УДК 517.977

Ал.А. Чикрий

О НЕСТАЦИОНАРНОЙ ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ

Рассматривается аналитический метод решения нестационарных квазилинейных игровых задач с терминальной функцией платы на основе метода разрешающих функций. При этом используются идеи двойственности в выпуклом анализе, аппарат сопряженных функций и многозначных отображений. Даны достаточные условия завершения игры за некоторое гарантированное время, установлена связь с функцией обобщенного расстояния в качестве платы и основной схемой метода разрешающих функций. Статья примыкает к работам [1–12] и продолжает исследования [13].

Пусть движение объекта в конечномерном вещественном евклидовом пространстве R^n описывается системой квазилинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = A(t)z + \varphi(t, u, v), \quad z(t_0) = z_0, \quad t \ge t_0 \ge 0, \tag{1}$$

где $A(t)$ — матричная функция порядка n, элементы которой являются измеримыми по Лебегу функциями и суммируемы на любом конечном интервале $[t_0, T]$, $t_0 < T < +\infty$.

Параметры управления игроков u и v выбираются из областей управления $U(t)$ и $V(t)$, причем эти отображения компактнозначны и измеримы по t, $t \in [t_0, +\infty)$. Блок управления $\varphi(t, u, v)$, $\varphi : [t_0, +\infty) \times \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$, есть функция Каратеодори (измерима по t и непрерывна по совокупности (u, v)), причем

$$\left\| \varphi(t, u, v) \right\| \le a(t) \ \ \forall\, u \in U(t), v \in V(t), t \in [t_0, +\infty), \tag{2}$$

здесь $a(t)$ — суммируемая на любом конечном интервале функция.

Кроме того, задано терминальное множество $M^*(t)$ цилиндрического вида

$$M^*(t) = M_0 + M(t), \quad t \in [t_0, +\infty), \tag{3}$$

где M_0 — линейное подпространство из R^n, а $M(t)$ — измеримое компактнозначное отображение, образы которого принадлежат ортогональному дополнению L к M_0 в R^n.

Цель первого игрока (u) — вывести траекторию (1) на множество (3) за кратчайшее время, второй игрок (v) этому припятствует.

Приняв сторону первого игрока, будем считать, что в игре он использует квазистратегии [8], т.е. выбирает свое управление в виде

$$u(t) = u(t_0, z_0, t, v_t(\cdot)), \text{ где } v_t(\cdot) = \{v(s) : v(s) \in V(s), s \in [0, t]\}.$$

При этом допустимыми управлениями игроков являются измеримые функции со значениями из соответствующих областей управления.

Рассмотрим задачу сближения (1)–(3). При этом заметим, что конец игры наступает тогда, когда $z(t) \in M^*(t)$ или $\pi z(t) \in M(t)$, где π — ортопроектор, $\pi : \mathrm{R}^n \to L$.

Если допустить, что отображение $M(t)$, $t \ge t_0$, выпуклозначно, то предыдущие включения можно выразить через опорные функции в форме линейных неравенств

$$(p, z(t)) \le W_{M^*(t)}(p) = W_{M_0}(p) + W_{M(t)}(p) \ \ \forall p \in R^n$$

или

$$\sigma(t, z) = \sup_{p \in R^n} [(p, z) - W_{M^*(t)}(p)] \le 0. \tag{4}$$

Поскольку

$$W_{M_0}(p) = \begin{cases} +\infty, & p \,\overline{\in}\, L, \\ 0, & p \in L, \end{cases}$$

$$W_{M(t)}(p) = 0 \ \text{ при } \ p \in M_0,$$

$$\text{то } W_{M^*(t)}(p) = \begin{cases} +\infty, & p \,\overline{\in}\, L, \\ W_{M(t)}(p), & p \in L. \end{cases}$$

В свою очередь, из выражения (4) вытекает, что функция

$$\sigma(t, z) = \begin{cases} +\infty, & z \,\overline{\in}\, M^*(t) \\ 0, & z \in M^*(t) \end{cases} = \begin{cases} +\infty, & \pi z \,\overline{\in}\, M(t) \\ 0, & \pi z \in M(t) \end{cases} = \sigma(t, \pi z)$$

является индикаторной функцией многозначного отображения $M^*(t)$.

