класса $W_2^2(0, 1)$ проводились итерации до получения решения, представленного набором $h_{\mu,i,j}^{[2]}, H_{\mu,i,j}^{[2]}, u_{i,j}^{[2,2]}$, для метода с кусочно-линейными базисными функциями — до получения решения, соответствующего набору $h_{\mu,i,j,k}^{[3]}, H_{\mu,i,j,k}^{[3]}, u_{i,j}^{[3,3]}$. Общий принцип выбора количества итераций состоит в том, что итерации проводились до тех пор, пока изменение функционала энергии не становилось пренебрежимо малым.

Для приближенного решения, получаемого на каждом шаге итерационного процесса, вычислялся функционал энергии этого решения и количество степеней свободы классического приближенного решения, при котором точность этого классического решения в энергетической норме не уступает точности решения с выбором базисных функций. Под классическим решением здесь подразумевается приближенное решение вида (6) с линейными базисными функциями ($h_{\mu,i,j}(t) = \mu + (1 - 2\mu)t$, $H_{\mu,i,j}(t) = \mu + (1 - 2\mu)t$, $\mu = 0, 1$), которые фиксировались, а изменялась только сетка разбиения.

Близость приближенного решения (как с выбором базисных функций, так и классического) к точному оценивалась по значению функционала энергии приближенного решения, которое для эллиптических задач связано с погрешностью следующим образом [14]:

$$J(u) = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2,$$

где $\|\cdot\|_A$ — энергетическая норма, порождаемая оператором A краевой задачи (в нашем случае A — оператор Лапласа).

Таким образом, практически выбор количества степеней свободы классического решения состоял в следующем. После вычисления очередной итерации решения с выбором базисных функций и нахождения значения функционала энергии этого решения находилось приближенное классическое решение с максимальным шагом разбиения области, при котором значение функционала энергии не превосходило значение функционала решения с выбором базисных функций. Шаг разбиения выбирался равномерным, при этом $\Delta_x = \Delta_y$. В качестве начальных базисных функций обоих методов выбирались линейные функции.

3.1. Приближенное решение с базисными функциями из класса $W_2^2(0, 1)$.

В табл. 1 приведены результаты численного эксперимента, в котором строились приближенные решения с базисными функциями из класса $W_2^2(0, 1)$. Использованы такие обозначения: N_{appr} — число степеней свободы (число узловых параметров) приближенного решения с выбором базисных функций, «Итерации» — наборы базисных функций и узловых параметров с номерами итераций в верхних индексах, результаты по которым занесены в табл. 1.

Таблица 1

Область	N_{appr}	Итерации	$J(\tilde{u})$	N_{cls}
а	5	$h_{\mu,i,j}^{[0]}(\cdot), H_{\mu,i,j}^{[0]}(\cdot), u_{i,j}^{[0,0]}$	-0,63502358	5
		$h_{\mu,i,j}^{[1]}(\cdot), H_{\mu,i,j}^{[1]}(\cdot), u_{i,j}^{[1,1]}$	-0,84889878	465
		$h_{\mu,i,j}^{[2]}(\cdot), H_{\mu,i,j}^{[2]}(\cdot), u_{i,j}^{[2,2]}$	-0,85337245	1365
б	9	$h_{\mu,i,j}^{[0]}(\cdot), H_{\mu,i,j}^{[0]}(\cdot), u_{i,j}^{[0,0]}$	-1,18308396	9
		$h_{\mu,i,j}^{[1]}(\cdot), H_{\mu,i,j}^{[1]}(\cdot), u_{i,j}^{[1,1]}$	-1,58127760	768
		$h_{\mu,i,j}^{[2]}(\cdot), H_{\mu,i,j}^{[2]}(\cdot), u_{i,j}^{[2,2]}$	-1,59033727	2508
в	9	$h_{\mu,i,j}^{[0]}(\cdot), H_{\mu,i,j}^{[0]}(\cdot), u_{i,j}^{[0,0]}$	-1,18308396	9
		$h_{\mu,i,j}^{[1]}(\cdot), H_{\mu,i,j}^{[1]}(\cdot), u_{i,j}^{[1,1]}$	-1,54836798	204
		$h_{\mu,i,j}^{[2]}(\cdot), H_{\mu,i,j}^{[2]}(\cdot), u_{i,j}^{[2,2]}$	-1,58509504	1185

В табл. 1 представлены характеристики приближенных решений с базисными функциями из класса $W_2^2(0, 1)$ для областей а, б, в, где $J(\tilde{u})$ — значение функционала

ла энергии для приближенного решения с выбором базисных функций, N_{cls} — число степеней свободы классического приближенного решения, не уступающего по точности приближенному решению с выбором базисных функций. Промежуточные итерации из схемы (8) для краткости в табл. 1 опущены.

