

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

УДК 62-50

В.Ф. Кудин, Б.И. Приймак

СУБОПТИМАЛЬНОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО КРИТЕРИЮ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ИНВАРИАНТНОГО ПОГРУЖЕНИЯ

Введение

Задачи синтеза оптимальных по быстродействию алгоритмов управления остаются актуальными для проектирования автоматических систем управления различными транспортными механизмами производственных цехов, следящих систем различного назначения, систем управления колебаниями, манипуляторами и др. [1–4]. Известно, что при проектировании систем, оптимальных по быстродействию, синтез алгоритмов выполняется, как правило, на основе принципа максимума в сочетании с методом фазового пространства [5, 6]. Возможности применения этого метода ограничены объектами третьего порядка. Математические модели управляемых объектов современных механизмов и машин наряду с апериодическими звеньями зачастую содержат и колебательные. Синтез оптимальных по быстродействию управлений такими системами, как показывают выполненные в [7, 8] исследования, представляют трудную, возможно, даже неразрешимую задачу. В целом модели объектов являются нелинейными по переменным состояния и управляющему воздействию. Кроме того, минимизируемые функционалы, используемые при построении оптимальных систем управления, обычно неквадратичны, что усложняет процедуру аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР).

В данной статье предлагается приближенное решение нелинейной задачи АКОР по быстродействию на основе метода Беллмана–Ляпунова в сочетании с концепцией инвариантного погружения [9–11]. Отметим, что до настоящего времени для решения задач синтеза метод инвариантного погружения практически не разработан. Полученное в статье общетеоретическое решение задачи синтеза субоптимального нелинейного управления рассмотрено на примере двухмассовой электромеханической системы передвижения кранового механизма с учетом гашения колебаний транспортируемого груза [3, 4]. Предложенный метод обладает вычислительной эффективностью и легко распространяется на нелинейные системы высокой размерности.

1. Постановка задачи

Предлагаемую в статье методику синтеза субоптимального нелинейного управления рассмотрим на примере двухмассовой электромеханической системы

© В.Ф. КУДИН, Б.И. ПРИЙМАК, 2015

передвижения кранового механизма с учетом гашения колебаний транспортируемого груза. Схема подъемно-транспортного механизма с маятниковой подвеской груза представлена на рис. 1 [3]. Здесь m_1 — масса тележки (моста), m_2 — масса груза, l — длина подвеса груза, y — угол отклонения груза от вертикали, F — динамическое усилие, приложенное к тележке, M — динамический момент электропривода, r — радиус привода.

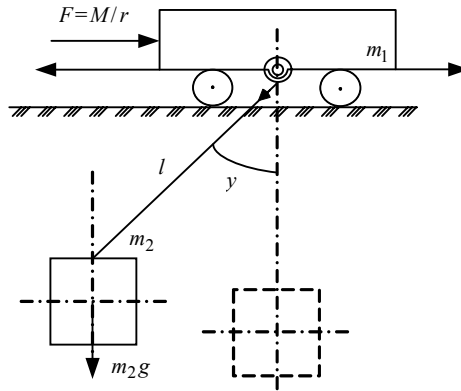


Рис. 1

Движение двухмассовой системы «тележка–груз» при выполнении условия $m_2 \sin^2 y \ll m_1$ описывается нелинейным уравнением [2]

$$\ddot{y} + \frac{m_2}{m_1} \dot{y}^2 \sin y \cos y + \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l} \sin y = \frac{F \cos y}{m_1 l}, \quad (1)$$

где g — ускорение свободного падения.

Осуществляя линеаризацию (1) относительно положения равновесия системы и учитывая электромагнитную инерционность электропривода, получаем систему дифференциальных уравнений в форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -a_{21}x_1 + a_{23}x_3; \\ \dot{x}_3 = -a_{33}x_3 + bu, \quad |u| \leq 1, \end{cases} \quad (2)$$

где $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = F$ — переменные состояния, u — управляющее воздействие. Параметры модели (2) при $m_1 = 250$ кг, $m_2 = 25$ кг, $l = 4$ м, $g = 9,81$ м/с² равные (в соответствующих единицах системы СИ): $a_{21} = 2,7$, $a_{23} = 1,0 \cdot 10^{-3}$, $a_{33} = 4$, $b = 3,5 \cdot 10^3$.