Таким образом, опорная функция $W_{M^*(t)}(p)$ многозначного отображения $M^*(t)$ и его индикаторная функция $\sigma(t, z)$ взаимно сопряжены [14], т.е.

$$\sigma^*(t, p) = W_{M^*(t)}(p) \ \ \forall\, t \ge t_0.$$

Учитывая это обстоятельство, вместо игровой задачи (1)–(3) рассмотрим процесс (1), (2) и измеримую по t собственную выпуклую замкнутую ограниченную снизу по z при фиксированном t функцию $\sigma(t, z)$, $\sigma: \mathrm{R}^{n+1} \to \mathrm{R}^1$, значения которой на траекториях процесса (1) определяют момент окончания игры. Если $z(t)$, $t \ge t_0$, — траектория системы (1), то игру будемо считать законченной в момент t_1, $t_1 > t_0$, если

$$\sigma(t_1, z(t_1)) \le 0. \tag{5}$$

Цели игроков такие же, как и в задаче сближения (1)–(3) с той лишь разницей, что вместо попадания траектории $z(t)$ на множество $M^*(t)$ должно выполняться неравенство (5).

При фиксированном t согласно определению сопряженной функции и с учетом теоремы Фенхеля–Моро [14] имеем

$$\sigma(t, z) = \sup_{p \in R^n} [(p, z) - \sigma^*(t, p)],$$

где

$$\sigma^*(t, p) = \sup_{z \in R^n} [(p, z) - \sigma(t, z)]. \tag{6}$$

Функция $\sigma^*(t, p)$ собственная, замкнутая и выпуклая [14–16].

Эффективное множество функции $\sigma^*(t, p)$ зависит от t и имеет вид

$$\mathrm{dom}\sigma_t^* = \{p \in R^n : \sigma^*(t, p) < +\infty\}.$$

В силу ограниченности снизу собственной функции $\sigma(t, z)$ при каждом t, $t \ge t_0$, и соотношения (6) $\sigma^*(t, 0) = -\inf_{z \in R^n} \sigma(t, z)$, является ограниченной, а значит, $0 \in \mathrm{dom}\sigma_t^*$ $\forall\, t \ge t_0$.

Пусть L_σ — линейная оболочка (пересечение всех линейных подпространств), содержащая множества $\mathrm{dom}\sigma_t^*$, $t \ge t_0$, и не зависит от t. Тогда она является линейным подпространством. Обозначим π_σ оператор ортогонального проектирования из R^n на L_σ. Справедливо соотношение

$$\sigma(t, z) = \sigma(t, \pi_\sigma z)\ \forall\, t \ge t_0,\ \ z \in R^n.$$

Введем многозначные отображения

$$W_\sigma(t, \tau, v) = \pi_\sigma \Phi(t, \tau)\varphi(\tau, U(\tau), v),\ \ W_\sigma(t, \tau) = \bigcap_{v \in V(\tau)} W_\sigma(t, \tau, v),\ \ t \ge \tau \ge t_0,\ \ v \in V(\tau),$$

где $\Phi(t, \tau)$ — матрица Коши однородной системы (1).

Условие Понтрягина. Многозначное отображение $W_\sigma(t, \tau)$ имеет непустые образы при $t_0 \le \tau \le t < +\infty$.

В измеримом замкнутозначном отображении $W_\sigma(t, \tau)$ согласно теореме измеримого выбора [15] выберем и зафиксируем измеримый селектор $\gamma_\sigma(t, \tau)$ и положим

$$\xi_\sigma(t_0, z_0, t, \gamma_\sigma(t,\cdot)) = \pi_\sigma \Phi(t, t_0) z_0 + \int_{t_0}^{t} \gamma_\sigma(t, \tau) d\tau.$$

Введем в рассмотрение многозначное отображение

$$\mathsf{A}_\sigma(t, \tau, v) = \Big\{ \alpha \ge 0 : \inf_{u \in U(\tau)} \sup_{p \in \mathrm{dom}\sigma_t^*} [(p, \Phi(t, \tau)\varphi(\tau, u, v) - \gamma_\sigma(t, \tau)) +$$

$$+ \alpha[(p, \xi(t_0, z_0, t, \gamma_\sigma(t,\cdot))) - \sigma^*(t, p)]] \le 0 \Big\} \qquad (7)$$

и его опорную функцию в направлении $+1$

$$\alpha_\sigma(t, \tau, v) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathsf{A}_\sigma(t, \tau, v)\},\ \ t \ge \tau \ge t_0,\ \ v \in V(\tau),$$

которая в данном случае выполняет роль разрешающей функции [8].

