

УДК 62-50

Н.А. Вундер, А.В. Ушаков

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОСТИ
ПРОЦЕССОВ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ,
ПОРОЖДАЕМЫХ ФАКТОРОМ
КРАТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ
ИХ МАТРИЦ СОСТОЯНИЯ

Введение

Исследуются устойчивые непрерывные системы, матрица состояния которых имеет спектры кратных собственных чисел. Задача решается при кратности собственных чисел, равной размерности вектора состояния, причем сначала рассматривается случай вещественных собственных чисел, а затем — случай комплексно-сопряженных. Показано, что если модуль вещественного собственного числа меньше единицы, то в траекториях свободного движения системы по норме ее вектора состояния наблюдается выброс, сменяющийся монотонной сходимостью траектории к нулю. Установлено, что величина выброса тем больше, чем меньше модуль вещественного собственного числа и больше его кратность. Если матрица состояния непрерывной системы обладает спектром комплексно-сопряженных собственных чисел, то при значении вещественной части комплексно-сопряженного собственного числа, меньшего единицы, как и в случае вещественного спектра собственных чисел, наблюдаются выбросы траекторий, величина которых тем больше, чем меньше его модуль и больше его кратность. Особое внимание уделяется ситуации, когда модуль вещественной части собственного числа больше единицы, а само собственное число характеризуется «слабой демпфированностью». Слабая демпфированность проявляется выбросами в траекториях свободного движения по норме вектора состояния уже системы второго порядка. Обнаружилось, что в случае кратных комплексно-сопряженных собственных чисел этот эффект многократно усиливается.

Постановка задачи

Ставится задача исследования свободного движения устойчивой линейной непрерывной многомерной динамической системы по норме ее вектора состояния в целях изучения влияния на поведение системы кратности собственных чисел ее матрицы состояния и значения их модуля в случае вещественного спектра собственных чисел, а в случае комплексно-сопряженного спектра собственных чисел — их «демпфированности». Предполагается, что кратность собственного числа равна размерности вектора состояния в случае вещественного спектра собственных чисел и половине размерности в случае комплексно-сопряженного спектра. Первоначально задача решается применительно к представлению матрицы состояния в канонической жордановой форме [1], затем исследования переносятся на произвольный случай.

© Н.А. ВУНДЕР, А.В. УШАКОВ, 2015

*Международный научно-технический журнал
«Проблемы управления и информатики», 2015, № 6*

**Аналитическое исследование свободного движения непрерывной
многомерной аperiodической системы для случая кратных
вещественных собственных значений ее матрицы состояния**

Рассмотрим линейную гурвицеву непрерывную многомерную динамическую систему, задаваемую [1–3] в векторно-матричной форме

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(t)|_{t=0} = x(0), \quad (1)$$

где $x(0), x(t)$ — векторы соответственно начального и текущего состояний системы; F — ее матрица состояния; $x(0), x(t) \in R^n$; $F \in R^{n \times n}$. Матрица системы F , заданная в произвольном базисе, такова, что ее характеристический полином $D(\lambda)$ имеет представление

$$D(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \left\{ (\lambda - \alpha)^n = \lambda^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i C_n^i \alpha^i \lambda^{n-i}; \quad \alpha: Jm(\alpha) = 0 \right\}. \quad (2)$$

Такая ситуация может возникнуть, когда при синтезе методами модального управления [3] матрица состояния F системы задается во фробениусовой форме, сопровождающей характеристический полином $D(\lambda)$, в котором C_n^i — число сочетаний из n по i . Дополним условие (2) наличия в алгебраическом спектре собственных чисел $\sigma\{F\} = \{\lambda_i = \arg[\det(\lambda I - F) = 0]: \lambda_i = \alpha; \quad i = \overline{1, n}\}$ матрицы F единственного вещественного элемента кратности $\mu = n = \dim(x)$ условием, накладываемым на дефект характеристической матрицы $(\lambda I - F)$ [1] матрицы F , который должен принимать единичное значение.

Тогда каноническая форма матрицы [1], построенная на спектре $\sigma\{F\}$ собственных чисел матрицы F , будет представлять собой $(n \times n)$ -клетку Жордана $J(\alpha)$, имеющую представление

$$J(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Заметим, что матрица в форме Жордана $J(\alpha)$ порождает автономную динамическую систему вида (1), задаваемую в жордановом каноническом базисе

$$\dot{\tilde{x}}(t) = J(\alpha)\tilde{x}(t), \quad \tilde{x}(t)|_{t=0} = \tilde{x}(0). \quad (4)$$

Структурное представление системы (4) приведено на рис. 1.

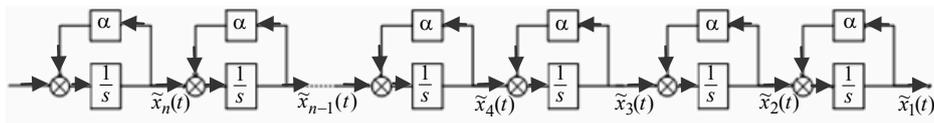


Рис. 1

В системе вида (4) вектор \tilde{x} и матрица $J(\alpha)$ состояния связаны с вектором x и соответственно с матрицей F состояния исходной системы (1) векторно-матричными соотношениями

$$x = S \tilde{x}, \quad SJ(\alpha) = FS. \quad (5)$$

В (5) S — $(n \times n)$ -матрица неособого преобразования подобия, допускающая представление матрицы F в форме

$$F = SJ(\alpha)S^{-1}. \quad (6)$$

В свою очередь жорданова матрица $J(\alpha)$ в силу (3) может быть представлена в аддитивно декомпозированном виде

$$J(\alpha) = \text{diag}\{\lambda_i = \alpha; i = \overline{1, n}\} + J(0) = \alpha I + J(0), \quad (7)$$

где $J(0)$ — нильпотентная матрица [1] индекса $\nu = n$.

Теперь поставим задачу исследования свободного движения системы (4) по вектору ее состояния в скаляризованной форме. Решение системы (4) $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t, \tilde{x}(0))$ имеет [1–3] вид

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t, \tilde{x}(0)) = \exp\{J(\alpha)t\} \tilde{x}(0). \quad (8)$$

Скаляризацию векторного процесса (8) осуществим на основе использования согласованных [1] векторных и матричных норм, в результате на основе (7) получим цепочку соотношений

$$\|\tilde{x}(t)\| = \|\exp\{J(\alpha)t\} \tilde{x}(0)\| \leq \|\exp\{J(\alpha)t\}\| \cdot \|\tilde{x}(0)\| = e^{\alpha t} \|\exp\{J(0)t\}\| \cdot \|\tilde{x}(0)\|. \quad (9)$$