Результаты в табл. 1 демонстрируют высокую точность схемы МКЭ с выбором базисных функций из $W_2^2(0,1)$. Так, для области a приближенное решение с выбором базисных функций с 5-ю степенями свободы имеет точность, сопоставимую с точностью классического приближенного решения с 1365 степенями свободы (отношение степеней свободы равно 273). Для областей b и v это отношение равно 279 и 132 соответственно.

3.2. Приближенное решение с кусочно-линейными базисными функциями.

В табл. 2 приведены результаты численного эксперимента для приближенного решения на основе кусочно-линейных базисных функций для областей a , b , v . Итерации проведены до получения набора $h_{1,i,j,k}^{[3]}$, $h_{0,i,j,k}^{[3]}$, $H_{1,i,j,k}^{[3]}$, $H_{0,i,j,k}^{[3]}$, $u_{i,j}^{[3,3]}$, параметры которого и приведены в табл. 2. Все промежуточные итерации опущены. Используются следующие обозначения: N_x, N_y — число свободных параметров функций $h_{1,i,j}(\cdot)$, $h_{0,i,j}(\cdot)$ и $H_{1,i,j}(\cdot)$, $H_{0,i,j}(\cdot)$ соответственно; N_{apr} — число степеней свободы приближенного решения с кусочно-линейными базисными функциями (определяется как сумма свободных узловых параметров в точках (x_i, y_j) и свободных параметров, связанных с каждой базисной функцией); $J(\tilde{u})$ — значение функционала энергии для приближенного решения с выбором базисных функций; N_{cls} — число степеней свободы классического приближенного решения, не уступающего по точности приближенному решению с выбором базисных функций. Кроме характеристик, приведенных в табл. 1, вычислялись числа обусловленности матриц, возникающих в эксперименте. Именно для приближенного решения с выбором базисных функций вычислялись числа обусловленности матриц A (теорема 2), которые используются при нахождении очередных итераций функций $h_{1,i,j}(\cdot)$, $h_{0,i,j}(\cdot)$, матриц, используемых при нахождении очередных итераций функций $H_{1,i,j}(\cdot)$, $H_{0,i,j}(\cdot)$, и матриц системы Рунта. Максимальное из этих чисел обозначено в табл. 2 как C_{apr} . Число обусловленности матрицы Рунта, которая используется при нахождении приближенного классического решения, не уступающего по точности приближенному решению с выбором базисных функций, обозначено C_{cls} .

Таблица 2

Область	N_x, N_y	N_{apr}	$J(\tilde{u})$	C_{apr}	N_{cls}	C_{apr}
a	3	45	-0,82331608	5,958283062	85	28,37214130
	4	65	-0,83372808	15,24330663	120	38,26283431
	6	105	-0,84117916	33,80613231	208	64,15706082
	8	145	-0,84378994	59,89769215	261	78,79849508
	10	185	-0,84499888	93,39351449	320	95,57584792
b	3	77	-1,53294644	5,980329834	146	28,78790660
	4	113	-1,55226254	15,29992224	204	38,96902391
	6	185	-1,56608490	33,9319599	352	65,15460070
	8	261	-1,57092803	60,12059305	441	80,22556185
	10	333	-1,57317067	93,74114592	441	80,22556185
v	3	77	-1,53298431	5,812306887	146	28,78790660
	4	113	-1,55230296	14,9642479	204	38,96902391
	6	185	-1,56612779	33,26700182	352	65,15460070
	8	261	-1,57097193	58,95094945	441	80,22556185
	10	333	-1,57321507	91,93987362	441	80,22556185

Из табл. 2 следует, что использование схемы с кусочно-линейными базисными функциями имеет заметные преимущества только для небольших значений N_x, N_y . Например, для области a при $N_x = 3, N_y = 3$ приближенное решение с кусочно-линейными базисными функциями и классическое приближенное решение, имеющие сопоставимую точность в энергетической норме, характеризуются тем, что отношение степеней свободы данных решений (классического к решению с выбором базисных функций) равно примерно 1:2, а отношение числа обусловленности — 1:5. С увеличением параметров N_x, N_y эти отношения убывают. Это говорит о том, что сопоставимые по точности приближенные решения сближаются по этим двум важным характеристикам. Такая же особенность характерна и для областей $b, в$ и, видимо, является общим свойством данной схемы.

Заключение

В данной работе предложено дальнейшее расширение вычислительных схем МКЭ с выбором оптимальных базисных функций для эллиптических краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Схема отличается от ранее использованных новым вычислительным алгоритмом нахождения локальной системы базисных функций, связанных с каждым узлом, в отличие от общей системы функций, предложенной ранее. Можно сказать, что данная схема повышает адаптивность вычислительной схемы и приводит, как показывает вычислительный эксперимент, к значительному повышению точности приближенных решений, полученных согласно схеме.