По сути модель (2) представляет собой последовательное соединение апериодического звена первого порядка и консервативного звена при наличии ограничения на управляющее воздействие, которое можно приближенно представить в виде $u = f(\sigma)$.

Примечание. Учет ограничения на управление u с помощью некоторой функции $u = f(\sigma)$ впервые предложил А. Miele [12]. Здесь роль управляющего воздействия, на которое не наложено ограничение, переходит к величине σ . По-

этому формировать подынтегральную функцию $w(\sigma)$ гораздо легче. При этом зависимость вида $u = 2^n \sqrt[n]{\sigma}$ ($n=2, 3, 4, \dots$) позволяет при достаточно больших n аппроксимировать релейную характеристику с большой точностью на классе гладких функций. Для рассматриваемой задачи примем $n = 5$, т.е. $u = \sigma^{1/9}$.

В точках позиционирования тележки перемещаемый груз занимает произвольное положение. Возникает типичная задача АКОР по отработке начальных условий, исходя из условия быстрейшего затухания переходного процесса. В этом случае критерий оптимальности и подынтегральные функции имеют следующий вид:

$$\min_{\sigma} J = \int_0^T [W(x_1, x_2, x_3) + w(\sigma)] dt, \quad (3)$$

где $W(x_1, x_2, x_3) = 1$, $w(\sigma) = c\sigma^2$, T свободно, не фиксировано, c — весовая константа.

Ставится задача отыскания управления $\sigma = f(x_1, x_2, x_3)$, обеспечивающего переход изображающей точки пространства состояний в начало координат при произвольных начальных условиях, на решениях системы (2), исходя из минимизации функционала (3).

Рассмотрим сначала процедуру АКОР по критерию быстродействия при наличии ограничения на управление, которое сложилось к настоящему времени.

Метод динамического программирования Беллмана дает следующее функциональное уравнение для (2) и (3):

$$\min_{\sigma} \left[W(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial V}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2} (-a_{21}x_1 + a_{23}x_3) + \frac{\partial V}{\partial x_3} (-a_{33}x_3 + b\sigma^{1/9}) \right] = 0.$$

После дифференцирования получаем

$$2c\sigma + \frac{b}{9} \frac{\partial V}{\partial x_3} \sigma^{-8/9} = 0; \quad \sigma^{17/9} + \frac{b}{18c} \frac{\partial V}{\partial x_3} = 0; \quad \sigma = - \left(\frac{b}{18c} \frac{\partial V}{\partial x_3} \right)^{9/17}; \quad u = -17 \sqrt[17]{\frac{b}{18c} \frac{\partial V}{\partial x_3}}.$$

Исключая σ из функционального уравнения, получаем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана (ГЯБ) вида

$$W(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial V}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2} (-a_{21}x_1 + a_{23}x_3) + \frac{\partial V}{\partial x_3} (-a_{33}x_3) = 17c \left(\frac{b}{18c} \frac{\partial V}{\partial x_3} \right)^{18/17}. \quad (4)$$

Разлагая правую часть (4) в цепную дробь [13], получаем

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial V}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2} (-a_{21}x_1 + a_{23}x_3) - \frac{\partial V}{\partial x_3} a_{31}x_3 = \\ = \frac{\mu_{11}\sigma_1^2 + \mu_{12}\sigma_1^4 + \mu_{13}\sigma_1^6 + \dots}{1 + \mu_{21}\sigma_1^2 + \mu_{22}\sigma_1^4 + \dots}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\sigma_1 = \frac{b}{18c} \frac{\partial V}{\partial x_3}$, а $\mu_{11}, \mu_{12}, \dots$ — постоянные коэффициенты разложения цепной дроби.