В (9) компонент $\exp\{J(0)t\}$ мультипликативной цепи элементов имеет [1–3] при $\mu = n$ представление

$$\exp\{J(0)t\} = \exp\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} t \right\} = \begin{bmatrix} 1 & t & (2)^{-1}t^2 & \dots & [(\mu-1)!]^{-1}t^{\mu-1} \\ 0 & 1 & t & \dots & [(\mu-2)!]^{-1}t^{\mu-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Из (10) видно, что столбцовая норма $\|\exp\{J(0)t\}\|_1$, определяемая последним столбцом матричной экспоненты $\exp\{J(0)t\}$, ее строчная норма $\|\exp\{J(0)t\}\|_\infty$, определяемая первой строкой экспоненты, и оценка спектральной нормы $\|\exp\{J(0)t\}\|_2$, задаваемая [4] мажорирующим неравенством $\|\exp\{J(0)t\}\|_2 \leq \{\|\exp\{J(0)t\}\|_1 \cdot \|\exp\{J(0)t\}\|_\infty\}^{1/2}$, совпадают и определяются выражением

$$\|\exp\{J(0)t\}\|_p = 1 + t + (1/2)t^2 + \dots + (1/(\mu-1)!)t^{\mu-1} = \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/k!)t^k, \quad (p = 1, 2, \infty).$$

Таким образом, норма матричной экспоненты $\|\exp\{J(\alpha)t\}\|$ удовлетворяет соотношению

$$\|\exp\{J(\alpha)t\}\| = e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!))t^k. \quad (11)$$

В целях дальнейших исследований выделим такое $\tilde{x}(0) = \arg\{\|\tilde{x}(0)\| = 1\}$, для которого выполняется точное равенство

$$\|\tilde{x}(t)\| = \|\exp\{J(\alpha)t\}\| \cdot \|\tilde{x}(0)\|_{\|\tilde{x}(0)\|=1} = e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!))t^k. \quad (12)$$

Теперь при фиксированной кратности $\mu = n$ собственного числа $\lambda = \alpha$ поставим задачу оценки знака скорости изменения нормы $\|\tilde{x}(t)\|$ в момент $t = 0$

как синдрома характера развития процессов в системе в функции от областей значений $\lambda = \alpha$. Дифференцированием по времени выражения (12) получим

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{x}(t)\| = \frac{d}{dt} \left\{ e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!)) t^k \right\} \Big|_{t=0} = \left\{ \alpha e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!)) t^k + e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-2} (1/(k!)) t^k \right\} \Big|_{t=0} = \alpha + 1. \quad (13)$$

Соотношение (13) позволяет сепарировать процессы по их качеству в системе (4) с матрицей состояния в виде жордановой клетки полной размерности по норме вектора состояния в функции от значения кратного собственного числа $\lambda = \alpha$. Ясно, что при любом отрицательном значении $\lambda = \alpha$ и при любой его кратности процессы в системе (4) являются сходящимися, потому что мультипликативный член $e^{\alpha t}$ в выражении (12) для $\|\tilde{x}(t)\|$ имеет бесконечное число элементов разложения по степеням t в то время, как член $\sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!)) t^k$ — конечное. Следова-

тельно, всегда найдется такой момент времени $t = t^*$, с которого начинает проявляться доминирование экспоненциального сомножителя $e^{\alpha t}$. Рассмотрим следующие ситуации.

Ситуация 1: $\alpha < 0, |\alpha| > 1, \left\{ \frac{d}{dt} \|\tilde{x}(t)\| \right\} \Big|_{t=0} < 0$, процесс $\|\tilde{x}(t)\|$ сходится к нулю и мажорируется экспонентой в форме $\|\tilde{x}(t)\| \leq e^{(\alpha+1)t} \|\tilde{x}(0)\|$.

Ситуация 2: $\alpha = -1, \left\{ \frac{d}{dt} \|\tilde{x}(t)\| \right\} \Big|_{t=0} = 0$, начальная скорость нулевая, но при $t > 0$ в силу (13) устанавливается отрицательная скорость, определяемая выражением $\frac{d}{dt} \|\tilde{x}(t)\| = \left\{ \alpha e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!)) t^k + e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-2} (1/(k!)) t^k \right\} \Big|_{\alpha=-1} = -(1/(\mu-1)!) e^{-t} t^{(\mu-1)}$. (14)

Скорость изменения нормы $\|\tilde{x}(t)\|$ на траекториях системы характеризуется экстремумом, наблюдаемым в момент t_m , определяемым в силу (14) соотношениями

$$t_m = \arg \left\{ \frac{d^2}{dt^2} \|\tilde{x}(t)\| = 0 \right\} = \arg \left\{ \frac{d}{dt} (e^{-t} t^{(\mu-1)}) = 0 \right\} = \mu - 1,$$

при этом скорость изменения нормы $\|\tilde{x}(t)\|$, будучи отрицательной, составляет величину $\max_t \left(\frac{d}{dt} \|\tilde{x}(t)\| \right) = -\frac{(\mu-1)^{(\mu-1)}}{(\mu-1)!} e^{-(\mu-1)}$.

Процесс $\|\tilde{x}(t)\|$ сходится к нулю в силу представления (12). Процесс мажорируется экспоненциальной функцией так, что выполняется неравенство $\|\tilde{x}(t)\| \leq \rho e^{\gamma t} \|\tilde{x}(0)\|$, в котором параметры (ρ, γ) определяются из условия

$$(\rho, \gamma) = \arg \left\{ \min_{\rho, \gamma} \left| \|\tilde{x}(t)\| - \rho e^{\gamma t} \|\tilde{x}(0)\| \right| \& \left. \left. \frac{d}{dt} (\rho e^{\gamma t} \|\tilde{x}(0)\|) \right| \right|_{t=(\mu-1)} = -\frac{(\mu-1)^{(\mu-1)}}{(\mu-1)!} e^{-(\mu-1)} \& \rho \geq 1 \right\}.$$

Ситуация 3 (предмет статьи): $\alpha < 0, |\alpha| < 1, \left\{ \frac{d}{dt} \|\tilde{x}(t)\| \right\}_{t=0} > 0$. Процесс

$\|\tilde{x}(t)\|$ на начальном отрезке времени расходится, достигая максимума в момент t_M , определяемый соотношениями

$$t_M = \arg \left\{ \frac{d}{dt} \|\tilde{x}(t)\| = 0 \right\} = \arg \left\{ (1+\alpha) \sum_{k=0}^{\mu-2} (1/k!) t^k + \alpha(1/(\mu-1)!) t^{(\mu-1)} = 0 \right\}, \quad (15)$$

а далее сходится к нулю. Таким образом, процесс $\|\tilde{x}(t)\|$ на траекториях свободного движения аperiodической системы обнаруживает выброс, численно определяемый величиной $\alpha: (\alpha < 0, |\alpha| < 1)$ кратного собственного числа и значением μ его кратности. Очевидно свойство процесса $\|\tilde{x}(t)\|$: чем меньше величина $|\alpha| < 1$ и чем больше его кратность μ , тем больше величина его выброса над уровнем $\|\tilde{x}(0)\|$. Для иллюстрации этого результата вычислим момент t_M с помощью (15) и выброса в кривой $\|\tilde{x}(t)\|$ аperiodической системы для момента $t = t_M$ в силу соотношения (12) для различных значений $\alpha: (\alpha < 0, |\alpha| < 1)$ и кратностей μ . Результаты вычислений приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

μ	2	3	4	5	10
α	t_M				
-0,2	4	8,9	13,9	18,8	43,8
-0,02	49	99	149	199	449

Таблица 2

μ	2	3	4	5	10
α	$\max_t (\ \tilde{x}(t)\) = \ \tilde{x}(t_M)\ $				
-0,2	2,25	8,35	34,7	151,6	$3,32 \cdot 10^5$
-0,02	18,8	690,4	$2,86 \cdot 10^4$	$1,25 \cdot 10^6$	$2,72 \cdot 10^{14}$