Из условия Понтрягина и включения $\gamma_\sigma(t, \tau) \in W_\sigma(t, \tau)$ непосредственно вытекает неравенство

$$\min_{u \in U(\tau)} \max_{p \in \mathrm{dom}\sigma_t^*} (p, \pi_\sigma \Phi(t, \tau)\varphi(\tau, u, v) - \gamma_\sigma(t, \tau)) \le 0\ \ \forall\, t \ge \tau \ge t_0,\ \ v \in V(\tau).$$

Если выполнено условие Понтрягина, то неравенство в соотношении (7) имеет место по крайней мере при нулевом значении α. Заметим также, что при $\sigma(t, \xi(t_0, z_0, t, \gamma_\sigma(t, \cdot))) \le 0$ в силу неравенства Фенхеля [14] $\mathsf{A}_\sigma(t, \tau, v) = [0, +\infty)$, $t \ge \tau \ge t_0$, $v \in V(\tau)$, и функция $\alpha_\sigma(t, \tau, v) = +\infty$ для $v \in V(\tau)$, $t \ge \tau \ge t_0$.

Рассмотрим множество

$$T_\sigma(t_0, z_0, \gamma_\sigma(\cdot,\cdot)) = \left\{ t \ge t_0 : \inf_{v(\cdot)\in\Omega_E} \int_{t_0}^{t} \alpha_\sigma(t, \tau, v(\tau))\, d\tau \ge 1 \right\}. \tag{8}$$

Здесь Ω_E — совокупность измеримых функций $v(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$, со значениями из V.

Из выражения (7) вытекает, что многозначное отображение $\mathsf{A}_\sigma(t, \tau, v)$ является $L \times B$-измеримым по совокупности (τ, v), $v \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$, для любого t. Поэтому из теоремы об опорной функции получим, что функция $\alpha_\sigma(t, \tau, v)$ также $L \times B$-измерима по совокупности (τ, v), а значит, суперпозиционно измеримый и интеграл в соотношении (8) имеет смысл.

Теорема. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) с терминальным функционалом $\sigma(t, z)$, который является ограниченной измеримой по t, $t \ge t_0$, и собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по z при фиксированном t функцией, выполнено условие Понтрягина.

Тогда, если для заданного начального состояния (t_0, z_0) существует такой измеримый по τ селектор $\gamma_\sigma(t, \tau)$, $t_0 \le \tau \le t < +\infty$, многозначного отображения $W_\sigma(t, \tau)$, что $T_\sigma(t_0, z_0, \gamma_\sigma(\cdot,\cdot)) \ne \varnothing$ и $T_\sigma \in T_\sigma(t_0, z_0, \gamma_\sigma(\cdot,\cdot)) \ne \varnothing$, то игра может быть закончена в момент T_σ с использованием управления, которое назначается некоторой квазистратегией.

Доказательство. Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор многозначного отображения $V(\tau)$, $\tau \in [t_0, T_\sigma]$. Укажем способ выбора управления преследователем.

Для этого рассмотрим сначала случай $\sigma(T_\sigma, \xi(t_0, z_0, T_\sigma, \gamma_\sigma(T_\sigma, \cdot))) > 0$, введя контрольную функцию

$$h_\sigma(t) = 1 - \int_{t_0}^{t} \alpha_\sigma(T_\sigma, \tau, v(\tau))\, d\tau.$$

Она непрерывна и согласно выражению (8) существует такой момент t_*, $t_* \in (t_0, T_\sigma]$, что $h_\sigma(t_*) = 0$.

