УДК 519.6

Е.М. Киселева, Л.Л. Гарт, П.А. Довгай

К ВОПРОСУ О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОИЗВОДНОЙ ДИСКРЕТНОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА С ПРИБЛИЖЕННЫМИ ДАННЫМИ

Введение

Задача численного дифференцирования, как известно, состоит в приближенном вычислении производной функции по заданным значениям этой функции в некотором конечном наборе точек ее области определения. Решение задачи численного дифференцирования имеет большое значение при обработке результатов измерений параметров движущихся объектов, в геологии при обработке измерений, в экологии при решении обратных задач, в численных методах решения скалярных уравнений, когда функция, входящая в уравнение, задана таблично или является слишком сложной для аналитического дифференцирования и многих других задачах.

В основе численного дифференцирования лежат различные идеи. Первая состоит в том, чтобы доопределить (восстановить) таблично заданную функцию до функции непрерывного аргумента, к которой уже применима обычная операция дифференцирования. При реализации такого подхода полезной оказывается теория интерполирования [1]. В частности, таблично заданную функцию можно заменить ее интерполяционным полиномом и его производные считать производными рассматриваемой функции. Для этой процедуры подходит также интерполяция сплайнами или другими функциями. Другим подходом к получению формул численного дифференцирования является метод неопределенных коэффициентов, конструктивно более простой и особенно удобный в многомерном случае, когда построение интерполяционного полинома становится непростым.

Пусть задан набор узлов $t_0, t_1, ..., t_M$ на отрезке $[a, b]$, которые образуют сетку с шагом $\tau_i = t_i - t_{i-1}$, где $i = 1, 2, ..., M$, $M > 0$ — заданное число. Пусть известны значения $x_0, x_1, ..., x_M$ функции $x(t)$ такие, что $x_i = x(t_i)$, $i = \overline{0, M}$, т.е. задан дискретный временной ряд. Напомним, что временным рядом называется последовательность значений функции $x(t)$ в моменты времени $t \in [a, b]$, другими словами, множество наблюдений, генерируемых последовательно во времени. Если ошибки измерений и возмущения, действующие на систему, не учитываются, то говорят о задачах детерминированного наблюдения и анализа данных. В противном случае возникают различные задачи нахождения производных при наличии ошибок измерений или задачи анализа данных при неполной информации [2].

Задача численного дифференцирования временных рядов, допускающих аппроксимацию полиномиальными многочленами, исследовалась многими авторами. В работе [3], в частности, предлагается строить интерполяционный многочлен $P_m(t)$ по $(m+1)$ узлам $(m<M)$ так, чтобы соблюдалось приближенное равенство $x(t)\approx P_m(t),\ \ t\in[a,b],$ и значение k-й производной интерполяционного многочлена $P_m(t)$ принимать за приближенное значение k-й производной функции $x(t)$, т.е. $x^{(k)}(t)\approx P_m^{(k)}(t),\ \ t\in[a,b],\ \ k\le m.$ Для случая равноотстоящих узлов с шагом $\tau=t_i-t_{i-1},\ \ i=\overline{1,M},$ интерполяционный многочлен задается формулой Ньютона:

$$P_m(t)=\sum_{i=0}^{m}\frac{\Delta^i x(t_0)}{\tau^i\, i!}\prod_{j=0}^{i\text{-}1}(t-t_j),\ \ t\in[a,b],$$

где $\Delta^i x(t_0)$ — конечная разность i-го порядка от функции $x(t)$ в точке $t=t_0$ [3]. При этом показано, что k-я производная такого интерполяционного многочлена в точке $t=t_0$ равна

$$P_m^{(k)}(t_0)=\frac{k!}{\tau^k}\sum_{i=k}^{m}\frac{S_i^{(k)}}{i!}\Delta^i x(t_0),\ \ t\in[a,b],\ \ k\le m,$$

где $S_i^{(k)}$ — целые числа, называемые числами Стирлинга первого рода. Аналогичными выражениями записываются соответствующие производные интерполяционного многочлена для любого узла $t_j,\ \ j=\overline{0,M}.$ Недостатком такого подхода является необходимость вычисления конечных разностей от k-го до m-го порядков. Операция вычисления конечных разностей высокого порядка сопровождается значительными ошибками округления. Эти ошибки существенно возрастают, если временной ряд содержит случайные ошибки измерений.

Посредством дифференцирования интерполяционных формул выводятся формулы для приближенного вычисления производных различного порядка точности, наиболее распространенные из которых можно найти, например, в работах [1, 3, 4].

В [5] ставится задача об отыскании устойчивых относительно ошибок округления формул численного дифференцирования вида

$$\dot{x}(t_j)=\sum_{i=1}^{m}\beta_{m-i}\dot{x}(t_{j-i})+\tau^{-1}\sum_{i=0}^{m}\alpha_{m-i}x(t_{j-i}),\ \ m\le j\le M,$$

где β_{m-i},α_{m-i} — некоторые числовые коэффициенты. Такая задача возникает, когда приходится вычислять значения производной на основании дискретно поступающей информации о значениях функции. Показана устойчивость формул при любом $m\le M$ и указан наиболее высокий порядок аппроксимации без учета случайных ошибок измерений.

В настоящее время методы численного дифференцирования детерминированных временных рядов исследованы достаточно полно. Существенно меньше внимания по сравнению с детерминированным случаем уделяется решению задачи численного дифференцирования временных рядов, содержащих случайные ошибки измерений. Наиболее значимыми в этом направлении являются работы, позволяющие получить решение такой задачи с помощью аппроксимации экспериментальных данных кубическими сплайнами с последующим аналитическим дифференцированием соответствующей кривой, а также работы, посвященные дифференцированию случайных процессов. Следует особо отметить важность работ по развитию методов регуляризации для задачи дифференцирования, некорректность которой приводит к малой точности расчетных формул из-за погрешности исходных данных.

Операция дифференцирования $L \equiv \dfrac{d}{dt}$, $Lx \equiv \dfrac{dx(t)}{dt} \equiv \dot{x}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$, как известно, неустойчива к возмущениям исходных данных, что приводит к существенным трудностям при отыскании производной $\dot{x}(t)$ от функции $x(t)$, заданной с некоторой погрешностью [6]. Если функция $x(t)$ задана своим δ-приближением $x_\delta(t)$ в некотором нормированном функциональном пространстве Y и оператор дифференцирования L действует из Y в нормированное пространство X, то для обеспечения устойчивости решения вводится регуляризующий операцию L оператор R_δ такой, что для любой функции $x_\delta(t)$ с условием $\| x - x_\delta \|_Y \le \delta$ будет $\| R_\delta x_\delta - Lx \|_X \to 0$ при $\delta \to 0$. Другими словами, точное решение задачи дифференцирования заменяется регуляризованным приближенным решением, которое стремится к точному при отсутствии погрешностей измерений (подробнее о различных вариантах стабилизации решения см. в [6, 7]). На практике регуляризация обычно сводится либо к сглаживанию исходных данных в физическом пространстве, либо к подавлению высоких частот в спектре измеренных данных.

Еще один подход к решению задачи дифференцирования может быть основан на том, что она является частным случаем задач решения интегральных уравнений первого рода, поскольку

$$\int_{t_i}^{t} \dot{x}(s)\, ds = x(t) - x(t_i), \quad t \in [a, b], \tag{1}$$

для любого узла t_i, $i = \overline{0, M}$. Поэтому для ее решения могут применяться многие общие методы решения некорректно поставленных задач [6–9].