Вернемся к исходной системе (1) с матрицей состояния F , заданной в произвольном базисе, тогда по аналогии с (8) с использованием (6) можно записать

$$x(t) = x(t, x(0)) = \exp\{Ft\}x(0) = S \exp\{J(\alpha)t\}S^{-1}x(0). \quad (16)$$

Если в (16) перейти к скаляризованным векторным процессам по норме вектора состояния системы (1), то с помощью (11) получим цепочку соотношений

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &= \|S \exp\{J(\alpha)t\}S^{-1}x(0)\| \leq \|S\| \cdot \|\exp\{J(\alpha)t\}\| \cdot \|S^{-1}\| \cdot \|x(0)\| = \\ &= c\{S\} e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!)) t^k \|x(0)\|, \end{aligned}$$

где $c\{S\} = \|S\| \|S^{-1}\|$ — число обусловленности матрицы S , удовлетворяющее [4] условию $1 \leq c\{S\} < \infty$. Значения $\|x(t)\|$ будут в $c\{S\}$ раз превышать значения $\|\tilde{x}(t)\|$, сохраняя ту же зависимость от модуля $|\alpha|$ собственного числа $\lambda = \alpha$ и его кратности μ .

**Компьютерное исследование свободного движения непрерывной
многомерной аperiodической системы для случая кратных вещественных
собственных чисел ее матрицы состояния**

Компьютерное исследование процессов по норме $\|\tilde{x}(t)\|$ как функции собственного числа $\lambda = \alpha$ и его кратности $\mu = n$ проводилось в соответствии с соотношением $\|\tilde{x}(t)\| = \|\exp\{J(\alpha)t\}\tilde{x}(0)\| \leq \|\exp\{J(\alpha)t\}\| \cdot \|\tilde{x}(0)\|$ по его мажорирующей части в модельной среде пакета Matlab. Результаты моделирования процессов в форме $\|\tilde{x}(t)\|$ для единого набора кратностей $\mu = n = 2; 3; 5$ и 10 и значений $\lambda = \alpha = -2; -0,2$ и $-0,02$ представлены на рисунках.

На рис. 2 приведены кривые для случая $\lambda = \alpha = -2$. Процессы $\|\tilde{x}(t)\|$ сходятся монотонно без выбросов (см. ситуацию 1). Кривая 1 соответствует случаю $\mu = n = 2$, кривая 2 — $\mu = n = 3$, кривая 3 — $\mu = n = 5$, кривая 4 — $\mu = n = 10$.

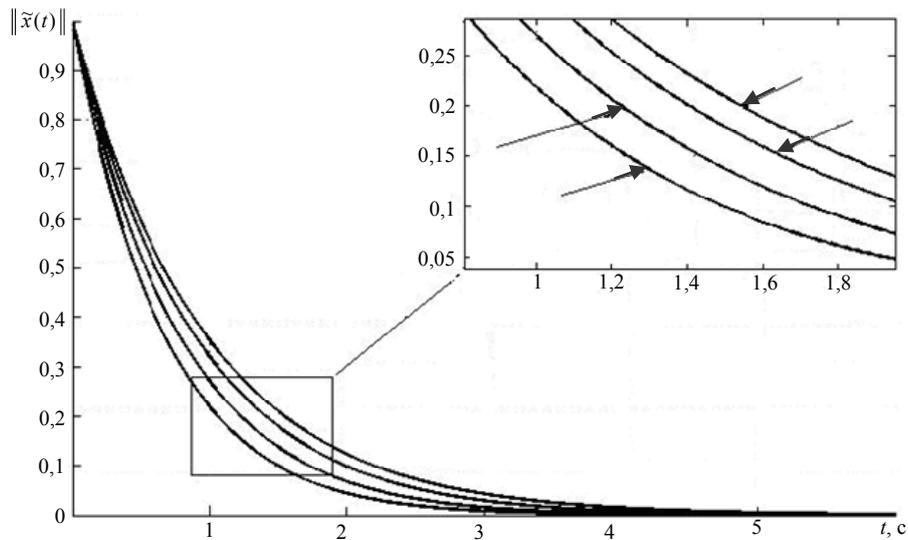


Рис. 2

На рис. 3 показаны четыре кривые для случая $\lambda = \alpha = -0,2$: рис. 3, а — $\mu = n = 2$; рис. 3, б — $\mu = n = 3$; рис. 3, в — $\mu = n = 5$; рис. 3, г — $\mu = n = 10$. Процессы $\|\tilde{x}(t)\|$ обнаруживают выбросы, нарастающие с увеличением $\mu = n$ (см. ситуацию 3).

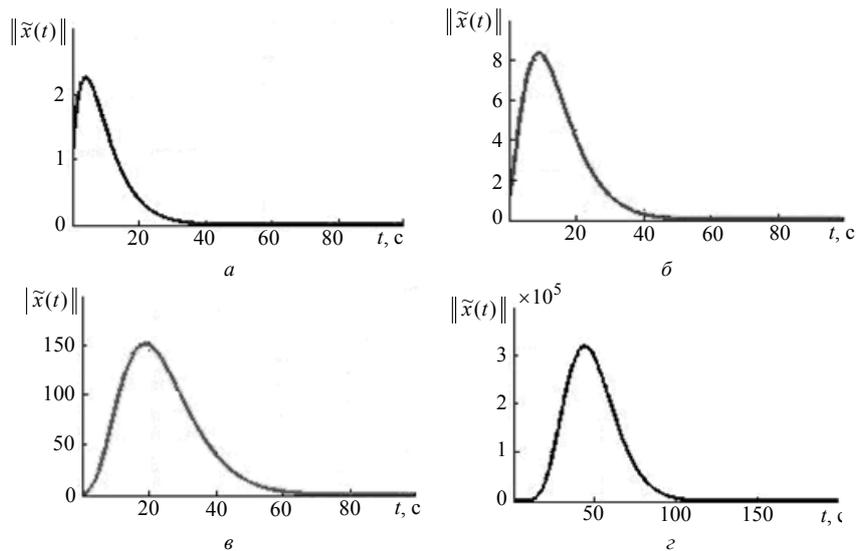


Рис. 3

На рис. 4 приведены четыре кривые для случая $\lambda = \alpha = -0,02$: рис. 3, а — $\mu = n = 2$; рис. 3, б — $\mu = n = 3$; рис. 3, в — $\mu = n = 5$; рис. 3, г — $\mu = n = 10$. Процессы $\|\tilde{x}(t)\|$ имеют заметные выбросы, нарастающие с увеличением $\mu = n$ (см. ситуацию 3).