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathsf{A}_\sigma(\tau, v) = \Big\{ u \in U(\tau) : \sup_{p \in \operatorname{dom} \sigma^*_{T_\sigma}} [(p, \Phi(T_\sigma, \tau)\varphi(\tau, u, v) - \gamma_\sigma(T_\sigma, \tau)) +$$

$$+ \alpha_\sigma(\tau, v)[(p, \xi(t_0, z_0, T_\sigma, \gamma_\sigma(T_\sigma, \cdot)) - \sigma^*(T_\sigma, p)]] \le 0 \},$$

где

$$\alpha_\sigma(\tau, v) = \begin{cases} \alpha_\sigma(T_\sigma, \tau, v), & t_0 \le \tau \le t_* \\ 0, & t_* < \tau \le T_\sigma \end{cases}.$$

В силу свойств параметров процесса (1), функции $\sigma(t, z)$ и разрешающей функции отображение $U_\sigma(\tau, v)$ является $L \times B$-измеримым при $v \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, T_\sigma]$. По-

ISSN 0572-2691

этому по теореме об измеримом выборе в нем существует $L \times B$-измеримый селектор $u_\sigma(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией. Положим управление первого игрока равным

$$u_\sigma(\tau) = u_\sigma(\tau, v(\tau)), \quad \tau \in [t_0, T_\sigma].$$

При $\sigma(T_\sigma, \xi(t_0, z_0, T_\sigma, \gamma_\sigma(T_\sigma, \cdot))) \le 0$ управление первого игрока на всем промежутке $[t_0, T_\sigma]$ выберем в виде измеримой функции $u_\sigma^0(\tau) = u_\sigma^0(\tau, v(\tau))$, где $u_\sigma^0(\tau, v)$ — $L \times B$-измеримый селектор отображения $U_\sigma(\tau, v)$ с нулевой разрешающей функцией.

Покажем, что указанный закон выбора управления преследователем обеспечивает при любых управлениях убегающего выполнение неравенства (5) на траекториях системы (1) в момент T_σ.

Если $\sigma(T_\sigma, \xi(t_0, z_0, T_\sigma, \gamma_\sigma(T_\sigma, \cdot))) \le 0,$ то с учетом закона выбора управления первым игроком, из формулы Коши получаем $\pi z(T_\sigma) = \xi(t_0, z_0, T_\sigma, \gamma_\sigma(T_\sigma, \cdot)),$ откуда вытекает неравенство (5) в момент T_σ.

Пусть $\sigma(T_\sigma, \xi(t_0, z_0, T_\sigma, \gamma_\sigma(T_\sigma, \cdot))) > 0.$ Тогда, учитывая равенство $\sigma(T_\sigma, z(T_\sigma)) = \sigma(T_\sigma, \pi z(T_\sigma)),$ формулу Коши и определение сопряженной функции, получаем

$$\sigma(T_\sigma, z(T_\sigma)) = \max_{p \in \operatorname{dom} \sigma^*_{T_\sigma}} \Bigg[(p, \xi(t_0, z_0, T_\sigma, \gamma_\sigma(T_\sigma, \cdot))) + \int_{t_0}^{T_\sigma} (p, \Phi(T_\sigma, \tau)\varphi(\tau, u_\sigma(\tau), v(\tau)) - \gamma_\sigma(T_\sigma, \tau))d\tau - \sigma^*(T_\sigma, p) \Bigg].$$

Прибавим и вычтем в квадратных скобках величину

$$[(p, \xi(t_0, z_0, T_\sigma, \gamma_\sigma(T_\sigma, \cdot)) - \sigma^*(T_\sigma, p)] \int_{t_0}^{t_*} \alpha_\sigma(T_\sigma, \tau, v(\tau))\, d\tau.$$

Тогда получаем

$$\sigma(T_\sigma, z(T_\sigma)) = \max_{p \in \operatorname{dom} \sigma^*_{T_\sigma}} \Bigg\{ [(p, \xi(t_0, z_0, T_\sigma, \gamma_\sigma(T_\sigma, \cdot)) - \sigma^*(T_\sigma, p)]\, h_\sigma(t_*) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_*} [p, \Phi(T_\sigma, \tau)\varphi(\tau, u_\sigma(\tau), v(\tau)) - \gamma_\sigma(T_\sigma, \tau)) + \alpha_\sigma(T_\sigma, \tau, v(\tau)) \times$$

$$\times [(p, \xi(t_0, z_0, T_\sigma, \gamma_\sigma(T_\sigma, \cdot)) - \sigma^*(T_\sigma, p)]]\, d\tau +$$

$$+ \int_{t_*}^{T_\sigma} (p, \Phi(T_\sigma, \tau)\varphi(\tau, u_\sigma(\tau), v(\tau)) - \gamma_\sigma(T_\sigma, \tau))\, d\tau \Bigg\}.$$

