УДК 519.6

М.Ю. Ракушев

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ В ВАРИАЦИЯХ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОШИ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Введение

Решение многих практических задач, связанных с исследованием динамических систем, предполагает использование метода малых возмущений для получения уравнения в вариациях для обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего динамическую систему [1]. К таким задачам относятся, например, определение характеристик устойчивости динамических систем, анализ и (или) учет влияния различных возмущений на их точностные характеристики, определение параметров динамических систем по проведенным измерениям [2, 3]. В целом получение и интегрирование вышеописанного уравнения в вариациях (а также уравнений, полученных на его основе) в сравнении с дифференциальным уравнением, описывающим динамическую систему, является существенно более трудоемкой операцией [2, 3]. В связи с этим выбору рационального метода получения и интегрирования уравнения в вариациях на практике придается большое значение.

Анализ последних исследований

Основной сложностью получения уравнения в вариациях (а также уравнений на его основе) является определение матрицы частных производных с помощью операции аналитического дифференцирования правой части обыкновенного дифференциального уравнения по его решениям [2]. Провести такую операцию для (громоздкого) векторного нелинейного дифференциального уравнения методически сложно. Следует отдельно отметить, что во многих практических приложениях описанная выше матрица частных производных используется самостоятельно как элемент уравнений, полученных на основе уравнения в вариациях, например, при интегрировании решений стохастических дифференциальных уравнений [3, 4].

В [5, 6] предложен основанный на дифференциальных преобразованиях новый метод интегрирования уравнения в вариациях для задачи Коши, которая записана для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Данный метод позволяет разрабатывать вычислительные схемы интегрирования уравнения в вариациях и за счет реализации этапа определения уравнения в вариациях (в численно-аналитическом виде в области дифференциальных спектров) не имеет недостатка — методической сложности реализации. Однако в вычислительной схеме этого метода уравнение в вариациях определяется как единое целое — в области дифференциальных спектров правая часть дифференциального уравнения дифференцируется по начальным условиям и входящим в нее параметрам. А для некоторых приложений необходимо раздельное определение элементов такого уравнения в вариациях — матриц частных производных правой части обыкновенного дифференциального уравнения по его решениям и параметрам. При этом выделение описанных элементов из дифференциального спектра вариационного уравнения требует проведения дополнительных операций, что значительно усложняет результирующую вычислительную схему [4].

Проведенный анализ показывает, что один из возможных подходов к получению и интегрированию уравнения в вариациях — использование дифференциальных преобразований. Однако известные подходы для решения такой задачи недостаточно эффективно обеспечивают нахождение основного элемента такого уравнения — матрицы частных производных правой части обыкновенного дифференциального уравнения по его решениям и (или) параметрам.

Таким образом, цель статьи — получение метода разработки вычислительных схем интегрирования уравнения в вариациях для задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на основе дифференциальных преобразований.

Уравнение в вариациях для задачи Коши

Задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид [1]

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda), \quad t > t_0, \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где x — вектор-функция размером n; t — независимая переменная; x_0 — вектор начальных условий размером n; λ — вектор параметров размером m; $f(t, x, \lambda)$ — заданная вектор-функция, которая удовлетворяет условиям гладкости, позволяющим определять для нее производные по x и λ до второго порядка включительно размером n.

Пусть x_* — известное решение задачи (1), полученное для заданного значения вектора λ_*, тогда уравнение в вариациях для задачи Коши (1) будет иметь вид [1]

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\delta x = g(t, x_*, \lambda_*)\,\delta x + (0_{n\times n} \quad q(t, x_*, \lambda_*)), \\ \delta x = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x_0} & \dfrac{\partial x}{\partial \lambda} \end{pmatrix}, \; \delta x(t_0) = (E_{n\times n} \quad 0_{n\times m}), \end{gathered} \tag{2}$$

где x_* — известная вектор-функция размером n; λ_* — заданный вектор параметров размером m; y — блочный вектор размером $n+m$; δx — матричная функция (матрица частных производных решения задачи Коши (1) по начальным условиям и параметрам) размером $n\times(n+m)$; $\delta x(t_0)$ — блочная матрица начальных условий для уравнения в вариациях; $E_{n\times n}$ — единичная матрица размером $n\times n$; $0_{n\times n}$, $0_{n\times m}$ — нулевые матрицы размером $n\times n$ и $n\times m$ соответственно; $g(t, x_*, \lambda_*) = \partial f(t, x_*, \lambda_*)/\partial x$ — матричная функция размером $n\times n$; $q(t, x_*, \lambda_*) = = \partial f(t, x_*, \lambda_*)/\partial\lambda$ — матричная функция размером $n\times m$.
Основная сложность получения (2) из (1) — необходимость аналитического определения матриц $g(t, x, \lambda)$ и $q(t, x, \lambda)$. Эта операция при сложной функции $f(t, x, \lambda)$ методически сложная. Избавиться от этого недостатка можно за счет применения дифференциальных преобразований.