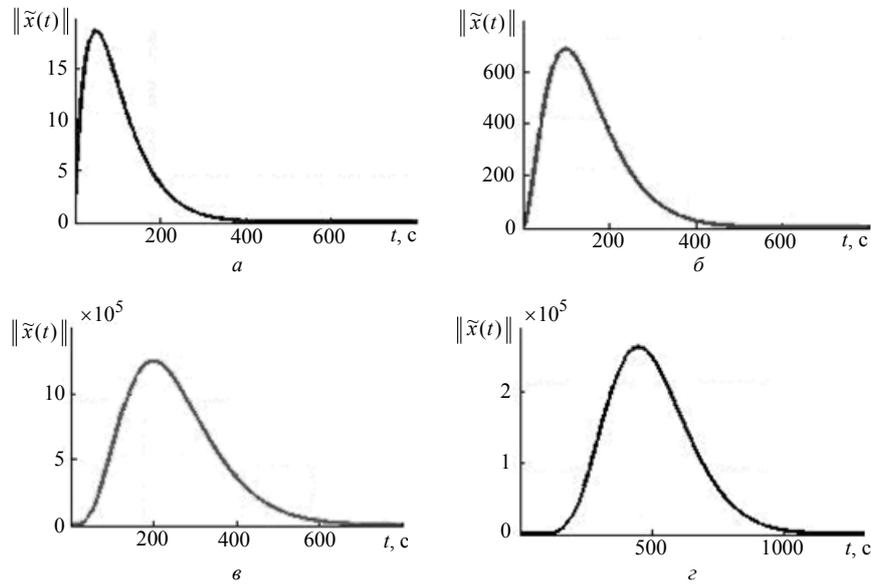


Рис. 4

На рис. 5 приведены кривые постоянных значений $\max_t(\|\tilde{x}(t)\|) = \|x(t_M)\| = \text{const}$ (в %) на плоскости « $\mu - \lambda$ », иллюстрирующих возможность «обмена» кратности на значение кратного собственного числа в решаемой задаче.

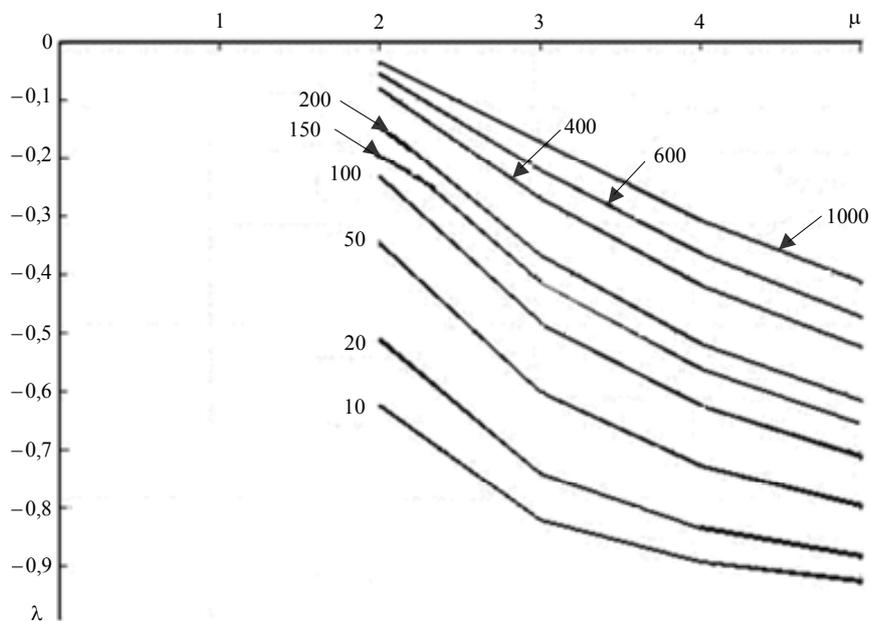


Рис. 5

На рис. 6 изображены кривые при $\lambda = \alpha = -0,2$ для случая системы (1), в которой матрица F задана в сопровождающей строчной форме, и системы (4). Процессы $\|x(t)\|$ (кривая 1) имеют характер кривых $\|\tilde{x}(t)\|$ (кривая 2), но в каждый момент в $c\{S\}$ раз превышают их.

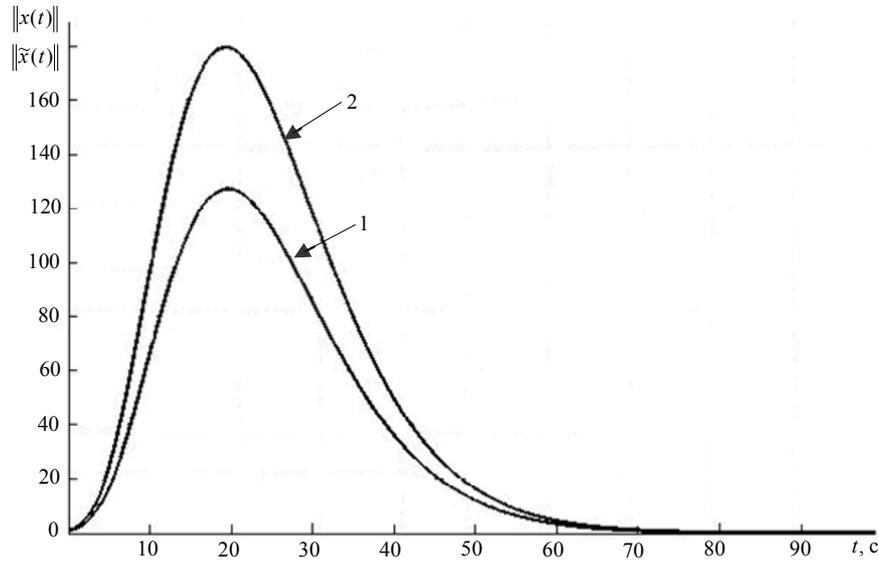


Рис. 6

Завершая рассмотрение влияния фактора кратности собственных чисел на качество процессов в аperiodических системах, следует отметить, что если спектр собственных чисел матрицы F имеет несколько кратных чисел $\sigma\{F\} = \left\{ \lambda_i = \alpha_j : i = \overline{1, \mu_j}; j = \overline{1, q}; \sum_{j=1}^q \mu_j = n \right\}$, то каноническое представление F в жордановой форме будет содержать q жордановых клеток размерности $(\mu_j \times \mu_j)$ каждая. Тогда для такого случая соотношение (9) принимает вид

$$\|\tilde{x}(t)\| = \|\text{diag}\{\exp\{J(\alpha_j)t\}; j = \overline{1, q}\} \tilde{x}(0)\| \leq e^{\bar{\alpha}t} \|\exp\{J(\bar{\mu} \times \bar{\mu})(0)t\}\| \cdot \|\tilde{x}(0)\|, \quad (17)$$

где $\bar{\alpha} = \max_j \{\alpha_j : \alpha_j < 0 \& |\alpha_j| < 1; j = \overline{1, q}\}$; $\bar{\mu} = \max_j \{\mu_j; j = \overline{1, q}\}$.