Отсюда вытекает, что преследователь может гарантировать в момент T_σ выполнение неравенства

$$\sigma(T_\sigma, z(T_\sigma)) \le \sigma(T_\sigma, \xi(t_0, z_0, T_\sigma, \gamma_\sigma(T_\sigma, \cdot)))\, h_\sigma(t_*) = 0,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Рассмотрим в этой же схеме несколько иную задачу. Какое минимальное значение функционала $\sigma(t, z)$ может себе гарантировать первый игрок на траекториях системы (1) в заданный момент T, $T > t_0$. Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Утверждение. Пусть параметры процесса (1) удовлетворяют условию Понтрягина, а терминальный функционал $\sigma(t, z)$ — условиям теоремы.

Тогда справедлива оценка для $T > t_0$

$$\sup_{v(\bullet)\in\Omega_E} \sigma(T, z(T)) \le$$

$$\le \begin{cases} \sigma((T_\sigma, \xi)(t_0, z_0, T_\sigma, \gamma_\sigma(T_\sigma, \cdot))), \text{ если } \sigma(T_\sigma, \xi(t_0, z_0, T_\sigma, \gamma_\sigma(T_\sigma, \cdot))) \le 0, \\ \sigma(T_\sigma, \xi(t_0, z_0, T_\sigma, \gamma_\sigma(T_\sigma, \cdot))) \times [1 - \inf\limits_{v(\cdot)\in\Omega_E} \int\limits_{t_0}^{T} \alpha_\sigma(T, \tau, v(\tau)) d\tau], \\ \text{если } \sigma(T_\sigma, \xi)(t_0, z_0, T_\sigma, \gamma_\sigma(T_\sigma, \cdot)) > 0. \end{cases}$$

Приведем один важный пример функции $\sigma(t, z)$, связанный с обобщенным расстоянием [16].

Пусть $M^*(t)$, $t \ge t_0$, — выпуклозначное отображение, образы которого замкнуты и принадлежат R^n, а C — выпуклое ограниченное множество в R^n, причем $0 \in \operatorname{int} C$. Тогда для всех $z \in R^n$ определена функция обобщенного расстояния [16]

$$d_C(z, M^*(t)) = \inf\{\rho \ge 0 : z \in M^*(t) + \rho C\}. \tag{9}$$

Если $C = S$, где S — единичный шар с центром в нуле, то $d_S(z, M^*(t))$ — расстояние от точки z к множеству $M^*(t)$ в момент t.

Если $M^*(t) = \{0\}$, $t \ge t_0$, то

$$d_C(z, \{0\}) = \inf\{\rho \ge 0 : z \in \rho C\} = \mu_C(z)$$

— функция Минковского множества C.

Справедлива формула [16]

$$d_C(z, M^*(t)) = \sup_{p\in R^n} \{(z, p) - W_{M^*(t)}(p) : W_C(p) \le 1\}, \tag{10}$$

где $W_{M^*(t)}(p)$, $W_C(p)$ — опорные функции соответственно многозначного отображения и множества.

Возьмем функцию $d_C(z, M^*(t))$ в качестве $\sigma(t, z)$. Она удовлетворяет условиям, которые накладывались на функцию $\sigma(t, z)$.

Найдем функцию $\sigma^*(t, p)$, $p \in R^n$, сопряженную по второй переменной к функции обобщенного расстояния.

Заметим, что справедлива формула [16] $d_C(z, M^*(t)) = \inf\limits_{m\in M^*(t)} \mu_C(z - m)$. Согласно определению инфимальной конволюции [14 – 16] получим формулу

$$d_C(z, M^*(t)) = (f \oplus g_t)(z) = \inf_{y\in R^n}\{f(z-y)+g_t(y)\}.$$

где $\oplus$ — знак операции инфимальной конволюции, $f(z) = \mu_C(z)$ — калибровочная функция множества C, а $g_t(y) = \delta(y, M^*(t))$ — индикаторная функция отображения $M^*(t)$.