 ISSN 0572-2691

Мерность применяемых дифференциальных преобразований определяется количеством одновременно рассматриваемых независимых переменных. В задаче (2) (для определения $g(t, x, \lambda)$ и $q(t, x, \lambda)$) их общее количество равно $n+m+1$: одна — t и $n+m$ — составляющие векторов x_0 и λ. Однако целесообразно расчет матриц $g(t, x, \lambda)$ и $q(t, x, \lambda)$ проводить по столбцам [4, 5], при этом переменные рассматриваются попарно (одна — t и поочередно каждый из элементов векторов x_0 и λ). Тогда громоздкое $n+m+1$-мерное дифференциальное преобразование распадается на $n+m$ простых двумерных (одна — t и поочередно каждый из элементов векторов x_0 и λ).

Дифференциальные преобразования

Двумерными дифференциальными преобразованиями называют функциональные преобразования (без потери общности дальнейших выкладок рассмотрим дифференциально-тейлоровские (ДТ) преобразования) [7] вида

$$Z(k, k_w) = \frac{h^k h_w^{k_w}}{k! k_w!} \frac{\partial^{k+k_w} z(t_*, w_*)}{\partial t^k \partial w^{k_w}}, \tag{3}$$

$$z(t, w) = \sum_{k_w=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(t-t_*)^k}{h^k} \frac{(w-w_*)^{k_w}}{h^{k_w}} Z(k, k_w) \right). \tag{4}$$

Здесь $z(t, w)$ — скалярная функция, имеющая производные необходимого порядка (является дифференцированной необходимое количество раз); t, w, t_*, w_* — аргументы, по которым проводится преобразование, и их значения, при которых оно проводится, соответственно; h, h_w — отрезки аргументов, на которых функция $z(t, w)$ представляется рядом Тейлора по t и w соответственно; k, k_w — целочисленные аргументы $0, 1, \ldots$; $Z(k, k_w)$ — дискретная функция по аргументам k, k_w.

Прямое преобразование (3) позволяет по оригиналу $z(t, w)$ найти изображение $Z(k, k_w)$. Обратное преобразование (4) — восстанавливает оригинал $z(t, w)$ в виде отрезка двумерного ряда Тейлора. ДТ-изображение $Z(k, k_w)$ называют Т-спектром, а значение функции $Z(k, k_w)$ при конкретных значениях k, k_w — Т-дискретами [7].

Одна из основных характеристик ДТ-преобразований — возможность рекуррентного вычисления Т-дискрет для любой сложной функции. По сути это коэффициенты многомерного ряда Тейлора. При этом такой расчет реализуется методически просто в виде рекуррентных алгебраических зависимостей, что избавляет от методической сложности проведения аналитических операций (взятия соответствующих производных в явном виде), заменяя ее на вычислительную сложность рекуррентных зависимостей.

Исходя из свойств ДТ-преобразований, для получения (расчета) Т-спектра сложной функции необходимо первоначально определить (предварительно задать) Т-спектры всех ее аргументов. При этом мерность определяемого (задаваемого) Т-спектра аргументов должна совпадать с необходимой мерностью получаемого (рассчитываемого) Т-спектра сложной функции [7].

Применим ДТ-преобразования (3), (4) при $k = 0, 1, \ldots, \infty$ и $k_w = 0$ к дифференциальному уравнению (1) при значении независимой переменной уравнения $t_* \geq t_0$. Данная операция широко изложена в литературе по ДТ-преобразованиям (по сути это получение ДТ-модели задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на основе одномерных ДТ-преобразований) [7–9]:

$$X(k+1,0)=\frac{h}{k+1}F(k,0),\ \ (k=0,1,\ldots,\infty)\wedge(k_w=0), \tag{5}$$

$$F(k,0)=F(T(k,0),X(k,0),\Lambda(k,0)), \tag{6}$$

$$T(k,0)=\left[\frac{h^k h_w{}^{k_w}}{k!k_w!}\frac{\partial^{k+k_w}t_*}{\partial t^k\partial w^{k_w}}\right]_{k_w=0}=t_*\delta_p(k,k_w)+h\delta_p(k-1,k_w), \tag{7}$$

$$X(0,0)=x(t_*), \tag{8}$$

$$\Lambda(k,0)=\left[\frac{h^k h_w{}^{k_w}}{k!k_w!}\frac{\partial^{k+k_w}\lambda_*}{\partial t^k\partial w^{k_w}}\right]_{k_w=0}=\lambda_*\delta_p(k,k_w), \tag{9}$$

$$x_*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(t-t_*)^k}{h^k}X(k,0)\right), \tag{10}$$

где $X(k,k_w)$, $F(k,k_w)$, $T(k,k_w)$, $\Lambda(k,k_w)$ — двумерные Т-спектры функций x, $f(t,x,\lambda)$, переменной t и параметра λ соответственно; h — отрезок аргумента по переменной t; $\delta_p(k,k_w)$ — двумерная тейлоровская единица [7], например,

$$\delta_p(k-a,k_w-b)=\begin{cases}1,\ (k=a)\wedge(k_w=b),\\ 0,\ (k\neq a)\vee(k_w\neq b).\end{cases} \tag{11}$$

Уравнения (5)–(10) являются ДТ-моделью для задачи Коши (1) [7–9].