Уравнение ГЯБ для функционала быстродействия (3) с учетом ограничения на управление при $u = f(\sigma) = \sigma^{1/9}$ будет иметь следующий вид:

$$1 + \frac{\partial V}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2} (-a_{21}x_1 + a_{23}x_3) - \frac{\partial V}{\partial x_3} a_{33}x_3 = 17c \left(\frac{b}{18c} \frac{\partial V}{\partial x_3} \right)^{18/17}. \quad (6)$$

По утверждению М. Атанса, П. Фалба [6] решение задачи синтеза по критерию быстродействия на базе метода динамического программирования, которое

сводится к решению уравнения ГЯБ, практически невозможно. Один из реальных путей — переход к аналитическому выражению подынтегральной функции критерия быстродействия в функции переменных состояния. Подынтегральную функцию $W(x_1, x_2, x_3) = 1$ можно аппроксимировать соотношениями вида $W_1(x_1) \approx 1 - e^{-\lambda x_1^2}$ или $W_2(x_1) \approx \text{th}(\lambda x_1^2)$. Функция $W_1(x_1)$ при $\lambda = 100$ представлена на рис. 2.

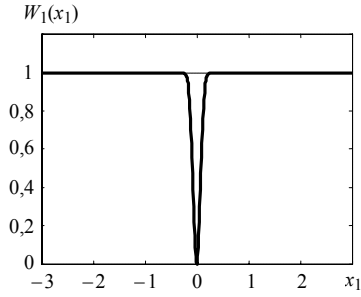


Рис. 2

Тогда для системы дифференциальных уравнений (2) и функционала (3) уравнение ГЯБ после разложения аппроксимирующей функции $W_2(x_1, x_2, x_3)$ в цепную дробь с учетом (5) будет иметь вид

$$\frac{\gamma_{11}(\lambda x_1)^2 + \gamma_{12}(\lambda x_1)^6 + \gamma_{13}(\lambda x_1)^{10} + \dots}{1 + \gamma_{21}(\lambda x_1)^4 + \gamma_{22}(\lambda x_1)^8 + \dots} + \frac{\partial V}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2} (-a_{21}x_1 + a_{23}x_3) - \frac{\partial V}{\partial x_3} a_{33}x_3 = \frac{\mu_{11}\sigma_1^2 + \mu_{12}\sigma_1^4 + \mu_{13}\sigma_1^6 + \dots}{1 + \mu_{21}\sigma_1^2 + \mu_{22}\sigma_1^4 + \dots}, \quad (7)$$

где $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots$ — постоянные коэффициенты разложения цепной дроби. Приближенное решение этого уравнения ищется в виде последовательности степенных форм от переменных состояния

$$V(x) = v^2(x) + v^4(x) + v^6(x) \dots \quad (8)$$

Здесь $v^2(x)$ — квадратичная форма от переменных состояния $x = (x_1, x_2, x_3)$, $v^4(x)$ — форма четвертой степени и т.д. Параметры квадратичной формы определяются системой уравнений Риккати, параметры формы четвертой степени — системой линейных алгебраических уравнений и т.д.

В итоге получаем субоптимальный алгоритм управления

$$u = -\sqrt[9]{\sigma} \approx -\text{sign } \sigma,$$

где $\sigma = \sigma^1(x) + \sigma^3(x) + \dots$, $\sigma^1(x)$ — линейная форма от переменных состояния, $\sigma^3(x)$ — кубическая форма от переменных состояния.

Однако предложенная процедура решения уравнения ГЯБ достаточно сложна в вычислительном отношении и для систем выше третьего порядка практически не реализуема. Поэтому используем процедуру синтеза субоптимального управления на базе метода Беллмана–Ляпунова в сочетании с принципом инвариантного погружения [9–11].

2. Решение задачи АКОР методом инвариантного погружения

Сформулируем принцип инвариантного погружения. Основная идея его заключается в следующем [9, 14]: «Вместо того чтобы решать сложную исходную задачу нелинейного синтеза оптимального управления, ее включают в некоторое семейство более простых задач оптимизации. При этом необходимо найти взаимосвязь между отдельными более простыми задачами оптимизации, которые легко решаются. Тогда, используя решение последней и соотношение, связывающие отдельные простые задачи оптимизации, получаем решение исходной сложной задачи оптимального управления.»