Предложенная схема применена к модельной задаче, для которой разработаны итерационные методы построения приближенного решения. Эти методы включают итерации двух видов: решение системы Рунта и нахождение системы базисных функций. Если решение системы Рунта не представляет затруднений и является классической процедурой МКЭ, нахождение системы базисных функций зависит от выбранного класса этих функций (теоремы 1, 4). На основе этих результатов проведен вычислительный эксперимент, который показал преимущества метода на модельной задаче для трех относительно несложных областей. Для метода с кусочно-линейными базисными функциями схема демонстрирует высокую эффективность только для базисных функций с небольшим числом свободных параметров.

Отметим, что решение граничных задач с помощью данной схемы оптимального метода конечных элементов позволяет использовать алгоритмы с распараллеливанием вычислений, так как нахождение базисных функций в отдельных подобластях (в нашей модельной задаче — в области, составленной из конечных элементов) происходит независимо. Эта особенность схемы может оказаться важной при решении задач для областей сложной конфигурации или задач высокой размерности.

О.М. Литвин, К.В. Носов, Т.А. Баранова

РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ОПТИМАЛЬНИМ ВИБОРОМ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА

Запропоновано схему методу скінченних елементів з вибором базисних функцій для еліптичних крайових задач. Головною особливістю даної схеми є те, що базисні функції, які формують наближене рішення, знаходяться поряд з вузловими параметрами, а не задаються наперед. Обчислювальний експеримент продемонстрував, що дана схема має значно вищу точність в порівнянні з класичними схемами, у яких базисні функції фіксовані.

REALIZATION OF THE FINITE ELEMENT METHOD
WITH OPTIMAL CHOICE OF BASIC FUNCTIONS
FOR DIRICHLET PROBLEM FOR POISSON EQUATION

The paper deals with the scheme of the finite element method with choice of basic functions for elliptic boundary value problems. The main feature of this scheme is that the basic functions forming an approximate solution are not fixed in advance, but should be calculated along with values of nodes parameters. Computational experiment demonstrated that the scheme has a much higher accuracy compared with conventional schemes, for which the basic functions are fixed.

1. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М. : Мир, 1980. — 512 с.
2. Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. — М. : Мир, 1981. — 216 с.
3. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The finite element method: its basis and fundamentals. — Butterworth-Heinemann, 2003. — 756 p.
4. Литвин О.Н. К вопросу о построении оптимальных схем МКЭ // Тезисы докл. 2-й Респ. конференции «Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе». — Киев : Институт кибернетики АН УССР. — 1978. — С. 21–22.
5. Литвин О.Н. Оптимальные координатные функции в методе конечных элементов // Дифференциальные уравнения. — 1984. — 20, № 4. — С. 677–688.
6. Литвин О.М. Методи обчислень. Додаткові глави. — Київ : Наук. думка, 2005. — 333 с.
7. Баранова Т.А., Литвин О.М., Федько В.В. Про чисельну реалізацію оптимального методу скінченних елементів (задача Діріхле для рівняння Пуассона, прямокутні елементи) // Вісник Львівської політехніки. — 1998. — 2, № 337. — С. 294–297.
8. Носов К.В. Метод скінченних елементів з вибором координатних функцій при моделюванні фізичних процесів: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02. — Харків, 2005. — 145 с.
9. Литвин О.Н., Носов К.В. Некоторые аспекты численной реализации оптимального метода конечных элементов на примере бигармонической задачи с краевыми условиями второго рода // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 1. — С. 178–187.
10. Литвин О.М., Носов К.В. Деякі оцінки ітераційного процесу в методі оптимальних скінченних елементів // Матеріали X міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука. — К. : Задруга, 2004. — С. 436.
11. Баранова Т.А. Аналітичний вигляд базисних функцій в оптимальному методі скінченних елементів // Праці Міжнародного симпозіуму «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXIII)», присвяченого 50-річчю створення Інституту кибернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. — Київ : Інститут кибернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2007. — С. 34–35.
12. Баранова Т.А., Литвин О.М., Носов К.В. Обчислювальна схема методу скінченних елементів з вибором оптимальних координатних функцій для еліптичних крайових задач // Вісник Харківського національного університету. — 2011. — № 977. — С. 35–49.
13. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1989. — 204 с.
14. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. — М. : Наука, 1970. — 512 С.
15. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. — М. : Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры. — 1952. — 696 с.

Получено 06.08.2013
После доработки 20.04.2015