Рассмотрим матрицу $g(t,x_*,\lambda_*)$ в (2), для нее в соответствии со свойствами производных сложных функций выполняется соотношение

$$g(t_*,x_*,\lambda_*)=\left[\frac{\partial f(t,x,\lambda)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}\right]_{\substack{t=t_*\\x=x_*\\\lambda=\lambda_*}}+\left[\frac{\partial f(t,x,\lambda)}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}\right]_{\substack{t=t_*\\x=x_*\\\lambda=\lambda_*}}+\left[\frac{\partial f(t,x,\lambda)}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right]_{\substack{t=t_*\\x=x_*\\\lambda=\lambda_*}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(t_*,x_*,\lambda_*)=\frac{\partial f(t_*,x_*,\lambda_*)}{\partial x},\quad \frac{\partial x_*}{\partial x}=E_{n\times n},\quad \frac{\partial t_*}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\lambda_*}{\partial x}=0_{m\times n}. \tag{12}$$

В первом слагаемом (12) второй множитель равен единичной матрице, а последние два слагаемых равны нулю, так как вторые множители в них нулевые.

Расширим ДТ-модель (5)–(10) при $k=0,1,\ldots,\infty$ и $k_w=1$ для вычисления Т-спектра функции $f(t,x,\lambda)$. При этом Т-спектры функции x, t и параметра λ определим (зададим) специальным образом исходя из «расширенного» рассмотрения расчета матрицы (12). Данная операция с учетом свойств ДТ-преобразований [5, 7] будет иметь вид:

$$F(k,1)=F(T(k,k_w),X(k,k_w),\Lambda(k,k_w)),\ \ (k=0,1,\ldots,\infty)\wedge(k_w=1), \tag{13}$$

$$T(k,1)=\left[\frac{h^k h_w{}^{k_w}}{k!k_w!}\frac{\partial^{k+k_w}t_*}{\partial t^k\partial x^{k_w}}\right]_{k_w=1}=0, \tag{14}$$

$$X(k,1)=\left[\frac{h^k h_w{}^{k_w}}{k!k_w!}\frac{\partial^{k+k_w}x_*}{\partial t^k\partial x^{k_w}}\right]_{k_w=1}=h_wE_{n\times n}\delta_p(k,k_w-1), \tag{15}$$

$$\Lambda(k,1)=\left[\frac{h^k h_w{}^{k_w}}{k!k_w!}\frac{\partial^{k+k_w}\lambda_*}{\partial t^k\partial x^{k_w}}\right]_{k_w=1}=0_{m\times n}, \tag{16}$$

где h_w — отрезок аргумента по элементам вектора x; $\delta_p(k,k_w)$ — двумерная тейлоровская единица (11).

Рассмотрим обратное двумерное ДТ-преобразование (4) для функции $f(t,x,\lambda)$ (6), (13) на $t\in[t_*-h,t_*+h]$ при значении приращения по элементам вектора x, равном h_w. Учтем, что в (5)–(10), (13)–(16) Т-спектр $F(k,k_w)$ рассчитан только для $k_w=0,1$:

$$f(t,x_*+h_w,\lambda_*)=\sum_{k_w=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(t-t_*)^k}{h^k}F(k,k_w)\right)\Rightarrow \tag{17}$$

$$\Rightarrow f(t,x_*+h_w,\lambda_*)=\sum_{k_w=0}^{1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(t-t_*)^k}{h^k}F(k,k_w)\right)+\sum_{k_w=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(t-t_*)^k}{h^k}F(k,k_w)\right)\Rightarrow \tag{18}$$

$$\Rightarrow f(t,x_*+h_w,\lambda_*)=\sum_{k_w=0}^{1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(t-t_*)^k}{h^k}F(k,k_w)\right)+O(h_w^2), \tag{19}$$

где $O(\,)$ — величина соответствующего порядка малости.

Из последнего выражения, пренебрегая величинами высшего порядка малости, с учетом прямого ДТ-преобразования (3) получим

$$f(t,x_*+h_w,\lambda_*)=\sum_{k_w=0}^{1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(t-t_*)^k}{h^k}F(k,k_w)\right)\Rightarrow \tag{20}$$

$$\Rightarrow f(t,x_*+h_w,\lambda_*)\approx\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(t-t_*)^k}{h^k}F(k,0)\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(t-t_*)^k}{h^k}F(k,1)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t,x_*+h_w,\lambda_*)\approx\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t-t_*)^k}{k!}\frac{\partial^k f(t_*,x_*,\lambda_*)}{\partial t^k}+h_w\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t-t_*)^k}{k!}\frac{\partial^{k+1}f(t_*,x_*,\lambda_*)}{\partial t^k\partial x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t,x_*+h_w,\lambda_*)\approx f(t,x_*,\lambda_*)+\frac{h_w}{1!}\frac{\partial f(t,x_*,\lambda_*)}{\partial x}=f(t,x_*,\lambda_*)+h_w g(t,x_*,\lambda_*). \tag{21}$$