Значительная часть некорректных задач, в том числе и задача (1), может быть представлена в виде операторного уравнения первого рода

$$Au = f \tag{2}$$

с заданным оператором A, действующим из X в Y (X, Y — метрические пространства, в отдельных случаях банаховы или гильбертовы), и элементом $f \in Y$.

Особое место среди методов решения некорректных задач занимают итерационные методы. В 30-е годы прошлого века в работах Т. Карлемана (T. Carleman), Г.М. Голузина и В.И. Крылова были предложены первые методы приближений, дающие в пределе точные решения уравнения (2), если данные (оператор A и правая часть f) заданы точно. В работе [8] М.М. Лаврентьев обосновал сходимость метода последовательных приближений при приближенной правой части линейных уравнений и распространил полученные результаты на случай нелинейных уравнений. Различные схемы итерационных методов, предложенные В.Н. Страховым, М.А. Красносельским, Г.М. Вайникко и П.П. Забрейко, А.С. Апарциным, В.К. Ивановым, М.М. Лаврентьевым, В. Липфертом (W. Lipfert), А.Б. Бакушинским и А.В. Гончарским, В.А. Морозовым, В.В. Васиным и другими авторами, применялись для решения многих некорректных задач в банаховых и гильбертовых пространствах. Метод простой итерации при приближенно заданных правой части и операторе изучался в работах А.А. Самарского и П.Н. Вабищевича [10].

Большинство перечисленных работ посвящено априорному выбору числа итераций k. Это означает, что в предположении об истокопредставимости $u = A^p z, \quad p > 0, \quad z \in X,$ точного решения уравнения (2) находится оценка погрешности метода, которая затем оптимизируется по k, т.е. определяется такое число итераций k_{opt}, при котором эта оценка минимальна. В отсутствие сведений об истокопредставимости точного решения итерационные методы решения некорректных задач также можно сделать вполне эффективными, если воспользоваться правилами останова по невязке или по поправке. Апостериорный выбор числа итераций для метода простой итерации впервые был предложен И.В. Емелиным и М.А. Красносельским [11] и в дальнейшем получил развитие в работах Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенникова, В.Ф. Савчука. Они обосновали возможность применения правил останова по невязке и по соседним приближениям для различных схем методов итераций, явных и неявных, которые превращают предложенные итеративные методы в регуляризующие алгоритмы для задачи (2), не требуя при этом знания истокопредставимости точного решения, а в случае истокопредставимости обеспечивают оптимальную в классе скорость сходимости.

Помимо итерационных методов для приближенного решения некорректных задач широко применяются проекционные методы, позволяющие (по Л.В. Канторовичу [12]) уравнение (2), рассматриваемое в каком-то сложном пространстве, заменить приближенным уравнением, заданным в более простом пространстве, и принять точное решение приближенного уравнения в качестве приближения к решению исходного уравнения. Установлению критериев сходимости, исследованию скорости сходимости, получению оценок погрешности, изучению устойчивости вычислительных схем и различным приложениям проекционных методов посвящены фундаментальные работы С.Г. Михлина, Л.В. Канторовича, Н.И. Польского, М.А. Красносельского, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, В.В. Иванова, В.В. Петришина, а также работы Ю.И. Грибанова, Б.Г. Габдулхаева, А.Ю. Лучки, С.Д. Балашовой и других авторов. При этом привлечение идей функционального анализа дало возможность выработать единый подход к решению самых разнообразных задач, поскольку различные конкретные виды уравнений представляют собой частные случаи некоторого операторного уравнения, а также теоретически обосновать исследуемые методы.

Несмотря на широкую область применения, проекционные методы имеют свои недостатки. Хотя приближенные уравнения и проще исходного, тем не менее, получение их точных решений практически затруднительно, а иногда просто нецелесообразно (из-за погрешностей задания исходных данных). Сложен также вопрос о выборе порядка приближенного уравнения, который обеспечил бы получение решения с заданной точностью. Если решение приближенного уравнения некоторого порядка n не удовлетворяет поставленным требованиям, то приходится решать уравнение более высокого порядка, никак не используя при этом результат, полученный на предыдущем шаге.

Попытки устранения перечисленных недостатков привели к возникновению группы методов под названием проекционно-итерационные, которые основаны на возможности применения итерационных методов для приближенного решения приближенных уравнений. Так, согласно идее С.Д. Балашовой [13], реализованной для корректно поставленных задач, для каждого из приближенных уравнений (n-го уравнения) следует находить итерационным методом лишь несколько (k_n) приближений, последнее из которых полагать равным начальному приближению к решению следующего $(n+1)$-го уравнения. Такой подход естественно устраняет трудности, возникающие при решении исходного уравнения обычным проекционным методом. Кроме того, применение итерационных методов не к исходному уравнению, а к более простым приближенным уравнениям позволяет наиболее просто строить последовательность приближений к решению, а также облегчает задачу о выборе начального приближения.

В данной работе в рамках общей методологии [13] впервые исследована возможность применения проекционно-итерационного метода, основанного на методе простой итерации, к решению задачи дифференцирования в форме (1) с приближенными данными. Показана теоретическая и практическая сходимость проекционно-итерационного метода, программно реализованного для задачи (1), а также возможность численного моделирования производной дискретного временного ряда с любой наперед заданной точностью вычислений за счет соответствующего количества членов временного ряда.

Постановка задачи

Пусть функция $x(t)$ определена и дифференцируема на $[a, b]$.

Задача А. Пусть известны значения $x_i = x(t_i)$, $i = \overline{0, M}$, в узлах равномерной сетки

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_i \in [a, b] : t_i = a + i\tau, i = \overline{0, M}\}, \quad \tau = \frac{b-a}{M}, \quad M > 0.$$

Требуется вычислить значение $\dot{x}(t_j)$ производной первого порядка функции $x(t)$ в точке $t_j \in \overline{\omega}_\tau$, используя значения этой функции в некотором наборе точек из $\overline{\omega}_\tau$. А именно, найти такую функцию $\Psi(x_j, x_{j-1}, ..., x_{j-m})$ и такое наименьшее из чисел $m \geq 1$, для которых будет выполняться неравенство

$$\left| \dot{x}(t_j) - \Psi(x_j, x_{j-1}, ..., x_{j-m}) \right| \leq \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — наперед заданное малое число, $t_j \in \overline{\omega}_\tau$ $(m \leq j \leq M)$.

Для задачи А в работе [14] на основе метода неопределенных коэффициентов, дающего линейное представление для зависимости $\Psi(x_j, x_{j-1}, ..., x_{j-m})$, исследован вопрос о нахождении наименьшего допустимого количества элементов детерминированного временного ряда $x_0, x_1, ..., x_M$, обеспечивающего заданную точность вычислений значений его первой производной; разработан программный продукт, позволяющий на классе гладких функций моделировать соответствующую погрешность численного дифференцирования; проведен анализ предложенной методики на примере решения конкретной задачи.