На основе двойственности операций суммы и инфинитезимальной конволюции получим формулу для сопряженной функции

$$\sigma^*(t, p) = d_C^*(p, M^*(t)) = f^*(p) + g_t^*(p) = \begin{cases} W_{M^*(t)}(p), & p \in C^0, \\ +\infty, & p \overline{\in} C^0, \end{cases}$$

где $C^0 = \{p \in \mathrm{R}^n : W_C(p) \le 1\}$ — поляра множества C, $f^*(p) = \delta(p, C^0)$ — индикаторная функция поляры множества C, а $g_t^* = W_{M^*(t)}(p)$ — опорная функция отображения $M^*(t)$. Здесь использован тот факт, что калибровочная функция множества C является опорной функцией поляры C^0 [14], а также двойственность индикаторной и опорной функций выпуклого замкнутого множества [14–16].

Если обозначить

$$K_{M^*(t)} = \{p \in R^n : W_{M^*(t)}(p) < +\infty\}$$

барьерный конус многозначного отображения $M^*(t)$, то

$$\sigma^*(t, p) = \begin{cases} W_{M^*(t)}(p), & p \in C^0 \cap K_{M^*(t)}, \\ +\infty, & p \overline{\in} C^0 \cap K_{M^*(t)}. \end{cases}$$

Таким образом, с учетом формулы (10) имеем

$$\mathrm{dom}\, d_C^*(p, M^*(t)) = C^0 \cap K_{M^*(t)},$$

$$d_C(z; M^*(t)) = \max_{p\in C^0}[(p, z) - W_{M^*(t)}(p)].$$

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Лемма. Пусть Z — компакт из R^n, M — выпуклое замкнутое множество, а C — выпуклый компакт, причем $0 \in \mathrm{int}\, C$. Тогда для того, чтобы $Z \cap M \ne \varnothing$, необходимо и достаточно, чтобы $\min_{z\in Z}\max_{p\in C^0}[(p, z) - W_M(p)] \le 0.$

Если же Z — выпуклый компакт, то минимум и максимум можно переставить.

Воспользуемся леммой, чтобы установить связь между случаем терминального функционала в виде обобщенного расстояния и случаем цилиндрического терминального множества. Для этого будем считать, что многозначное отображение $M^*(t)$, которое фигурирует в формуле (9), имеет вид (3) $M^*(t) = M_0 + M(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$, где M_0 — линейное подпространство из R^n, $M(t) \in \mathrm{co}K(L)$, т.е. выпуклый компакт пространства L, $t \ge t_0$, а $L = M_0^{\perp}$ — ортогональное дополнение к M_0 в R^n. Учитывая структуру терминального множества $M^*(t)$, получаем его барьерный конус $K_{M^*(t)} = L$. Тогда вследствие предыдущих расчетов выражение для многозначного отображения $\mathsf{A}_\sigma(t, \tau, v)$, определенного формулой (7), имеет вид

$$\mathsf{A}_\sigma(t, \tau, v) = \Big\{ \alpha \geq 0 : \min_{u \in U(\tau)} \max_{p \in C^0 \cap L} [(p, \Phi(t, \tau)\varphi(\tau, u, v) - \gamma_\sigma(t, \tau)) +$$

$$+ \alpha [(p, \xi(t_0, z_0, t, \gamma_\sigma(t, \cdot))) - W_{M(t)}(p)]] \leq 0 \Big\}.$$

Здесь C^0 — поляра множества C, описанного перед введением обобщенного расстояния (9). Заметим, что как и в лемме, так и в данном выражении множества C и C^0 не влияют на величину множества $\mathsf{A}_\sigma(t, \tau, v)$. Необходимо только выполнение анонсированных свойств. Проще всего выбрать $C = S = \{z : \|z\| \leq 1\}$. Тогда и $C^0 = S$. В силу леммы многозначное отображение $\mathsf{A}_\sigma(t, \tau, v)$ совпадает с отображением

$$\mathsf{A}(t, \tau, v) = \{\alpha \geq 0 : [W(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau)] \cap \alpha [M(t) - \xi(t_0, z_0, t, \gamma(t, \cdot))] \neq \varnothing\},$$

если $\gamma_\sigma(t, \tau) = \gamma(t, \tau)$, $M(t) = \mathrm{co} M(t)$, $t \geq t_0$, а значит, и соответствующие разрешающие функции совпадают [8].

Предложенный подход может быть использован в задачах о поочередном и групповом сближении, о мягкой посадке и в игровых задачах для функционально-дифференциальных систем [17–21].