Для получения матрицы $g(t,x_*,\lambda_*)$ необходимо продифференцировать (21) по h_w. Такую операцию, исходя из тождественности (20) и (21), запишем

$$g(t,x_*,\lambda_*)=D_{k_w}\left[\sum_{k_w=0}^{1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(t-t_*)^k}{h^k}F(k,k_w)\right)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(t,x_*,\lambda_*)=\frac{1}{h_w}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(t-t_*)^k}{h^k}F(k,1)\right), \tag{22}$$

где $D_{k_w}[\,]$ — операция дифференцирования в области Т-спектров [7–9].

Вследствие того, что введенный в прямом ДТ-преобразовании в (15) отрезок аргумента h_w при дифференцировании в (22) сокращается (см. (21) и (22)), можно положить

$$h_w=1. \tag{23}$$

Из сравнения вида функциональной зависимости для обратного ДТ-преобразования (4) и выражения (22) при условии (23) видно, что рассчитанный на основании ДТ-модели (5)–(10), (13)–(16), при (23) Т-спектр $F(k, k_w = 1)$ — одномерный (только по переменной t) Т-спектр матрицы $g(t, x_*, \lambda_*)$. Таким образом, имеет место тождество

$$G(k) = \frac{h^k}{k!} \frac{d^k g(t_*, x_*, \lambda_*)}{dt^k} \equiv F_x(k, 1), \tag{24}$$

где $G(k)$ — одномерный Т-спектр матрицы $g(t, x_*, \lambda_*)$; $F_x(k,1)$ — Т-спектр функций $f(t, x, \lambda)$, рассчитанный на основании (5)–(10), (13)–(16), при (23).

Рассмотрим матрицу $q(t, x_*, \lambda_*)$ в (2), для нее согласно свойствам производных сложных функций выполняется соотношение

$$q(t_*, x_*, \lambda_*) = \left[\frac{\partial f(t, x, \lambda)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \lambda}\right]_{\substack{t=t_* \\ x=x_* \\ \lambda=\lambda_*}} + \left[\frac{\partial f(t, x, \lambda)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \lambda}\right]_{\substack{t=t_* \\ x=x_* \\ \lambda=\lambda_*}} + \left[\frac{\partial f(t, x, \lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda}\right]_{\substack{t=t_* \\ x=x_* \\ \lambda=\lambda_*}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q(t_*, x_*, \lambda_*) = \frac{\partial f(t_*, x_*, \lambda_*)}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial x_*}{\partial \lambda} = 0_{n\times m}, \quad \frac{\partial t_*}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial \lambda_*}{\partial \lambda} = E_{m\times m}. \tag{25}$$

В последнем слагаемом (25) второй множитель равен единичной матрице, а первые два слагаемых равны нулю, так как вторые множители в них нулевые.

Расширим ДТ-модель (5)–(10) при $k = 0, 1, \ldots, \infty$ и $k_w = 1$ для вычисления Т-спектра функции $f(t, x, \lambda)$. При этом Т-спектры функции x, t и параметра λ определим (зададим) специальным образом исходя из «расширенного» рассмотрения расчета матрицы (25). Данная операция с учетом свойств ДТ-преобразований [5, 7] имеет вид:

$$F(k, 1) = F(T(k, k_w), X(k, k_w), \Lambda(k, k_w)), \;\; (k = 0, 1, \ldots, \infty) \wedge (k_w = 1), \tag{26}$$

$$T(k, 1) = \left[\frac{h^k h_w{}^{k_w}}{k! k_w!} \frac{\partial^{k+k_w} t_*}{\partial t^k \partial \lambda^{k_w}}\right]_{k_w = 1} = 0, \tag{27}$$

$$X(k, 1) = \left[\frac{h^k h_w{}^{k_w}}{k! k_w!} \frac{\partial^{k+k_w} x_*}{\partial t^k \partial \lambda^{k_w}}\right]_{k_w = 1} = 0_{n\times m}, \tag{28}$$

$$\Lambda(k, 1) = \left[\frac{h^k h_w{}^{k_w}}{k! k_w!} \frac{\partial^{k+k_w} \lambda_*}{\partial t^k \partial \lambda^{k_w}}\right]_{k_w} = h_w E_{m\times m} \delta_p(k, k_w - 1), \tag{29}$$

где $\delta_p(k, k_w)$ — двумерная тейлоровская единица (11).

Проведя для функции $f(t, x, \lambda)$ (6), (26) выкладки в соответствии с (17)–(23), можно показать, что рассчитанный на основании ДТ-модели (4)–(10), (26)–(29) при (23) Т-спектр $F(k, k_w = 1)$ является одномерным Т-спектром матрицы $q(t, x_*, \lambda_*)$, следовательно,

$$Q(k) = \frac{h^k}{k!} \frac{d^k g(t_*, x_*, \lambda_*)}{dt^k} \equiv F_\lambda(k, 1), \tag{30}$$

где $Q(k)$ — одномерный Т-спектр матрицы $q(t, x_*, \lambda_*)$; $F_\lambda(k,1)$ — Т-спектр функций $f(t, x, \lambda)$, рассчитанный на основании (5)–(10), (26)–(29) при (23).