В работе [14] рассмотрен лишь один из источников погрешности численного дифференцирования — погрешность аппроксимации, которая определяется величиной остаточного члена. Другой источник погрешности численного дифференцирования связан с погрешностями исходных данных и с погрешностями округлений при проведении расчетов на компьютере. Обусловленные этими причинами погрешности, в отличие от погрешности аппроксимации, возрастают с уменьшением шага τ. В связи с этим актуальным представляется вопрос разработки новых эффективных методов и алгоритмов численного дифференцирования, основанных на идее регуляризации.

Задача В. Пусть вместо точных значений $x_i = x(t_i)$, $i = \overline{0, M}$, заданы приближенные значения $\tilde{x}_i = x_i + \Delta_i$ функции $x(t)$ на сетке $\overline{\omega}_\tau$ и пусть известна граница Δ погрешностей этих данных, т.е. $\left|\Delta_i\right| \leq \Delta$, $i = \overline{0, M}$, так, что

$$\left| x_i - \tilde{x}_i \right| \leq \Delta, \quad i = \overline{0, M}. \tag{3}$$

Требуется найти такую функцию Ψ и такое наименьшее из чисел $m \geq 1,$ для которых будет выполняться неравенство

$$\left| \dot{x}(t_j) - \Psi(\tilde{x}_j, \tilde{x}_{j-1}, ..., \tilde{x}_{j-m}) \right| \leq \varepsilon, \tag{4}$$

где $\varepsilon \equiv \varepsilon(\Delta),$ $t_j \in \overline{\omega}_\tau$ $(m \leq j \leq M).$

Цель данной работы — исследование применения проекционно-итерационного метода, основанного на методе простой итерации, к решению задачи численного дифференцирования дискретного временного ряда с приближенными данными, в том числе задачи отыскания наименьшего допустимого количества элементов ряда для получения значений его производной первого порядка с заданной точностью вычислений.

Проекционный метод

Пусть задано уравнение

$$Au = f \tag{5}$$

с линейным ограниченным оператором A, действующим в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(u, v)_H$ произвольных элементов $u, v \in H$ и порождаемой им нормой $\|u\|_H = \sqrt{(u, u)_H}, u \in H.$ Предположим, что обратный оператор A^{-1} существует, но не является ограниченным в $H,$ т.е. не выполняется третье условие корректности задачи по Адамару (устойчивость) [6]. Обозначим $u^* \in H$ точное решение уравнения (5).

Наряду с уравнением (5) рассмотрим последовательность приближенных уравнений

$$\widetilde{A}_n \, \widetilde{u}_n = \widetilde{f}_n, \quad n = 1, 2, ..., \tag{6}$$

где $\widetilde{A}_n$ — линейный ограниченный оператор, действующий в конечномерном гильбертовом пространстве $\widetilde{H}_n$ со скалярным произведением $(\widetilde{u}_n, \widetilde{v}_n)_{\widetilde{H}_n}$ и нормой $\|\widetilde{u}_n\|_{\widetilde{H}_n} = \sqrt{(\widetilde{u}_n, \widetilde{u}_n)_{\widetilde{H}_n}},$ $\widetilde{u}_n, \widetilde{v}_n \in \widetilde{H}_n,$ изоморфном подпространству H_n исходного пространства H $(H_1 \subset H_2 \subset ... \subset H_n \subset ... \subset H,\ H_1 \neq \varnothing).$

Пусть Φ_n — линейный оператор, ставящий во взаимно-однозначное соответствие каждому элементу $u_n \in H_n$ элемент $\widetilde{u}_n \in \widetilde{H}_n;$ Φ_n^{-1} — оператор, осуществляющий обратное отображение. Введем также оператор $\overline{\Phi}_n,$ являющийся расширением оператора Φ_n на все пространство $H.$ В роли $\overline{\Phi}_n$ может выступать, например, оператор $\overline{\Phi}_n = \Phi_n P_n,$ где P_n — оператор ортогонального проектирования H на H_n $(P_n^2 = P_n,\ P_n^* = P_n,\ \|P_n\| = 1).$ Не ограничивая общности, будем считать, что пространства H_n и $\widetilde{H}_n$ изометричны, откуда следует, что $\|\Phi_n\| = \|\Phi_n^{-1}\| = 1.$ (При указанном выборе оператора $\overline{\Phi}_n$ выполняется также условие $\|\overline{\Phi}_n\| = 1.$) В противном случае в пространствах $\widetilde{H}_n$ можно ввести новую метрику, обеспечивающую указанную изометричность [13].

Заметим, что если $\widetilde{f}_n = \overline{\Phi}_n f,$ то от уравнения (6) легко перейти к уравнению

$$A_n \, u_n = f_n, \quad n = 1, 2, ...,$$

заданному в подпространстве $H_n \subset H,$ и наоборот, при этом $A_n = \Phi_n^{-1} \widetilde{A}_n \Phi_n,$ $f_n = P_n f.$

 ISSN 0572-2691

Введенные пространства и операторы при каждом натуральном $n \in N$ свяжем условиями близости:

— для любого $\tilde{u}_n \in \tilde{H}_n$

$$\| \tilde{A}_n \tilde{u}_n - \overline{\Phi}_n A \Phi_n^{-1} \tilde{u}_n \|_{\tilde{H}_n} \leq \tilde{\alpha}_n \| \tilde{u}_n \|_{\tilde{H}_n}; \tag{7}$$

— для любого $\tilde{u}_n \in \tilde{H}_n$ существует элемент $\tilde{z}_n \in \tilde{H}_n$ такой, что

$$\| A \Phi_n^{-1} \tilde{u}_n - \Phi_n^{-1} \tilde{z}_n \|_{\tilde{H}_n} \leq \tilde{\beta}_n \| \tilde{u}_n \|_{\tilde{H}_n}; \tag{8}$$

— для любого $f \in H$

$$\| \Phi_n^{-1} \overline{\Phi}_n f - f \|_H \leq \tilde{\eta}_n \| f \|_H, \tag{9}$$

где $\tilde{\alpha}_n$, $\tilde{\beta}_n$, $\tilde{\eta}_n$ — положительные числа, не зависящие от $\tilde{u}_n \in \tilde{H}_n$ и $f \in H$ соответственно, причем $\tilde{\alpha}_n \to 0$, $\tilde{\beta}_n \to 0$, $\tilde{\eta}_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Обозначим $\operatorname{Ker} A = \{u \in H : Au = 0\}$ подпространство нулей оператора A, $\overline{H} = H \setminus \operatorname{Ker} A$ — фактор-пространство пространства H по подпространству $\operatorname{Ker} A$ нулей оператора A, а $\overline{A}$ — линейный оператор из $\overline{H}$ в H, индуцированный оператором A в фактор-пространстве $\overline{H}$ [12].