О.А. Чикрій

ПРО НЕСТАЦІОНАРНУ ІГРОВУ ЗАДАЧУ КЕРУВАННЯ РУХОМ

Для дослідження нестаціонарних конфліктно-керованих процесів з термінальною функцією плати запропоновано аналітичний підхід на основі методу розв'язуючих функцій. При цьому використовуються ідеї двоїстості у опуклому аналізі, зокрема апарат спряжених функцій. Наведено приклад, де ключову роль відіграє узагальнена відстань.

Al.A. Chikrii

ON NONSTATIONARY GAME PROBLEM OF MOTION CONTROL

An analytic approach, based on the method of resolving functions, is suggested to study nonstationary conflict–controlled processes with terminal payoff. It employs the duality ideas of convex analysis, in particular the apparatus of conjugate functions. An example is provided with generalized distance playing a key role.

1. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. — М. : Наука, 1988. — **2**. — 576 с.
2. *Кривонос Ю.Г., Матичин И.И., Чикрий А.А.* Динамические игры с разрывными траекториями. — Киев : Наук. думка, 2005. — 220 с.
3. *Пилипенко Ю.В., Чикрий А.А.* Колебательные конфликтно–управляемые процессы // Прикладная математика и механика. — 1993. — **57**, № 3 — С. 3–14.
4. *Чикрий А.А., Дзюбенко К.Г.* Билинейные марковские процессы поиска движущихся объектов // Проблемы управления и информатики. — 1997. — № 1. — С. 92–106.

5. *Eidelman S.D., Chikrii A.A.* Dynamic game problems of approach for fractional–order equations // Ukrainian mathematical journal. — 2000. — **52**, N 11. — P. 1787–1806.
6. *Chikrii A.A.* The problem of avoidance for controlled dynamic objects // J. Math., Game Theory and Algebra, Nova Science Publ., Inc. — 1988. — **7**, N 2/3. — P. 81–94.
7. *Чикрий А.А., Белоусов А.А.* О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2009. — **15**, № 4. — С. 290–301.
8. *Chikrii A.A., Rappoport J.S., Chikrii K.A.* Multivalued mappings and their selectors in the theory of conflict-controlled processes // Cybernetics and Systems Analysis. — 2007. — **43**, N 5. — P. 719–730.
9. *Чикрий А.А., Эйдельман С.Д.* Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана–Лиувилля // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 6. — С. 66–99.
10. *Чикрий G.Ts*. On one problem of approach for damped oscillations // Journal of Automation and Information Sciences. — 2009. — **41**, N 10. — P. 1–9.
11. *Chikriy V.K.* Mean approach time for games problems with random perturbations // Ibid. — 2015. — **47**, N 8. — P. 74–84.
12. *Chikriy A.A, Matichin I.I.* Presentation of solutions of linear systems with fractional derivatives in the sense of Riemann–Liouville, Caputo and Miller–Ross // Ibid. — 2008. — **40**, N 6. — P. 1–11.
13. *Раппопорт И.С., Чикрий Ал.А.* О гарантированном результате в игровых задачах управления с терминальной функцией платы // Проблемы управления и информатики. — 1995. — № 1. — С. 34–43.
14. *Рокафеллар Т.* Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973. — 470 с.
15. *Aubin J.–P., Frankowska H.* Set–valued analysis. — Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. — 461 p.
16. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М. : Наука, 1980. — 320 с.
17. *Chikriy A.A, Kalashnikova S.F.* Pursuit of a group of evaders by a single controlled object // Cybernetics and Systems Analysis. — 1987. — **23**, N 4. — P. 437–445.
18. *Chikriy A.A.* Multivalued mappings and their selections in game control problems // Journal of Automation and Information Sciences. — 1995. — **27**, N 1. — P. 27–38.
19. *Chikriy A.A., Eidelman S.D.* Generalized Mittag-Leffler matrix function in game problems for evolutionary equations of fractional order // Cybernetics and Systems Analysis. — 2000. — **36**, N 3. — P. 315–338.
20. *Albus J., Meystel A., Chikrii A.A., Belousov A.A., Kozlov A.I.* Analytical method for solution of the game problem of soft landing for moving objects // Ibid. — 2001. — **37**, N 1. — P. 75–91.
21. *Chikriy A.A., Eidelman S.D.*. Game problems for fractional quasilinear systems // Computers and Mathematics with Applications. — 2002. — **44**. — P. 835–851.

Получено 15.05.2015