ISSN 0572-2691

Анализ выражений (13)–(16) и (26)–(29) показывает, что они отличаются только Т-спектрами $X(k=0,k_w=1)$ и $\Lambda(k=0,k_w=1)$. Для совместного (последовательного) использования их можно записать в виде:

$$X(k,1)=(E_{n\times n}\ 0_{n\times m})\delta_p(k,k_w-1), \tag{31}$$

$$\Lambda(k,1)=(0_{m\times n}\ E_{m\times m})\delta_p(k,k_w-1). \tag{32}$$

Применение ДТ-преобразований (3), (4) с использованием соотношений (24) и (30) к уравнению в вариациях (2) позволяет получить ДТ-модель уравнения в вариациях. Данная операция обстоятельно изложена в литературе по ДТ-преобразованиям (это получение ДТ-модели задачи Коши на основе одномерных ДТ-преобразований) [7–9].

Метод интегрирования уравнения в вариациях для задачи Коши на основе дифференциальных преобразований

На основании обобщения всех полученных ДТ-моделей с учетом (31), (32) запишем ДТ-модель уравнения в вариациях (2) для задачи Коши (1) в следующем виде.

1. Прямое двумерное ДТ-преобразование задачи Коши (1) — последовательное, сначала при $k_w=0$ для $k=0,1,\dots$, определение Т-спектра $X(k,0)$, затем для каждого столбца из блочных матриц $X(k,1)$ и $\Lambda(k,k_w)$ при $k_w=1$ для $k=0,1,\dots,\infty$ — определение двумерного Т-спектра $F(k,1)$ и заполнение одномерного Т-спектра $G(k)$ и $Q(k)$:

$$\begin{cases} X(0,0)=x(t_*),\ X(k,1)=(E_{n\times n}\ 0_{n\times m})\delta_p(k,k_w-1),\\ T(k,k_w)=t_*\delta_p(k,k_w)+h\delta_p(k-1,k_w),\\ \Lambda(k,k_w)=\lambda_*\delta_p(k,k_w)+(0_{m\times n}\ E_{m\times m})\delta_p(k,k_w-1),\\ F(k,k_w)=F(T(k,k_w),X(k,k_w),\Lambda(k,k_w)),\ (k=0,1,\dots,\infty)\wedge(k_w=0,1),\\ X(k+1,0)=\dfrac{h}{k+1}F(k,0),\ (k=0,1,\dots,\infty)\wedge(k_w=0),\\ G(k)=F(k,1),\ (X(k,1)=E_{n\times n}\delta_p(k,k_w-1))\wedge(\Lambda(k,1)=0_{m\times n}),\\ Q(k)=F(k,1):(X(k,1)=0_{n\times m})\wedge(\Lambda(k,1)=E_{m\times m}\delta_p(k,k_w-1)). \end{cases} \tag{33}$$

Здесь $X(k,k_w)$, $F(k,k_w)$, $T(k,k_w)$, $\Lambda(k,k_w)$ — двумерные Т-спектры функций x, $f(t,x,\lambda)$, переменной t и параметра λ соответственно; h — отрезок аргумента по t; λ_* — заданное значение вектора λ; $\delta_p(k,k_w)$ — двумерная тейлоровская единица (11); $G(k)$, $Q(k)$ — одномерные Т-спектры матриц $g(t,x_*,\lambda_*)$ и $q(t,x_*,\lambda_*)$ соответственно.

2. Прямое одномерное ДТ-преобразование уравнения в вариациях (2) — последовательное для $k=0,1,\dots$ определение Т-спектра $\delta X(k)$

$$\begin{cases} \delta X(0)=\delta x(t_*),\\ \delta X(k+1)=\dfrac{h}{k+1}(G(k)*\delta X(k)+(0_{n\times n}\ Q(k))),\ k=0,1,\dots,\infty, \end{cases} \tag{34}$$

где $\delta X(k)$ — одномерный Т-спектр функции δx; $*$ — операция одномерной алгебраической свертки, например

$$Y(k)*Z(k)=\sum_{s=0}^{k}(Y(s)Z(k-s)). \tag{35}$$

3. Обратное одномерное ДТ-преобразование

$$x_*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(t-t_*)^k}{h^k}X(k,0)\right),\ \delta x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(t-t_*)^k}{h^k}\delta X(k)\right). \tag{36}$$