Теорема 1 (о сходимости проекционного метода). Пусть уравнение (5) разрешимо при любой правой части $f \in H$ и выполнены условия близости (7)–(9). Тогда при всех $n \geq N \geq 1$, удовлетворяющих неравенству

$$\tilde{\rho}_n = \| \overline{A}^{-1} \| (\tilde{\alpha}_n + \tilde{\beta}_n \| E - P_n \|) < 1, \tag{10}$$

приближенное уравнение (6) также разрешимо при любой правой части $\tilde{f}_n \in \tilde{H}_n$ и последовательность $\{\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^*\}_{n=N}^{\infty}$, где $\tilde{u}_n^* \in \tilde{H}_n$ — точное решение уравнения (6), сходится к точному решению $u^* \in H$ уравнения (5) по норме пространства H с оценкой погрешности

$$\| \Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^* - u^* \|_H \leq \tilde{\gamma}_n, \quad n \geq N, \tag{11}$$

где $\tilde{\gamma}_n = 2 \| \overline{A}^{-1} \| \, \| f - A \Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^* \|_H = O(\tilde{\eta}_n + \tilde{\alpha}_n + \tilde{\beta}_n \| E - P_n \|)$; E — единичный оператор в H, $E - P_n : Y \to H$, $Y = \{y \in H : y = A \Phi_n^{-1} \tilde{u}_n - \Phi_n^{-1} \tilde{f}_n, \tilde{u}_n, \tilde{f}_n \in \tilde{H}_n\}$.

Если к тому же, начиная с некоторого номера $n = N_0 \geq N$, выполнено условие

$$\| \Phi_n^{-1} \overline{\Phi}_n u^* - u^* \|_H \leq \tilde{\sigma}_n, \tag{12}$$

где $\tilde{\sigma}_n \to 0$ при $n \to \infty$, то справедлива оценка

$$\| \tilde{u}_n^* - \overline{\Phi}_n u^* \|_{\tilde{H}_n} \leq \tilde{\gamma}_n + \tilde{\sigma}_n, \quad n \geq N_0. \tag{13}$$

Доказательство теоремы проводится с использованием теоремы 1 из [15].

Предположим теперь, что исходные данные задачи (5) заданы с погрешностью δ, т.е. вместо правой части $f \in H$ нам известно $f_\delta \in H$ такое, что

$$\| f - f_\delta \|_H \leq \delta. \tag{14}$$

Требуется по $f_\delta \in H$ построить приближенное решение $u_\delta \in H$ уравнения (5), удовлетворяющее условию $u_\delta \to u^*$ при $\delta \to 0$.

Для приближенного решения задачи (5) при условии (14) аппроксимируем уравнение

$$Au = f_\delta \tag{15}$$

так же, как и раньше, последовательностью приближенных уравнений

$$\widetilde{A}_n \widetilde{u}_n = \widetilde{f}_n(\delta), \ \ n \geq N, \tag{16}$$

где $\widetilde{A}_n$ — линейный ограниченный оператор в пространстве $\widetilde{H}_n$, $\widetilde{f}_n(\delta) = \overline{\Phi}_n f_\delta$. Из определения оператора $\overline{\Phi}_n = \Phi_n P_n$ вытекает, что отклонение правых частей приближенных уравнений (6) и (16) в смысле нормы пространства $\widetilde{H}_n$ не превосходит погрешности δ задания правой части уравнения (5):

$$\| \widetilde{f}_n - \widetilde{f}_n(\delta) \|_{\widetilde{H}_n} = \| \overline{\Phi}_n f - \overline{\Phi}_n f_\delta \|_{\mathrm{H}} \leq \| \overline{\Phi}_n \| \| f - f_\delta \|_H \leq \delta, \ \ n \geq N. \tag{17}$$

По теореме 1 из разрешимости уравнения (5) при любой правой части и выполнимости условий (7)–(9) следует разрешимость каждого из приближенных уравнений (16) для всех $n \geq N$, удовлетворяющих неравенству (10), причем последовательность $\{\Phi_n^{-1} \widetilde{u}_n^*(\delta)\}_{n=N}^{\infty}$, где $\widetilde{u}_n^*(\delta) \in \widetilde{H}_n$ — точное решение приближенного уравнения (16), сходится к точному решению $u_\delta^* \in H$ уравнения (15) с оценкой погрешности

$$\| \Phi_n^{-1} \widetilde{u}_n^*(\delta) - u_\delta^* \| \leq \widetilde{\gamma}_n(\delta) = 2 \| \overline{A}^{-1} \| \| f_\delta - A \Phi_n^{-1} \widetilde{u}_n^*(\delta) \|, \ \ n \geq N.$$

Проекционно-итерационный метод

Предположим, что каждый из линейных операторов $\widetilde{A}_n$ положителен (а значит, самосопряжен) в $\widetilde{H}_n$ и область его определения $D(\widetilde{A}_n)$ плотна в $\widetilde{H}_n$. Некорректность приближенных уравнений (16) связана с тем, что собственные значения оператора $\widetilde{A}_n$, упорядоченные по убыванию ($(\widetilde{\lambda}_n^{(1)} \geq \widetilde{\lambda}_n^{(2)} \geq \ldots \geq \widetilde{\lambda}_n^{(\mathrm{i}_\mathrm{n})} > 0$, $i_n = \dim \widetilde{H}_n$), стремятся к нулю. Будем считать, что соответствующая система собственных функций $\{\widetilde{\varphi}_n^{(\mathrm{i})}\} \subset D(\widetilde{A}_n)$, $i = 1, 2, \ldots, i_n$, оператора $\widetilde{A}_n$ ортонормированна и полна в $\widetilde{H}_n$, так что для любого элемента $\widetilde{v}_n \in \widetilde{H}_n$ справедливо разложение $\widetilde{v}_n = \sum_{i=1}^{i_n} \widetilde{C}_n^{(i)} \widetilde{\varphi}_n^{(i)}$, где $\widetilde{C}_n^{(i)} = (\widetilde{v}_n, \widetilde{\varphi}_n^{(i)})_{\widetilde{H}_n}$ — коэффициенты Фурье элемента $\widetilde{v}_n$.

Для решения каждого из приближенных уравнений (16) будем применять явный двухслойный итерационный метод (метод простой итерации)

$$\widetilde{u}_n^{(k+1)} = \widetilde{u}_n^{(k)} - \widetilde{\tau}_n (\widetilde{A}_n \widetilde{u}_n^{(k)} - \widetilde{f}_n(\delta)), \ \ k = 0, 1, \ldots, \ n \geq N, \tag{18}$$

где $\widetilde{u}_n^{(k)} \equiv \widetilde{u}_n^{(k)}(\delta) \in \widetilde{H}_n$ — k-е итерационное приближение к точному решению $\widetilde{u}_n^*(\delta) \in \widetilde{H}_n$ уравнения (16), $\widetilde{\tau}_n > 0$ — итерационный параметр, постоянный при данном n.

Если в приближенном уравнении (16) оператор $\widetilde{A}_n$ не является самосопряженным и положительным, то можно провести предварительную симметризацию по Гауссу и применить итерационный метод к симметризованному уравнению $\widetilde{A}_n^* \widetilde{A}_n \widetilde{u}_n = \widetilde{A}_n^* \widetilde{f}_n(\delta)$ с положительным в $\widetilde{H}_n$ линейным оператором $\widetilde{A}_n^* \widetilde{A}_n$, где $\widetilde{A}_n^*$ — сопряженный оператор по отношению к $\widetilde{A}_n$. Соответствующую итерационную формулу

ISSN 0572-2691

$$\widetilde{u}_n^{(k+1)} = \widetilde{u}_n^{(k)} - \widetilde{\tau}_n(\widetilde{A}_n^*\widetilde{A}_n\,\widetilde{u}_n^{(k)} - \widetilde{A}_n^*\widetilde{f}_n(\delta)),\;\; k = 0, 1, \ldots,\;\; n \ge N, \tag{19}$$

в зависимости от контекста можно интерпретировать как итерационный метод решения вариационной задачи минимизации функционала невязки $J_n(\widetilde{u}_n) = \|\widetilde{A}_n\widetilde{u}_n - \widetilde{f}_n(\delta)\|^2_{\widetilde{H}_n}$.