Конструирование канонического «квазижорданова» представления матрицы состояния непрерывной системы с кратными комплексно-сопряженными собственными числами

Рассмотрим линейную гурвицеву непрерывную многомерную динамическую систему вида (1), где матрица системы F , заданная в произвольном базисе, такова, что ее алгебраический спектр $\sigma\{F\}$ собственных чисел удовлетворяет условию

$$\sigma\{F\} = \{\lambda_{2i-1;2i} = \arg[\det(\lambda I - F) = 0] : \lambda_{2i-1;2i} = \alpha \pm j\beta; i = \overline{1, n/2}\}. \quad (18)$$

Из (18) следует, что матрица F имеет единственную пару комплексно-сопряженных собственных чисел кратности $\mu = n/2$, где $n = \dim(x)$. Дополним (18) условием, накладываемым на геометрический спектр собственных

подпространств в виде значения дефекта характеристической матрицы [2] матрицы F , записываемым в форме $\text{def}(\lambda I - F) = 2$. Тогда каноническая форма матрицы, построенная на спектре $\sigma\{F\}$ собственных чисел матрицы F , будет представлять собой $(n \times n)$ -«квазиторданову» клетку $\tilde{J}(\alpha, \beta)$. При конструировании «квазитордановой» клетки $\tilde{J}(\alpha, \beta)$ потребуем выполнения условия

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \{\tilde{J}(\alpha, \beta)\} = J(\alpha). \quad (19)$$

Нетрудно видеть, что условиям (18) и (19) будет удовлетворять система

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{J}(\alpha, \beta)\tilde{x}(t), \quad \tilde{x}(t)|_{t=0} = \tilde{x}(0), \quad (20)$$

структурное представление которой получается из структурной схемы рис. 1, в которой пары интеграторов, примыкающих один к другому, охвачены обратной связью с коэффициентом передачи « $-\beta^2$ » так, что получается схема, приведенная на рис. 7.

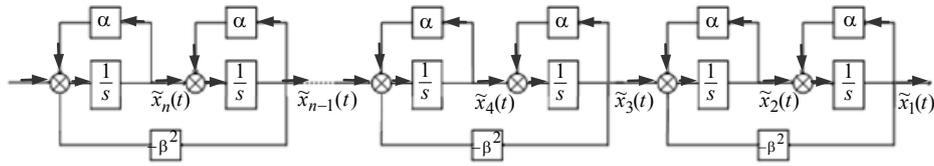


Рис. 7

Если учесть, что на непосредственном входе i -го интегратора наблюдается переменная $\dot{\tilde{x}}_i(t)$, то структурная реализация (рис. 7) системы (20) может быть «списана» матрица $\tilde{J}(\alpha, \beta)$, которая получает представление

$$\tilde{J}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\beta^2 & \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta^2 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta^2 & \alpha \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Нетрудно видеть, что «квазиторданова» матрица $\tilde{J}(\alpha, \beta)$ вида (21) допускает аддитивную декомпозицию в виде

$$\tilde{J}(\alpha, \beta) = \text{diag}\{\lambda_i = \alpha; i = \overline{1, n}\} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\beta^2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta^2 & 0 \end{bmatrix} = \alpha I + \tilde{J}(0, \beta). \quad (22)$$

**Исследование свободного движения непрерывной многомерной системы
для случая кратных комплексно-сопряженных собственных чисел
ее матрицы состояния**

Поставим задачу исследования свободного движения системы (20) по вектору ее состояния в скаляризованной форме. Решение системы (20) $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t, \tilde{x}(0))$ с использованием представления (22) приобретает [1–3] вид

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t, \tilde{x}(0)) = \exp\{\tilde{J}(\alpha, \beta)t\}\tilde{x}(0) = e^{\alpha t} \exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}\tilde{x}(0). \quad (23)$$

Скаляризацию векторного процесса (23) осуществим на основе использования согласованных [1] векторных и матричных норм, в результате получим цепочку соотношений

$$\|\tilde{x}(t)\| = \|e^{\alpha t} \exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}\tilde{x}(0)\| = e^{\alpha t} \|\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}\tilde{x}(0)\| \leq e^{\alpha t} \|\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}\| \|\tilde{x}(0)\|. \quad (24)$$

Заметим, что в отличие от случая вещественных кратных собственных значений, для которого матричная экспонента $\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}\big|_{\beta=0} = \exp\{\tilde{J}(0)t\}$ имеет прозрачную алгоритмическую основу для формирования ее представления, матричная экспонента $\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}$ таким свойством не обладает. Поэтому в дальнейшем матричную экспоненту $\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}$ вычислим для достаточно репрезентативной системной ситуации, характеризующейся $n = 6$. $\mu = n/2 = 3$. В итоге получим цепочку равенств на основе вычисления обратного преобразования Лапласа от резольвенты

$$\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\} = L^{-1}\{(sI - \tilde{J}(0, \beta))^{-1}\} =$$

$$= \text{row} \left\{ \begin{array}{l} [\cos \beta t, -\beta \sin \beta t, 0, 0, 0, 0]^T, [\beta^{-1} \sin \beta t, \cos \beta t, 0, 0, 0, 0]^T, \\ [(2\beta)^{-1} t \sin \beta t, (2\beta)^{-1} (\sin \beta t + \beta t \cos \beta t), \cos \beta t, -\beta \sin \beta t, 0, 0]^T, \\ [(2\beta^3)^{-1} (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t), (2\beta)^{-1} t \sin \beta t, \beta^{-1} \sin \beta t, \cos \beta t, 0, 0]^T, \\ [(8\beta^3)^{-1} t (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t), (8\beta^3)^{-1} ((1 + (\beta t)^2) \sin \beta t - \beta t \cos \beta t), \\ (2\beta)^{-1} t \sin \beta t, (2\beta)^{-1} (\sin \beta t + \beta t \cos \beta t), \cos \beta t, -\beta \sin \beta t]^T, \\ [(8\beta^5)^{-1} ((3 - (\beta t)^2) \sin \beta t - 3\beta t \cos \beta t), (8\beta^3)^{-1} t (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t), \\ (2\beta^3)^{-1} (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t), (2\beta)^{-1} t \sin \beta t, \beta^{-1} \sin \beta t, \cos \beta t]^T \end{array} \right\}. \quad (25)$$

Из (25) видно, что столбцовая норма $\|\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}\|_1$, определяемая последним столбцом матричной экспоненты $\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}$, ее строчная норма $\|\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}\|_\infty$, определяемая первой строкой экспоненты, и оценка спектральной нормы $\|\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}\|_2$, задаваемая [4] мажорирующим неравенством $\|\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}\|_2 \leq \{\|\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}\|_1 \cdot \|\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}\|_\infty\}^{1/2}$, совпадают и вычисляются как норма вектора

$$v(\alpha, \beta, t) = \left[\begin{array}{l} \frac{(3 - (\beta t)^2) \sin \beta t - 3\beta t \cos \beta t}{8\beta^5}, \frac{t (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t)}{8\beta^3}, \\ \frac{\sin \beta t - \beta t \cos \beta t}{2\beta^3}, \frac{t \sin \beta t}{2\beta}, \frac{\sin \beta t}{\beta}, \cos \beta t \end{array} \right]^T. \quad (26)$$