В полученной ДТ-модели уравнения в вариациях для задачи Коши (33)–(36), определение всех элементов уравнения в вариациях (2) проводится в численно-аналитическом виде без проведения аналитических операций определения частных производных функции, входящей в правую часть системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1). Это характеризует методическую простоту предлагаемого подхода. На основании ДТ-модели (33)–(36) с использованием обстоятельно изложенных в литературе по ДТ-преобразованиям подходов можно разрабатывать различные вычислительные схемы совместного интегрирования (1), (2): явные, неявные, смещенные, адаптивные [7–11]. Так, явная (самая простая) вычислительная схема интегрирования (1), (2) на основе (38)–(41) будет иметь вид:

$$\begin{cases} h = t_{i+1} - t_i, \;\; X(0,0) = x_i, \;\; x_0 = x(t_0), \\ X(k,1) = (E_{n\times n} \;\; 0_{n\times m})\,\delta_p(k, k_w - 1), \\ T(k,k_w) = t_i \delta_p(k,k_w) + h\delta_p(k-1,k_w), \\ \Lambda(k,k_w) = \lambda_* \delta_p(k,k_w) + (0_{m\times n} \;\; E_{m\times m})\,\delta_p(k,k_w-1), \\ F(k,k_w) = F(T(k,k_w), X(k,k_w), \Lambda(k,k_w)), \\ \{(k=0,1,\ldots,k_{\max}-1)\wedge(k_w=0)\}\vee\{(k=0,1,\ldots,k_{\max\delta}-1)\wedge(k_w=1)\}, \\ X(k+1,0) = \dfrac{h}{k+1}F(k,0), \;\; (k=0,1,\ldots,k_{\max}-1)\wedge(k_w=0), \\ G(k) = F(k,1), \;\; (X(k,1) = E_{n\times n}\delta_p(k,k_w-1))\wedge(\Lambda(k,1) = 0_{m\times n}), \\ Q(k) = F(k,1), \;\; (X(k,1) = 0_{n\times m})\wedge(\Lambda(k,1) = E_{m\times n}\delta_p(k,k_w-1)), \end{cases} \tag{37}$$

$$\begin{cases} \delta X(0) = \delta x_i, \;\; \delta x_0 = (E_{n\times n} \;\; 0_{n\times m}), \\ \delta X(k+1) = \dfrac{h}{k+1}(G(k) * \delta X(k) + (0_{n\times n} \;\; Q(k))), \;\; k = 0,1,\ldots,k_{\max}-1, \end{cases} \tag{38}$$

$$x_{i+1} = \sum_{k=0}^{k_{\max}} X(k,0), \quad \delta x_{i+1} = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \delta X(k). \tag{39}$$

Здесь x_i, δx_i — сеточные функции, принимаемые за решения (1) и (2) соответственно; x_0, $\delta x(t_0)$ — вектор и блочная матрица начальных условий соответственно; $k_{\max}$ — максимальные номера Т-дискрет, учитываемых при расчете x_i и δx_i; $k_{\max\delta}$ — максимальные номера Т-дискрет, учитываемых при расчете Т-спектра функций $g(t, x_i, \lambda_*)$ и $q(t, x_i, \lambda_*)$; h — шаг интегрирования; i — номер узла вычислительной сетки.

Исходя из свойств ДТ-преобразований, при реализации (37)–(39) необходимо выполнять условие $k_{\max} \ge k_{\max\delta}$. Значения $k_{\max}$ и $k_{\max\delta}$ определяют порядок точности вычислительных схем интегрирования при расчете x_i и δx_i соответственно [12]. Для вычисления различных блоков матрицы $\delta x = (\partial x/\partial x_0 \;\; \partial x/\partial\lambda)$ значение $k_{\max\delta}$ также можно задавать различным.

Таким образом, (33)–(36) является новым методом разработки вычислительных схем интегрирования уравнения в вариациях для задачи Коши, записанной для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на основе дифференциальных преобразований. В разработанном методе каждое из составляющих вариационного уравнения определяется раздельно в численно-аналитическом виде в области Т-спектров, а не аналитически, как в традиционном подходе, что характеризует математическую простоту предлагаемого метода.

Пример. Рассчитать для $t = 1$ решение уравнения в вариациях для задачи Коши:

$$\frac{dx}{dt} = -(x + \lambda t)^2, \quad t > 0{,}5, \ \ x(0{,}5) = 40, \ \lambda_* = 10, \tag{40}$$

где x — искомая функция; t — независимая переменная; x_0 — начальное условие n; λ_* — значение параметра, при котором производится расчет.

Уравнение в вариациях для задачи Коши (40) имеет вид

$$\frac{d}{dt}\delta x = -2(x + \lambda t)\,\delta x - (0 \ 2(x + \lambda t)\,t), \ \ \delta x = \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \ \frac{\partial x}{\partial \lambda}\right), \ \delta x(0{,}5) = (1 \ 0), \tag{41}$$

где δx — искомая матричная функция (матрица частных производных решения (40) по начальным условиям и параметрам); $\delta x(t_0)$ — блочная матрица начальных условий (41).