Как известно [10], итерационный метод (18) для уравнения (16) сходится в $\widetilde{H}_n$ при

$$0 < \widetilde{\tau}_n < 2/\widetilde{\lambda}_n^{(1)}, \tag{20}$$

где $\widetilde{\lambda}_n^{(1)} > 0$ — наибольшее собственное значение оператора $\widetilde{A}_n$, однако из-за близости к нулю нижней границы спектра оператора $\widetilde{A}_n$ сложно конкретизировать скорость такой сходимости. Кроме того, при итерационном решении каждого из уравнений (16) с учетом неточного задания правой части (оценка (17)) следует выбирать условие окончания итераций, согласуясь с уровнем этой погрешности, т.е. продолжать итерации до некоторого номера $k(\delta)$.

Рассмотрим проекционно-итерационный принцип решения задачи (5) при условии (14), основанный на применении к решению каждого из приближенных уравнений (16) итерационного метода (18), (20). Построив с помощью этого метода для n-го приближенного уравнения лишь несколько приближений $\widetilde{u}_n^{(k)} \in \widetilde{H}_n$, $k = 1, 2, \ldots, k_n$ $(k_n \le k(\delta))$ и взяв последнее из них за начальное приближение в итерационном процессе для следующего, $(n+1)$-го уравнения, получим последовательность $\{\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=N}^{\infty}$ приближений к решению $u^* \in H$ уравнения (5), определяемую формулами

$$\widetilde{u}_n^{(k+1)} = \widetilde{u}_n^{(k)} - \widetilde{\tau}_n(\widetilde{A}_n\,\widetilde{u}_n^{(k)} - \widetilde{f}_n(\delta)),\;\; k = 0, 1, \ldots, k_n - 1; \tag{21}$$

$$\widetilde{u}_{n+1}^{(0)} = \Phi_{n+1}\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)},\;\; n \ge N;\;\; \widetilde{u}_N^{(0)} \in \widetilde{H}_N.$$

Здесь $\widetilde{u}_n^{(k)} \equiv \widetilde{u}_n^{(k)}(\delta) \in \widetilde{H}_n$ для всех $k = 0, 1, \ldots, k_n$, $\widetilde{\tau}_n \in (0, 2/\widetilde{\lambda}_n^{(1)})$, $n \ge N$.

Достаточные условия сходимости последовательности $\{\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=N}^{\infty}$ к u^* в H устанавливает следующая теорема.

Теорема 2 (о сходимости проекционно-итерационного метода). Пусть выполнены условия теоремы 1 и в проекционно-итерационном методе (20), (21) при каждом $n \ge N$ число итераций удовлетворяет условию $k_n \le k(\delta)$, причем $k(\delta)\delta \to 0$ при $\delta \to 0$. Тогда последовательность $\{\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=N}^{\infty}$, определяемая по формулам (20), (21), сходится в H к решению u^* задачи (5) при условии (14), если $\delta \to 0$, и справедлива оценка погрешности

$$\|\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}(\delta) - u^*\|_H \le \widetilde{\mu}_n(\delta),\;\; n \ge N, \tag{22}$$

где

$$\widetilde{\mu}_n(\delta) = \widetilde{\mu}'_n\,\|\widetilde{z}_N^{(0)}\|_{\widetilde{H}_N} + \widetilde{\mu}''_n(\delta) + k_n\widetilde{\tau}_n\delta + \widetilde{\gamma}_n;\;\; \widetilde{\mu}'_n = \prod_{j=N}^{n}\widetilde{q}_j^{\,k_j},$$

$$\widetilde{\mu}''_n = \sum_{i=N}^{n-1}(k_i\widetilde{\tau}_i\delta + \widetilde{\gamma}_i + \widetilde{\gamma}_{i+1})\prod_{j=i+1}^{n}\widetilde{q}_j^{\,k_j},\;\; 0 < \widetilde{q}_j = \|\widetilde{E}_j - \widetilde{\tau}_j\widetilde{A}_j\| < 1,$$

$\widetilde{E}_j$ — единичный оператор в $\widetilde{H}_j$, $\widetilde{z}_N^{(0)} = \widetilde{u}_N^{(0)} - \widetilde{u}_N^*$, $\widetilde{\gamma}_n$ дается в (11).

Если к тому же, начиная с некоторого номера $n = N_0 \geq N,$ выполнено условие (12), то справедлива оценка

$$\| \tilde{u}_n^{(k_n)}(\delta) - \overline{\Phi}_n u^* \|_{\tilde{H}_n} \leq \tilde{\mu}_n(\delta) + \tilde{\sigma}_n, \quad n \geq N_0. \tag{23}$$

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2 из [15].

При изучении факта сходимости проекционно-итерационного метода следует, что сходимость последовательности $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}(\delta)\}_{n=N}^{\infty}$ к u^*, если $\delta \to 0$, имеет место при произвольном выборе чисел k_n, в частности, все числа k_n могут быть равными 1. Следует, однако, иметь в виду, что с возрастанием n увеличивается объем вычислительной работы, необходимой для нахождения очередного приближения. Поэтому нужно стремиться к тому, чтобы за счет подходящего выбора k_n по возможности максимально приблизиться к искомому решению при данном n и только после этого переходить к уравнению более высокой размерности. С другой стороны, не следует выбирать число k_n при данном n слишком большим, поскольку, начиная с некоторого момента, увеличение этого числа не приводит к существенному улучшению (по отношению к решению u^* исходного уравнения) очередных приближений. Таким образом, возникает вопрос о целесообразном выборе чисел k_n $(n \geq N)$, ответ на который в общем случае затруднителен, однако могут быть даны некоторые рекомендации [15]. Оценка (22), в частности, показывает, что в случае применения проекционно-итерационного метода (20), (21) к решению задачи (5) при условии (14) в качестве параметра регуляризации выступает число итераций k_n, которое следует согласовывать как с погрешностью δ в задании правой части, так и с погрешностью γ_n проекционного метода.

Отметим также, что метод простой итерации (18), (20) для решения некорректных уравнений (17), когда отношение $\tilde{\lambda}_n^{(1)} / \tilde{\lambda}_n^{(i_n)}$ наибольшего и наименьшего собственных значений оператора $\tilde{A}_n$ велико, является медленно сходящимся методом. Проекционно-итерационный подход позволяет ускорить сходимость процесса итерационных приближений к решению задачи (5) при условии (14) и тем самым уменьшить количество вычислительных затрат, так как значительная часть этих приближений строится для приближенных уравнений (16) невысокой размерности при неизменной погрешности δ их правых частей. Кроме того, ускорить сходимость итерационных процессов при решении приближенных уравнений (16) можно, во-первых, за счет применения неявных итерационных методов и, во-вторых, оставаясь в классе явных методов, за счет выбора итерационного параметра $\tilde{\tau}_n$, зависящего от номера итерации. Используются также неявные итерационные методы с переменными итерационными параметрами.