Следует заметить, что требование (19) к «квазижордановой» форме $\tilde{J}(\alpha, \beta)$ канонического вещественнозначного представления матрицы состояния с кратными комплексно-сопряженными собственными числами выполняется и для нормы матричной экспоненты в форме нормы вектора (26). Действительно, при $\beta \rightarrow 0$ с использованием «замечательного предела» $\lim_{\beta \rightarrow 0} (\sin \beta / \beta) = 1$ и правила Лопиталя [5] доказываются следующие предельные сходимости:

$$\begin{aligned}
 & 1) \lim_{\beta \rightarrow 0} (\cos(\beta t)) = 1; \quad 2) \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\beta} \sin(\beta t) \right) = t \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\beta t)}{\beta t} \right) = t; \\
 & 3) \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\beta} t \sin(\beta t) \right) = \frac{t^2}{2} \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\beta t)}{\beta t} \right) = \frac{t^2}{2}; \quad 4) \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\beta^3} (\sin(\beta t) - \beta t \cos(\beta t)) \right) = \\
 & = \frac{1}{2} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{t \cos(\beta t) - t \cos(\beta t) + \beta t^2 \sin(\beta t)}{3\beta^2} = \frac{t^3}{6} \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\beta t)}{\beta t} \right) = \frac{t^3}{3!}; \\
 & 5) \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{t}{8\beta^3} (\sin(\beta t) - \beta t \cos(\beta t)) \right) = \frac{t}{8} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{t \cos(\beta t) - t \cos(\beta t) + \beta t^2 \sin(\beta t)}{3\beta^2} = \\
 & = \frac{t^4}{24} \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\beta t)}{\beta t} \right) = \frac{t^4}{4!}; \quad 6) \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{t}{8\beta^5} ((3 - \beta^2 t^2) \sin(\beta t) - 3\beta t \cos(\beta t)) \right) = \\
 & = \frac{t^2}{40} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\beta \sin(\beta t) - \beta^2 t \cos(\beta t)}{\beta^4} = \frac{t^2}{160} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\sin(\beta t) - \beta t \cos(\beta t) + \beta^2 t^2 \sin(\beta t)}{\beta^3} = \\
 & = \frac{t^4}{480} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{3 \sin(\beta t) + \beta t \cos(\beta t)}{\beta} = \frac{t^5}{5!}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, оказываются справедливыми предельные переходы:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\beta \rightarrow 0} \|\exp(\tilde{J}(0, \beta))t\|_p = \|\exp(J(0)t)\|_p, \\
 & \lim_{\beta \rightarrow 0} \|\exp(\tilde{J}(\alpha, \beta))t\|_p = \|\exp(J(\alpha)t)\|_p.
 \end{aligned}$$

В разд. 2 показано, что для случая вещественных кратных собственных чисел матрицы $J(\alpha)$ гурвицевой системы такой, что $\lambda = \alpha = \arg\{\alpha < 0 \vee |\alpha| < 1\}$ кратности μ , в сходящихся траекториях свободного движения по норме вектора состояния обнаруживаются выбросы, величина которых тем больше, чем больше кратность μ и меньше модуль $|\alpha| < 1$. Ниже ставятся и решаются две задачи. Первая состоит в оценке влияния значения β мнимой части собственного кратного комплексного числа $\lambda = \alpha \pm j\beta$ при сохранении условия $\alpha = \arg\{\alpha < 0 \vee |\alpha| < 1\}$ на величину выбросов в траекториях системы (20) по норме вектора $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t, \tilde{x}(0))$. Вторая — в оценке возможности появления выбросов в траекториях системы (20) по норме вектора $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t, \tilde{x}(0))$ при условии $\alpha = \arg\{\alpha < 0 \vee |\alpha| \geq 1\}$ и влияния значения β мнимой части собственного кратного комплексного числа $\lambda = \alpha \pm j\beta$ на величину этих выбросов.

Результаты решения первой задачи в форме $\|\tilde{x}(t, \tilde{x}(0))\|_{\|\tilde{x}(0)\|=1}$, вычисленной в силу соотношения (24), на примере системной ситуации, характеризующейся $n = 6$, $\mu = n/2 = 3$, $\lambda = \alpha \pm j\beta$: $\alpha = -0.2$ и β — var, сведены в табл. 3.

Таблица 3

		$\lambda = \alpha \pm j\beta; n = 6; \mu = 3$						
α		$\alpha = -0,2$						
β		0,01	0,1	0,25	0,5	1	1,25	1,375
$\max_t \ \tilde{x}(t, \tilde{x}(0))\ _{\ \tilde{x}(0)\ =1}$		150	110	42	10,6	3,9	9,2	16,8
$t_M = \arg \max_t \ \tilde{x}(t, \tilde{x}(0))\ $		20	17	10,5	7	7,5	9,2	9,25
β		1,5	1,75	2	3	3,5	5	10
$\max_t \ \tilde{x}(t, \tilde{x}(0))\ _{\ \tilde{x}(0)\ =1}$		30	86	220	3700	11000	$13 \cdot 10^4$	$17 \cdot 10^6$
$t_M = \arg \max_t \ \tilde{x}(t, \tilde{x}(0))\ $		9,3	9,35	9,4	9,56	9,6	9,72	9,93

Вторую задачу, состоящую в оценке возможности появления выбросов в траекториях системы (4) по норме вектора $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t, \tilde{x}(0))$ при условии $\alpha = \arg\{\alpha < 0 \vee |\alpha| > 1\}$ и влияния значения β мнимой части на величину выбросов, начнем с графической иллюстрации известных [6] рекомендаций по секторному ограничению локализации комплексно-сопряженных собственных чисел матрицы состояния ячейки системы (20), представленной на рис. 2 в виде двух последовательно соединенных интеграторов, охваченной отрицательной обратной связью с коэффициентом « $-\beta^2$ », гарантирующей отсутствие перерегулирования в переходных процессах (рис. 8).

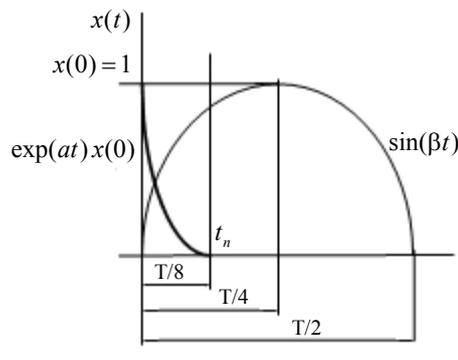


Рис. 8

Свяжем траектории, порождаемые вещественной частью α и мнимой части β соотношением $t_n = \gamma T/2 = \gamma \pi/\beta = 3/\alpha$. Отсюда получаем, что при $\beta \leq \gamma(\pi/3)\alpha$ будут отсутствовать перерегулирования, если γ составит величину, удовлетворяющую условию $\gamma < 0,25$, в противном случае перерегулирование, а следовательно и выброс в кривой процессов по норме вектора свободного движения, будет иметь место. Выделенная i -я ($i = \overline{1, n/2}$) двумерная ячейка задается

моделью $\tilde{x}_i(t) = [\tilde{x}_{2i-1}(t), \tilde{x}_{2i}(t)]^T = \text{col}\{[\alpha, 1], [-\beta^2, \alpha]\} [\tilde{x}_{2i-1}(t), \tilde{x}_{2i}(t)]^T$, $\tilde{x}_i(0) = [\tilde{x}_{2i-1}(0), \tilde{x}_{2i}(0)]^T$. Движение в ячейке описывается выражением $\tilde{x}_i(t) = \exp(\alpha t) \text{col}\{[\cos(\beta t), (1/\beta)\sin(\beta t)], [(-\beta)\sin(\beta t), \cos(\beta t)]\} \tilde{x}_i(0)$, для которого по норме $\|\tilde{x}_i(t)\|$ при $\|\tilde{x}_i(0)\|=1$ справедливо покрытие $\text{roof}\{\|\tilde{x}_i(t)\|\} = \exp(\alpha t) \times \|\text{col}\{[1, (1/\beta)], [(-\beta), 1]\}\|$.