Явная вычислительная схема интегрирования (40), (41) на основе разработанного метода (33)–(36) на равномерной вычислительной сетке (с постоянным шагом интегрирования) согласно (37)–(39) имеет вид

$$\begin{cases} t_i = 0{,}5 + ih, \ \ X(0,0) = x_i, \ \ x_0 = 40, \ \ \lambda_* = 10, \\ X(k,1) = (1 \ 0)\,\delta_p(k, k_w - 1), \\ T(k, k_w) = t_i \delta_p(k, k_w) + h\delta_p(k-1, k_w), \\ \Lambda(k, k_w) = \lambda_* \delta_p(k, k_w) + (0 \ 1)\,\delta_p(k, k_w - 1), \\ F_{1/2}(k, k_w) = X(k, k_w) + \Lambda(k, k_w) * T(k, k_w), \\ F(k, k_w) = -F_{1/2}(k, k_w) * F_{1/2}(k, k_w), \\ \{(k = 0, 1, \ldots, k_{\max} - 1) \wedge (k_w = 0)\} \vee \{(k = 0, 1, \ldots, k_{\max\delta} - 1) \wedge (k_w = 1)\}, \\ X(k+1, 0) = \dfrac{h}{k+1} F(k, 0), \quad (k = 0,1, \ldots k_{\max} - 1) \wedge (\, k_w = 0), \\ G(k) = F(k,1), \ \ (X(k,1) = \delta_p(k, k_w - 1)) \wedge (\Lambda(k,1) = 0)), \\ Q(k) = F(k,1), \ \ (X(k,1) = 0) \wedge (\Lambda(k,1) = \delta_p(k, k_w - 1)), \end{cases} \tag{42}$$

$$\begin{cases} \delta X(0) = \delta x_i, \ \ \delta x_0 = (1 \ 0), \\ \delta X(k+1) = \dfrac{h}{k+1}(G(k) * \delta X(k) + (0 \ Q(k))), \ \ k = 0, 1, \ldots, k_{\max} - 1, \end{cases} \tag{43}$$

$$x_{i+1} = \sum_{k=0}^{k_{\max}} X(k, 0), \ \ \delta x_{i+1} = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \delta X(k). \tag{44}$$

Здесь x_i, δx_i — численное решение (40) и (41) соответственно; $X(k, k_w)$, $F_{1/2}(k, k_w)$, $F(k, k_w)$, $T(k, k_w)$, $\Lambda(k, k_w)$ — двумерные Т-спектры функций x, $x + \lambda t$, $-(x + t\lambda)^2$, переменной t и параметра λ соответственно; $\delta X(k)$ — одномерный Т-спектр функции δx; h — шаг интегрирования; $k_{\max X}$, $k_{\max \delta X}$ — порядки точности вычислительных схем интегрирования при расчете x_i и δx_i соответственно; $G(k)$, $Q(k)$ — одномерные Т-спектры функции $-2(x + \lambda t)$ и матрицы $-(0 \ 2(x + \lambda t)\,t)$ соответственно; $\delta_p(k, k_w)$ — двумерная тейлоровская единица (11); $*$ — операция алгебраической свертки для одномерных Т-спектров вида (35), а для двумерных Т-спектров вида

$$Y(k, k_w) * Z(k, k_w) = \sum_{s_w = 0}^{k_w} \sum_{s=0}^{k} (Y(s, s_w)\, Z(k - s, k_w - s_w)).$$

В (42) Т-спектр $F_{1/2}(k, k_w)$ функции $x+\lambda t$ вводится для упрощения проведения прямого ДТ-преобразования для сложной функции [7–9].

Результаты расчета на основе (42)–(44) и методом Рунге-Кутта приведены в таблице, где $x(1)$, $\partial x(1)/\partial x_0$, $\partial x(1)/\partial\lambda$ — значения решения задачи Коши (40) и уравнения в вариациях (41) соответственно; h — шаг интегрирования; $k_{\max}$, $k_{\max\delta}$ — порядки точности вычислительных схем интегрирования; S_{RK}, S_{DT} — оценка вычислительной сложности схем, приведенная в количестве вычислений правой части дифференциального уравнения (40) для метода Рунге-Кутта и разработанного метода соответственно. За эталон принято аналитическое решение (40), (41).

Таблица

Метод	Характеристики вычислительных схем (40), (41)					
Рунге-Кутта 4-го порядка	h	0,02	0,01		0,005	
	$x(1)$	– 6,597156	– 6,596277		– 6,596285	
	$\partial x(1)/\partial x_0$	0,0006448	0,0007867		0,007868	
	$\partial x(1)/\partial\lambda$	– 0,870823	– 0,8708234		– 0,8708227	
	S_{RK}	400	800		1600	
Разработанный (42)–(44)	h	0,02	0,01		0,005	
	$k_{\max}$	4	4		4	
	$k_{\max\delta}$	3	2	3	1	2
	$x(1)$	– 6,547739	– 6,595026	– 6,595026	– 6,596237	– 6,596579
	$\partial x(1)/\partial x_0$	0,0077658	0,0008546	0,0008995	0,0008027	0,0007878
	$\partial x(1)/\partial\lambda$	– 0,8709423	– 0,870884	– 0,870864	– 0,870827	– 0,870826
	S_{DT}	1375	1950	2750	2700	3900
S_{DT}/S_{RK}		3,4	2,4	3,4	1,7	2,4
Эталон	$x(1) = -6{,}596287$; $\partial x(1)/\partial x_0 = 0{,}0007867$; $\partial x(1)/\partial\lambda = -0{,}870823$					

Из приведенных в таблице результатов видно, что предлагаемая вычислительная схема интегрирования позволяет производить численное решение уравнения в вариациях для задачи Коши, которая записана для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом, изменяя характеристики вычислительной схемы: шаг интегрирования и порядок точности, можно получить решение с необходимой точностью. Порядок точности схемы для интегрирования исходной задачи Коши и уравнения в вариациях допускается задавать различным.