Проекционно-итерационный принцип решения задачи дифференцирования

Рассмотрим вопрос применения проекционно-итерационного подхода к решению задачи о нахождении производной $u(t) = \dot{x}(t)$ для непрерывно-дифференцируемой функции $x(t)$, заданной на отрезке $[a, b]$ своим Δ-приближением $\tilde{x}(t)$. Эта задача с учетом (1) может быть сведена к задаче решения линейного интегрального уравнения Вольтерра первого рода

$$\int\limits_{t_j}^{t} u(s)\,ds = \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_j), \quad t \in [a, b], \tag{24}$$

при обобщающем (3) условии $\max\limits_{t\in[a,b]} \left| x(t) - \tilde{x}(t) \right| \le \Delta,$ где Δ — заданный уровень погрешности исходных данных, $t_j \in \overline{\omega}_\tau \subset [a, b],$ $j = \overline{0, M}$. На основании теоремы 3.18.5 книги [16] решение уравнения (24) существует и единственно.

На уравнение (24) с приближенной правой частью можно смотреть как на операторное уравнение (15) при условии (14) $(Au = \int\limits_{t_j}^{t} u(s)\,ds,$ $f_\delta = \tilde{x} - \tilde{x}_j,$ $\tilde{x}_j = \tilde{x}(t_j),$ $\delta = 2\Delta\sqrt{b-a}),$ заданное в гильбертовом пространстве $H = L_2[a, b],$ с линейным ограниченным компактным в H оператором A, для которого обратный оператор A^{-1} существует, но является неограниченным [16].

Следуя постановке задачи B, рассмотрим частный случай уравнения (24):

$$\int\limits_{t_j}^{t} u(s)\,ds = \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_j), \quad t \in [t_{j-m}, t_j], \tag{25}$$

где $[t_{j-m}, t_j] \subseteq [a, b],$ $1 \le m \le j \le M;$ $t_i \in \overline{\omega}_\tau,$ $i = \overline{0, M}.$

Дискретизируем уравнение (25) на промежутке $[t_{j-m}, t_j] \subseteq [a, b]$ при фиксированных значениях j и m из указанного диапазона с помощью метода квадратур. Для этого запишем уравнение (25) в узлах $t_i \in [t_{j-m}, t_j],$ $i = \overline{j-m, j},$ равномерной сетки $\overline{\omega}_\tau$:

$$\int\limits_{t_j}^{t_i} u(s)\,ds = \tilde{x}(t_i) - \tilde{x}(t_j), \quad i = \overline{j-m, j},$$

и после замены полученного интеграла с помощью той или иной квадратурной формулы придем к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{i=0}^{p} B_i^{(p)} u_i = \tilde{x}_j - \tilde{x}_{j-p}, \quad p = \overline{0, m}, \tag{26}$$

где $B_i^{(p)},$ $i = \overline{0, p},$ $p = \overline{0, m},$ — квадратурные коэффициенты; $u_i \approx u(s_i),$ $i = \overline{0, m},$ — приближенные значения искомой функции $u(t) = \dot{x}(t)$ в квадратурных узлах $s_i = t_{j-m} + i\tau,$ $i = \overline{0, m}.$

Особенность СЛАУ (26), имеющей треугольную матрицу коэффициентов, состоит в невозможности непосредственного определения значения $u_0 \approx \dot{x}(t_{j-m}),$ поскольку при $t = t_j$ интеграл в уравнении (25) равен нулю. Преодолеть это затруднение можно, если воспользоваться конечно-разностным отношением $\dot{x}(t_{j-m}) \approx$ $\approx (\tilde{x}_{j-m+1} - \tilde{x}_{j-m})/\tau,$ имеющим с учетом (3) суммарную погрешность аппроксимации и округлений, не превосходящую $O(\tau) + 2\Delta/\tau$. Тогда, заменив в системе (26) первое уравнение (при $p = 0$) уравнением

$$\tau u_0 = \tilde{x}_{j-m+1} - \tilde{x}_{j-m}, \tag{27}$$

обладающим погрешностью порядка $O(\tau^2) + 2\Delta,$ приходим к замкнутой СЛАУ, позволяющей последовательно определить искомые приближенные значения $u_i \approx \dot{x}(t_{j-m} + i\tau),$ $i = \overline{0, m},$ по рекуррентным формулам.

Метод квадратур сведения интегрального уравнения (25) к конечной системе уравнений (27), (26) с $p=\overline{1,m}$ является по существу методом проекционного типа. В самом деле, на указанную систему при условии (3) и при фиксированном $m=m_n$ $(n=1,2,\dots)$ можно смотреть как на «приближенное» операторное уравнение (16) при условии (17), заданное в конечномерном гильбертовом пространстве $\widetilde{H}_n=R^{m_n+1}$ векторов $\widetilde{u}_n=(u_0,u_1,\dots,u_{m_n})$ со скалярным произведением $(\widetilde{u}_n,\widetilde{v}_n)_{\widetilde{H}_n}=\sum\limits_{i=0}^{m_n}u_iv_i\tau$ и нормой $\|\widetilde{u}_n\|_{\widetilde{H}_n}=\sqrt{\sum\limits_{i=0}^{m_n}u_i^2\tau}$, в котором

$$\widetilde{A}_n=\begin{pmatrix}\tau & 0 & \dots & 0\\ B_0^{(1)} & B_1^{(1)} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ B_0^{(m_n)} & B_1^{(m_n)} & \dots & B_{m_n}^{(m_n)}\end{pmatrix},\quad \widetilde{f}_n(\delta)=\begin{pmatrix}\text{€}_{j-m_n+1}-\text{€}_{j-m_n}\\ \text{€}_j-\text{€}_{j-1}\\ \vdots\\ \text{€}_j-\text{€}_{j-m_n}\end{pmatrix}. \tag{28}$$

Подпространства $H_n\subset L_2[a,b]$, изоморфные пространствам $\widetilde{H}_n$, можно выбирать различными для различных квадратурных формул. В случае квадратурной формулы прямоугольников в качестве H_n разумно выбрать подпространство ступенчатых функций $u_n(t)$, постоянных на каждом из элементарных промежутков $[s_i,s_{i+1})\subset[a,b]$:

$$u_n(t)=\sum_{i=0}^{m_n}u_i\,\chi_i(t),\ \ t\in[a,b], \tag{29}$$

где $\chi_i(t)$ — характеристическая функция промежутка $[s_i,s_{i+1})$, $s_i=t_{j-m_n}+i\tau$, $i=\overline{0,m_n}$. Функция (29), очевидно, принимает в каждом узле $t=s_i$ значение u_i, $i=\overline{0,m_n}$. Тем самым определено отображение Φ_n подпространства H_n на $\widetilde{H}_n$, которое каждой ступенчатой функции $u_n(t)\in H_n$ вида (29) ставит в соответствие вектор $\widetilde{u}_n=(u_0,u_1,\dots,u_{m_n})\in\widetilde{H}_n$ ее значений в узлах s_i, $i=\overline{0,m_n}$, отрезка $[a,b]$. Оператор $\Phi_n^{-1}:\widetilde{H}_n\to H_n$ осуществляет обратное отображение и позволяет получить на $[a,b]$ кусочно-постоянное восполнение вида (29) для таблицы значений $u_0,u_1,\dots,u_{m_n}$. Что касается оператора $\overline{\Phi}_n:H\to H_n$, то он каждой функции $u(t)\in L_2[a,b]$ ставит в соответствие вектор $\widetilde{u}_n=(u(s_0),u(s_1),\dots,u(s_{m_n}))$ ее значений в узлах $s_0,s_1,\dots,s_{m_n}$ отрезка $[a,b]$. Тогда оператор $P_n=\Phi_n^{-1}\overline{\Phi}_n$ ортогонального проектирования H на подпространство H_n, очевидно, любую функцию $u(t)\in L_2[a,b]$ переводит в функцию $u_n(t)$ вида (29). Легко видеть, что пространства H_n и $\widetilde{H}_n$ изометричны:

$$\|u_n\|^2_{L_2[a,b]}=\int_a^b u_n^2(t)\,dt=\int_a^b\sum_{i=0}^{m_n}u_i^2\chi_i(t)\,dt=$$

$$=\sum_{i=0}^{m_n}u_i^2\int_a^b\chi_i(t)\,dt=\sum_{i=0}^{m_n}u_i^2\int_{s_i}^{s_{i+1}}1\,dt=\sum_{i=0}^{m_n}u_i^2\tau=\|\widetilde{u}_n\|^2_{\widetilde{H}_n}.$$