Одновременно при $\beta > |\gamma(\pi/3)\alpha|$ справедливо непрерывное мажорирующее покрытие процессов, задаваемых нормой вектора (26), использующего, как и выше, замены $\cos(\beta t)$ на 1, $\sin(\beta t)$ на 1 так, что это покрытие может быть задано в виде

$$\text{нормы вектора } \mathfrak{f}(\alpha, \beta, t) = \left[\left(\frac{(3 - (\beta t)^2) - 3\beta t}{8\beta^5} \right), \left(\frac{t(1 - \beta t)}{8\beta^3} \right), \left(\frac{1 - \beta t}{2\beta^3} \right), \left(\frac{t}{2\beta} \right), \left(\frac{1}{\beta} \right), 1 \right]^T.$$

Исследование нормы вектора $\mathfrak{f}(\alpha, \beta, t)$ как функции времени обнаруживает доминирование в ее значении первого члена этого вектора. Это позволяет построить аналитическое представление покрытия (roof) процесса $\|\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}\|$ в форме евклидовой нормы вектора $\tilde{v}(\alpha, \beta, t) = [((3 - (\beta t)^2) - 3\beta t)/(8\beta^5), 0, 0, 0, 0, 0]$, которое принимает вид $\text{roof}\{\|\exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}\|\} = \{[(3 - (\beta t)^2) - 3\beta t]/(8\beta^5)\}^{1/2}$. В силу последнего выражения справедливо представление покрытия процесса $\|\exp\{\tilde{J}(\alpha, \beta)t\}\|$ в форме

$$\text{roof}\{\|\exp\{\tilde{J}(\alpha, \beta)t\}\|\} = e^{\alpha t} \{[(3 - (\beta t)^2) - 3\beta t]/(8\beta^5)\}^{1/2}. \quad (27)$$

Форма (27) не содержит разрывно дифференцируемых функций типа модульных в случае использования абсолютной векторной нормы, что позволяет применять ее для исследования на экстремумы нормы матричной экспоненты $\exp\{\tilde{J}(\alpha, \beta)t\} = e^{\alpha t} \exp\{\tilde{J}(0, \beta)t\}$. Действительно, вычисление $t_M = \arg \max_t \{\|\exp\{\tilde{J}(\alpha, \beta)t\}\|\}$ из условия $\frac{d}{dt} \{\text{roof}\{\|\exp\{\tilde{J}(\alpha, \beta)t\}\|\}\} = 0$ порождает алгебраическое уравнение для вычисления t_M :

$$t_M^4 + \frac{6\alpha + 2\beta}{\alpha\beta} t_M^3 + \frac{3\alpha + 9\beta}{\alpha\beta^2} t_M^2 + \frac{3\beta - 18\alpha}{\alpha\beta^3} t_M + \frac{9(\alpha - \beta)}{\alpha\beta^4} = 0. \quad (28)$$

Результаты вычислений t_M с помощью (28) приведены в табл. 4.

Таблица 4

	β				
α	2	3	5	10	20
-0,2	9,4	9,56	9,72	9,86	9,93
-2		0,913	0,88	0,9	0,938
-8				0,236	0,22
	t_M				

Компьютерное исследование свободного движения непрерывной системы при кратных комплексно-сопряженных числах ее матрицы состояния

Компьютерное исследование процессов по норме $\|\tilde{x}(t)\|$ как функции собственного кратного комплексно-сопряженного числа $\lambda = \alpha \pm j\beta$ проводилось на примере системы (20), характеризующейся размерностью $n = 6$ и кратностью $\lambda = \alpha \pm j\beta$, равной $\mu = n/2 = 3$, в модельной среде пакета Matlab в целях визуализации результатов, полученных в предыдущем разделе. Визуализировались результаты для трех системных ситуаций.

Первая системная ситуация состоит в оценке влияния значения β мнимой части собственного кратного комплексного числа $\lambda = \alpha \pm j\beta$, при сохранении условия $\alpha = \arg\{\alpha < 0 \vee |\alpha| < 1\}$, на величину выбросов в траекториях системы (20) по норме вектора $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t, \tilde{x}(0))$. Результаты визуализации этой ситуации для $\alpha = -0,2$ при $\beta = 0,01$ (рис. а), $\beta = 1$ (рис. б), $\beta = 2$ (рис. в), $\beta = 5$ (рис. г) при-

ведены на рис. 9. Кривые полностью соответствуют данным таблицы 3 и характеризуются резким ростом величины выбросов с ростом значения мнимой части β в области $\beta > 1$.

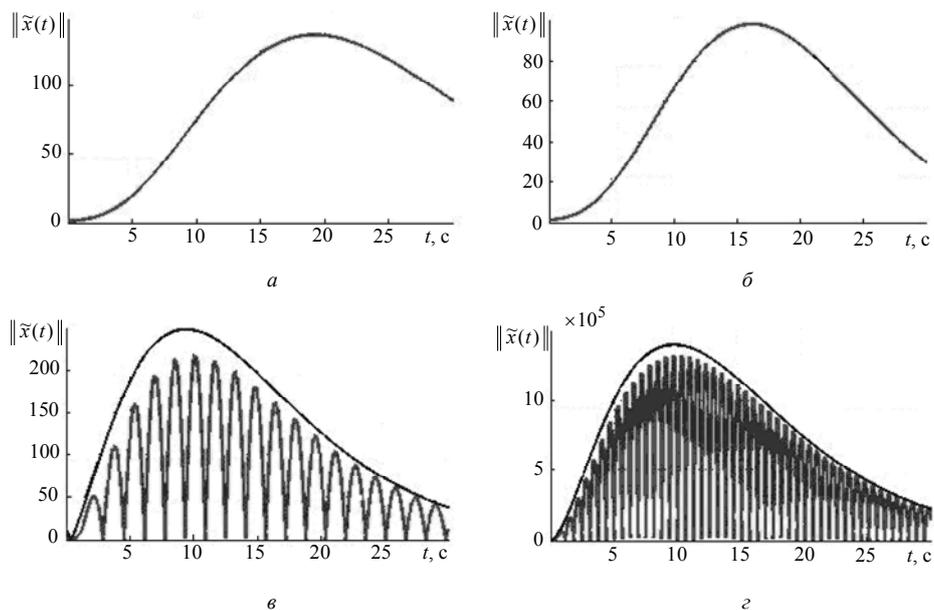


Рис. 9

Вторая системная ситуация состоит в оценке возможности появления выбросов в траекториях системы (20) по норме вектора $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t, \tilde{x}(0))$ при условии $\alpha = \arg\{\alpha < 0 \vee |\alpha| \geq 1\}$ и влияния значения β мнимой части собственного кратного комплексного числа $\lambda = \alpha \pm j\beta$ на величину и характер этих выбросов. Исследование этой системной ситуации авторы сочли целесообразным начать с рассмотрения тех же проблем для i -й ($i = \overline{1, n/2}$) двумерной ячейки с вектором состояния $\tilde{x}_i(t) = [\tilde{x}_{2i-1}(t), \tilde{x}_{2i}(t)]^T$. Результаты визуализации этой ситуации приведены на рис. 10 для $\alpha = -8$ при $\beta = 1$ (рис. а), $\beta = 5$ (рис. б), $\beta = 20$ (рис. в), $\beta = 50$ (рис. г).