Сравнение разработанной схемы с методом Рунге-Кутта 4-го порядка, показывает: при повышении требований к точности расчета, за счет численно-аналитических свойств ДТ-преобразований, вычислительная эффективность разработанной схемы возрастает; основным достоинством разработанной схемы является отсутствие аналитических выкладок при получении из (40) уравнения в вариациях (41), что характеризует ее методическую простоту.

Заключение

Отличительной особенностью предлагаемого метода разработки вычислительных схем интегрирования уравнения в вариациях для задачи Коши, записаной для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, является дополнительное расширение многомерных дифференциальных спектров решения дифференциального уравнения и параметров, входящих в его правую часть. Это позволяет отдельно получить дифференциальный спектр матрицы частных производных правой части обыкновенного дифференциального уравнения по его решениям и (или) параметрам, входящим в нее.

Таким образом предлагаемый в статье метод разработки вычислительных схем интегрирования за счет проведения в численно-аналитическом виде в области дифференциальных спектров методически сложных аналитических выкладок по получению уравнения в вариациях избавляется от главного недостатка этого метода — методической сложности реализации.

М.Ю. Ракушев

ЧИСЛОВИЙ МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯННЯ В ВАРІАЦІЯХ ДЛЯ ЗАДАЧІ КОШІ НА ОСНОВІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Запропоновано метод розробки обчислювальних схем інтегрування рівняння в варіаціях для задачі Коші, записаної для системи звичайних диференційних рівнянь. В методі реалізовано отримання всіх елементів рівняння у варіаціях без проведення аналітичних операцій визначення частинних похідних функцій, що входять у праву частину вихідної системи диференційних рівнянь. Метод засновано на диференціальних перетвореннях.

M.Yu. Rakushev

NUMERICAL METHOD OF THE INTEGRATION OF THE VARIATIONAL EQUATION FOR THE CAUCHY PROBLEM BASED ON DIFFERENTIAL TRANSFORMATIONS

It is presented a method of development of computational schemes of the integration of the variational equation for the Cauchy problem written for system of ordinary differential equations. Obtaining of all elements of the variational equations is implemented in this method without analytical process of determining the partial derivatives of the functions which are part of the right-hand side of the initial system of differential equations. The method is based on the differential transformations.

1. *Карташев А.П., Рождественский Б.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1986. — 272 с.
2. *Жданюк Б.Ф.* Основы статистической обработки траекторных измерений. — М. : Сов. радио, 1978. — 384 с.
3. *Сейдж Э., Мелс Дж.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. — М. : Связь, 1976. — 496 с.
4. *Ракушев М.Ю.* Численный метод интегрирования решения стохастического дифференциального уравнения на основе дифференциальных преобразований // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2013. — № 6. — С. 68–78.
5. *Ковбасюк С.В., Ракушев М.Ю.* Метод решения вариационного уравнения для задачи Коши на основе дифференциальных преобразований // Электронное моделирование. — 2008. — **30**, № 6. — С. 59–70.
6. *Ракушев М.Ю., Тіщенко М.Г.* Спосіб реалізації обчислювальних схем розрахунку матриці Якобі рішення диференціального рівняння на основі багатовимірних диференціальних перетворень // Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони. — 2014. — № 1(19). — С. 77–83.
7. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. — Киев : Наук. думка, 1986. — 159 с.
8. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные спектры и модели. — Киев: Наук. думка, 1990. — 184 с.
9. *Баранов Г.Л., Баранов В.Л., Жуков І.А., Алексєєва Л.О.* Диференціальні перетворення для комп'ютерного моделювання. — Киев : Нац. авиац. ун-т, 2002. — 106 с.
10. *Ронто Н.И.* О неявных схемах интегрирования, основанных на дифференциальных преобразованиях // Электронное моделирование. — 1986. — **8**, № 4. — С. 44–50.
11. *Ракушев М.Ю.* Вычислительная схема интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений на основе дифференциально-тейлоровского преобразования с автоматическим выбором шага и порядка // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2012. — № 6. — С. 87–96.
12. *Ракушев М.Ю.* Вычислительная схема интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений на основе дифференциально-тейлоровского преобразования с автоматическим выбором шага и порядка // Космічна наука і технологія. — 2010. — **16**, № 6. — С. 51–56.

Получено 12.01.2015
После доработки 19.05.2015