Так же, как в работе [17], можно показать выполнимость условий теоремы 1, гарантирующих сходимость проекционного метода решения интегрального уравнения (25).

Поскольку точное решение СЛАУ (16), (28) в условиях приближенно заданной правой части на практике нецелесообразно и, более того, в силу неустойчивости решения поиск его нуждается в подключении процедуры регуляризации, будем применять к решению такой СЛАУ метод простой итерации (19) с итерационным параметром $0 < \tilde{\tau}_n < 2/\| \tilde{A}_n \|^2$. При этом для нахождения наименьшего из чисел m_n $(1 \le m_n \le j \le M)$, позволяющего в соответствии с постановкой задачи В получить приближенное значение $u_{m_n} \approx \dot{x}(t_j)$ с точностью $\varepsilon = O(\Delta)$, воспользуемся проекционно-итерационным принципом решения этой задачи.

Аппроксимируем интегральное уравнение (25) при условии (3) последовательностью конечных систем (16), (28) так, что $m_1 \ge 1$, $m_{n+1} = m_n + 1$, $m_n \le j \le M$, $n \ge 1$. Для каждой n-й такой системы будем находить итерационным методом (19) лишь несколько (k_n) приближений $\tilde{u}_n^{(k)} \in \tilde{H}_n$, $k = 1, 2, ..., k_n$, последнее из которых с помощью кусочно-постоянного восполнения (29) будем полагать равным начальному приближению в итерационном процессе для следующей, $(n+1)$-й системы:

$$\tilde{u}_n^{(k+1)} = \tilde{u}_n^{(k)} - \tilde{\tau}_n (\tilde{A}_n^* \tilde{A}_n \tilde{u}_n^{(k)} - \tilde{A}_n^* \tilde{f}_n(\delta)), \ k = 0, 1, ..., k_n - 1; \tag{30}$$

$$\tilde{u}_{n+1}^{(0)} = \Phi_{n+1} \Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)}, \ n \ge 1; \ \tilde{u}_1^{(0)} \in \tilde{H}_1; \ \tilde{\tau}_n \in (0, 2/\| \tilde{A}_n \|^2).$$

Обоснование сходимости в $L_2[a, b]$ последовательности приближений $\{\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)}\}$, а также оценку погрешности метода (30) можно получить с использованием теоремы 2. В частности, из оценки (23), факта поточечной сходимости в $\tilde{H}_n = R^{m_n+1}$ векторной последовательности $\{\tilde{u}_n^{(k)}\}$, $\tilde{u}_n^{(k)} = (u_0^{(k)}, u_1^{(k)}, ..., u_{m_n}^{(k)})$ и эквивалентности норм в $\tilde{H}_n$ вытекает равносильное (4) неравенство

$$\left| \dot{x}(t_j) - u_{m_n}^{(k_n)} \right| \le \varepsilon, \ n \ge 1, \tag{31}$$

где $u_{m_n}^{(k_n)} = \Psi(\tilde{x}_j, \tilde{x}_{j-1}, ..., \tilde{x}_{j-m_n})$ — последняя координата вектора $\tilde{u}_n^{(k_n)} \in \tilde{H}_n$, определяемого по формулам (30), $1 \le m_n \le j \le M$; $\varepsilon \equiv \varepsilon(\Delta) = O(\tilde{\mu}_n(\delta) + \tilde{\sigma}_n)$, $\tilde{\mu}_n(\delta)$ и $\tilde{\sigma}_n$ даются формулами (22) и (12) соответственно, $\delta = 2\Delta\sqrt{b-a}$, Δ — граница погрешности данных (3).

Заметим, что неравенство (31) можно рассматривать как близкий к «истинному» критерий окончания проекционно-итерационного процесса (30) для решения задачи В о дифференцировании дискретного временного ряда с приближенными данными. Однако критерием (31), как и связанным с ним, вообще говоря, «ложным» критерием $\left| u_{m_{n+1}}^{(k_{n+1})} - u_{m_n}^{(k_n)} \right| \le \varepsilon$ удобно пользоваться лишь в тех случаях, когда используемые здесь величины, входящие в оценку (23), легко вычисляются, что не всегда имеет место при решении практических задач.

Численный эксперимент и анализ полученных результатов

Задача нахождения минимального количества членов временного ряда (числа $m \ge 1$), достаточного для получения приближенного значения производной $\dot{x}(t_j)$,

$t_j \in \overline{\omega}_\tau$ $(m \le j \le M)$ с заданной точностью ε, согласованной с погрешностью Δ исходных данных, вряд ли имеет аналитическое решение, поскольку практическая точность полученного решения в методах регуляризации, очевидно, существенно зависит от характера искомой функции, который в практических задачах не всегда можно предвидеть заранее. В связи с этим возникает предположение, требующее дополнительных исследований, о том, что величина m зависит не только от погрешности Δ исходных данных, но и от характера функции $x(t)$ из выражения (25).

В качестве тестового примера рассмотрим класс гиперболических функций, представляющих собой семейство элементарных функций, выраженных через экспоненту и тесно связанных с тригонометрическими функциями.

Следует отдельно заметить, что цель данного эксперимента — не нахождение как можно более надежного числа m для всего класса гиперболических функций, а лишь проверка способности вычислительных алгоритмов на основе предложенных выше проекционного и проекционно-итерационного методов давать адекватные результаты.

В качестве эталонных для класса гиперболических функций возьмем следующие функции с известными точными производными:

а) $\operatorname{sh}(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$, $\dfrac{d}{dt}\operatorname{sh}(t) = \operatorname{ch}(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$;

б) $\operatorname{ch}(t)$, $\dfrac{d}{dt}\operatorname{ch}(t) = \operatorname{sh}(t)$;

в) $\operatorname{th}(t) = \dfrac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)} = \dfrac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$, $\dfrac{d}{dt}\operatorname{th}(t) = \operatorname{sech}^2(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(t)}$.