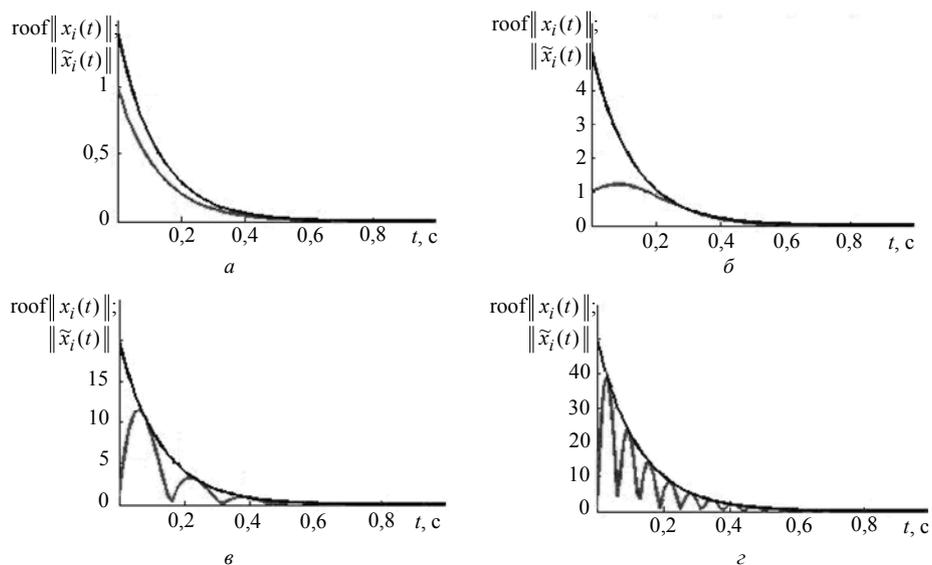


Рис. 10

Слабая демпфированность комплексно-сопряженных собственных чисел проявляется выбросами в траекториях свободного движения по норме вектора состояния двумерной ячейки. Следует ожидать, что в случае кратных комплексно-сопряженных собственных чисел этот эффект многократно усилится, несмотря на выполнение условия $\alpha = \arg\{\alpha < 0 \vee |\alpha| > 1\}$. Результаты визуализации этой ситуации для $\alpha = -8$ при $\beta = 1$ (рис. а), $\beta = 5$ (рис. б), $\beta = 20$ (рис. в), $\beta = 50$ (рис. г) показаны на рис. 11.

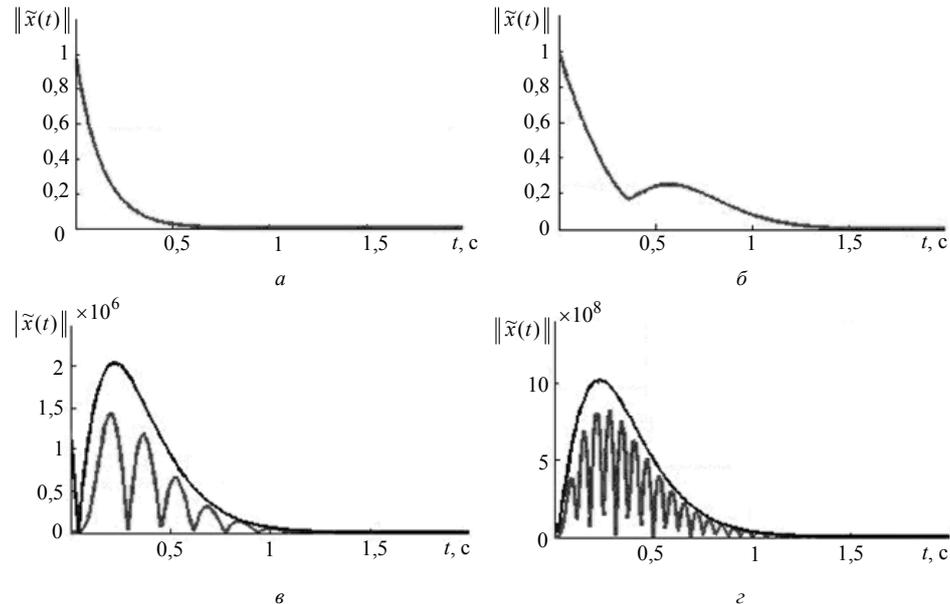


Рис. 11

Кривые при сходимости их к нулю с течением времени обнаруживают наличие заметных выбросов, величина которых растет по мере роста значения мнимой части β .

Заключение

Исследования показали, что кратность собственных чисел матриц состояния устойчивых непрерывных систем оказывается важным системным фактором, наделяющим динамические процессы в системе весьма специфическими свойствами, которые могут приводить к нежелательным последствиям вырождающего [7] и даже разрушительного характера.

Н.О. Вундер, А.В. Ушаков

ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ НЕПЕРЕРВНИХ СИСТЕМ, ПОРОДЖЕНИХ ФАКТОРОМ КРАТНОСТІ ВЛАСНИХ ЧИСЕЛ ЇХ МАТРИЦЬ СТАНУ

Досліджуються стійкі безперервні системи, матриця стану яких має спектри кратних власних чисел. Задача вирішується при кратності власних чисел, рівній розмірності вектора стану, причому спочатку розглядається випадок дійсних власних чисел, а потім — випадок комплексно-спряжених. Показано, якщо модуль дійсного власного числа менший за одиницю, то в траєкторіях вільного руху

системи за нормою її вектора стану спостерігається викид, що змінювався монотонно збіжністю траєкторії до нуля. Встановлено, що величина викиду тим більша, чим менший модуль дійсного власного числа і більша його кратність. Якщо матриця стану безперервної системи має спектр комплексно-спряжених власних чисел, то при значенні дійсної частини комплексно-спряженого власного числа, меншого за одиницю, як і у випадку дійсного спектра власних чисел, спостерігаються викиди траєкторій, величина яких тим більша, чим менший його модуль і більша його кратність.

N.A. Vunder, A.V. Ushakov

INVESTIGATION OF CONTINUOUS SYSTEMS OSCILLATORY PROCESSES CREATED WITH THE MULTIPLICITY FACTOR OF THE EIGENVALUES OF THE STATE MATRICES

The stable continuous systems with multiple eigenvalues of state matrices are considered. The multiplicity of the eigenvalues equals to dimension of state vector of the system. There is studied the motion of an autonomous system in the norm of state vector for the cases with multiple real and complex conjugate eigenvalues. It was shown that if the modulus of the real eigenvalue is less than one, then in the trajectories of the system free motion on the norm of the state vector there is observed a deflection, alternating monotone convergence of the trajectory to zero. It was found that the magnitude of deflection of the trajectories from monotone development increases with the approach of multiple eigenvalue to zero and increases in its multiplicity.

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1973. — 575 с.
2. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, — 1976. — 424 с.
3. Дударенко Н.А., Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы современной теории управления: аппарат метода пространства состояний / Под ред. А.В. Ушакова. — СПб: СПбГУ ИТМО, 2008. — 323 с.
4. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. — М.: Мир, 1999. — 548 с.
5. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю.В. Прохоров. — М.: Сов. энциклопедия, 1988. — 847 с.
6. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. — СПб: Профессия, 2003. — 752 с.
7. Дударенко Н.А., Ушаков А.В. Матричный формализм контроля вырождения сложных непрерывных динамических систем при конечномерных экзогенных воздействиях // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2011. — № 3. — С. 93–101.

*Получено 17.02.2015
После доработки 23.06.2015*