Будем искать приближенное решение задачи B о дифференцировании дискретного временного ряда, определенного на равномерной сетке $\overline{\omega}_\tau \subset [-1, 1]$, $\tau = 0,1$ с погрешностью исходных данных, не превосходящей $\Delta = 0{,}01$. На первом шаге проекционно-итерационного алгоритма (при $n = 1$) начальное значение для m было выбрано равным $m_1 = 2$, и к решению соответствующей системы линейных уравнений вида (16), (28), полученной с использованием квадратурной формулы трапеций, применялся метод простой итерации с начальным приближением $\widetilde{u}_1^{(0)} = (0,\ 0,\ 0)$. Количество k_n строящихся приближений на каждом n-м шаге алгоритма $(n \ge 1)$ выбиралось по принципу невязки [6], т.е как наименьшее целое k, удовлетворяющее условию $\| \widetilde{A}_n \widetilde{u}_n^{(k)} - \widetilde{f}_n(\delta) \|_{\widetilde{H}_n} < \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n = C_n(\tau^2 + \Delta)$ ($C_n = \mathrm{const} > 0$) задавалось величиной порядка суммарной погрешности аппроксимации интегрального уравнения (25) и погрешности исходных данных. Начальное приближение $\widetilde{u}_{n+1}^{(0)}$ в итерационном процессе для системы (16), (28), полученной на $(n+1)$-м шаге алгоритма, определялось с помощью функции вида (29), восполняющей приближенное решение $\widetilde{u}_n^{(k_n)}$, полученное на предыдущем шаге. Заданная точность вычислений $\varepsilon = 0{,}001$ в критерии $\varepsilon_n < \varepsilon$ окончания работы алгоритма была достигнута при выполнении указанного в таблице количества N шагов алгоритма и соответствующего суммарного количества итераций, необходимых для отыскания оптимального значения $m = m_N$. Сравнение полученного приближенного решения задачи дифференцирования с извест-

 ISSN 0572-2691

ным для выбранных тестовых функций точным решением показало совпадение результатов до второго знака после запятой, что согласуется с погрешностью исходных данных.

Результаты работы программы, реализующей проекционную расчетную схему (ПРС) и проекционно-итерационную расчетную схему (ПИРС), основанные на методе простой итерации, приведены в таблице.

Таблица

Тестовая функция	Значение $m = m_N$	Число итераций (ПРС)	Число итераций (ПИРС)
sh (t)	5	$24+17+39+28=108$	$24+14+14+11=63$
ch (t)	4	$23+27+33=83$	$23+18+12=53$
th (t)	7	$14+27+13+12+32+36=134$	$14+21+10+7+18+11=81$

Из таблицы видно, что применение проекционно-итерационного подхода, основанного на методе простой итерации, к решению задачи численного дифференцирования дискретного временного ряда позволяет существенно уменьшить суммарное число итераций по сравнению с обычным проекционным методом.

Заключение

В работе рассмотрен вопрос теоретического обоснования проекционно-итерационного метода решения некорректного линейного операторного уравнения в гильбертовом пространстве, основанного на методе простой итерации. Сформулированы теоремы о сходимости проекционного и проекционно-итерационного методов, получены оценки погрешности. Даны рекомендации по выбору регуляризирующего количества итераций при решении каждого из приближенных уравнений, рассматриваемых в конечномерных гильбертовых пространствах, изоморфных подпространствах исходного пространства.

В работе исследован вопрос о возможности применения проекционно-итерационного подхода к решению задачи дифференцирования временного ряда с приближенными данными, а также задачи нахождения наименьшего допустимого количества элементов дискретного временного ряда $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_M$, обеспечивающего достижение заданной точности вычислений его первой производной. Разработан программный продукт, позволяющий на классе одномерных непрерывно-дифференцируемых функций получать математические модели численного дифференцирования; проведен анализ предложенной методики на примере решения конкретных задач.

Авторы выражают благодарность В.М. Кунцевичу, обратившему наше внимание на актуальность решения рассматриваемой проблемы.

О.М. Кісельова, Л.Л. Гарт, П.О. Довгай

ДО ПИТАННЯ ПРО ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОХІДНОЇ ДИСКРЕТНОГО ЧАСОВОГО РЯДУ З НАБЛИЖЕНИМИ ДАНИМИ

Досліджено питання про застосування проекційно-ітераційного методу, заснованого на методі простої ітерації, до розв'язування задачі чисельного диференціювання дискретного часового ряду, в тому числі задачі відшукання найменшої допустимої кількості елементів часового ряду для отримання значень його похідної першого порядку з заданою точністю обчислень. Сформульовано теорему про збіжність проекційно-ітераційного методу, отримано оцінку похибки. Розроблено програмний продукт, що дозволяє моделювати розв'язок задачі чисельного диференціювання, проведено порівняльний аналіз запропонованого методу та обчислювальної схеми проекційного типу на прикладі розв'язання задачі диференціювання певного класу функцій.

E.M. Kiseleva, L.L. Hart, P.A. Dovgay

ON A PROBLEM OF NUMERICAL SIMULATING THE DERIVATIVE OF DESCRETE TIME SERIES WITH APPROXIMATE VALUES

The problem of applying the projection-iteration method based on the simple iteration method to solving the numerical differentiation problem is investigated including the problem of finding a least admissible number of discrete time series elements for obtaining the time series derivative of the first order values with a given precision. The theorem of projection-iteration method convergence is formulated, the error estimate is obtained. The program simulating the numerical differentiation problem's solution is worked out, the comparative analysis of the suggested method and a computational scheme of projection type is carried out for example of differentiation problem solving of determined class of functions.

1. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. — М. : Физматлит, 2001. — 630 с.
2. *Кунцевич В.М.* О точности построения аппроксимирующих моделей при ограниченных помехах измерений // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 5. — С. 125–133.
3. *Мысовских И.П.* Лекции по методам вычислений. — М. : Физматгиз, 1962. — 345 с.
4. *Вержбицкий В.М.* Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения). — М. : Высш. шк., 2001. — 266 с.
5. *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. — М. : Наука, 1976. — 248 с.
6. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. — М. : Наука, 1979. — 288 с.
7. *Иванов В.В.* Методы вычислений на ЭВМ: Справочное пособие. — Киев : Наук. думка, 1986. — 584 с.
8. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. — Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1962. — 92 с.
9. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. — М. : Изд-во МГУ, 1974. — 320 с.
10. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. — М. : Изд-во ЛКИ, 2009. — 480 с.
11. *Емелин И.В., Красносельский М.А.* К теории некорректных задач // Докл. АН СССР. — 1979. — **244**, № 4. — С. 805–808.
12. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. — СПб. : Невский диалект, 2004. — 816 с.
13. *Балашова С.Д.* Приближенные методы решения операторных уравнений. — Днепропетровск : ДГУ, 1980. — 112 с.
14. *Киселева, Е.М., Гарт Л.Л., Довгай П.А.* О численном моделировании производной детерминированного временного ряда // Питання прикладної математики і математичного моделювання. — Днепропетровск : Ліра, 2015. — С. 61–74.
15. *Гарт Л.Л.* Явный проекционно-итерационный метод решения некорректных операторных уравнений // Там же. — Днепропетровск : Ліра, 2015. — С. 33–47.
16. *Чеб Е.С.* Функциональный анализ и интегральные уравнения. — Минск : Изд-во Белорус. гос. ун-та, 2007. — 140 с.
17. *Гарт Л.Л., Поляков Н.В.* Проекционно-итерационная реализация метода Ньютона–Канторовича для решения нелинейных интегральных уравнений // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2012. — № 1. — С. 70–78.

Получено 01.08.2015