2.1. Решение задачи АКОР на основе классического функционала. Таким образом, решается задача синтеза на основе метода инвариантного погружения в три этапа:

1) процесс погружения исходной сложной нелинейной задачи в семейство более простых задач аналитического конструирования регуляторов;

2) анализ полученных решений более простых задач оптимизации и нахождение взаимосвязи между отдельными решениями;

3) приближенное решение задачи синтеза для исходной нелинейной задачи с учетом соотношений, учитывающих взаимосвязи между отдельными простыми задачами оптимизации.

Для осуществления процесса погружения исходной нелинейной задачи оптимизации в семейство более простых линейных задач линеаризируем неквадратичный функционал и динамическую модель управляемого объекта.

Преобразуем подынтегральную функцию минимизируемого функционала $W(x_1, x_2, x_3) = 1 = q(x_1)x_1^2$, где $q(x_1) = 1/x_1^2$ — весовая константа. В итоге получаем критерий оптимальности вида

$$\min_{\sigma} I = \int_0^{\infty} [q(x_1)x_1^2 + c\sigma^2] dt, \quad (9)$$

т.е. неквадратичный функционал сведен к квадратичному, весовая константа которого $q(x_1)$ является функцией переменной состояния x_1 . Линеаризованную по управлению и переменным состояниям систему дифференциальных уравнений (2) определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -a_{21}x_1 + a_{23}x_3; \\ \dot{x}_3 &= -a_{33}x_3 + bh(a)\sigma. \end{aligned} \quad (10)$$

Управляющее воздействие $u = f(\sigma)$, где $f(\sigma)$ — функция нелинейного преобразования А. Мие, представлена в виде $u = h(a)\sigma = \left(\frac{f(\sigma)}{\sigma}\right)\sigma$, где $h(a) = \frac{f(\sigma)}{\sigma}$. Здесь $h(a)$ — коэффициент статической линеаризации для затухающих переходных процессов [15], который для фиксированной области пространства состояний — постоянная величина, a — амплитуда колебаний.

Примечание. Коэффициент $h(a)$ — приближенный эквивалент коэффициента гармонической линеаризации, а также линеаризации по методу секущей [16], поскольку его можно получить методом среднеквадратичного приближения.

Тогда для системы уравнений (10) и функционала (9) получаем функциональное уравнение Беллмана для фиксированной области пространства состояний вида

$$\min_{\sigma} \left[q(x_1)x_1^2 + c\sigma^2 + \frac{\partial V}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2}(-a_{21}x_1 + a_{23}x_3) + \frac{\partial V}{\partial x_3}(-a_{33}x_3 + bh(a)\sigma) \right] = 0,$$

$$\text{отсюда получаем } \sigma = -\frac{bh(a)}{2c} \frac{\partial V}{\partial x_3}.$$

В итоге имеем систему уравнений Риккати для решения линейно-квадратичной задачи синтеза для различных областей пространства состояний:

$$\begin{aligned} q(x_1) - 2k_{21}a_{21} &= \frac{h^2(a)b^2}{c}k_{31}^2; & k_{13} - a_{23}k_{12} - a_{33}k_{32} &= \frac{h^2(a)b^2}{c}k_{31}k_{32}; \\ 2k_{12} &= \frac{h^2(a)b^2}{c}k_{23}^2; & k_{13} - a_{23}k_{22} - a_{33}k_{32} &= \frac{h^2(a)b^2}{c}k_{32}k_{33}; \\ 2a_{23}k_{13} &= \frac{h^2(a)b^2}{c}k_{33}^2; & k_{12}a_{23} - a_{21}k_{23} - a_{33}k_{31} &= \frac{h^2(a)b^2}{c}k_{13}k_{33}. \end{aligned} \quad (11)$$

Затем решаем задачу АКОР для различных областей пространства состояний. При этом функции $q(x_1)$ и $h(a)$ аппроксимируем с помощью кусочно-постоянных функций. Графики этих функций (кривые 1) и их аппроксимации (кривые 2) представлены на рис. 3, а и рис. 3, б соответственно.

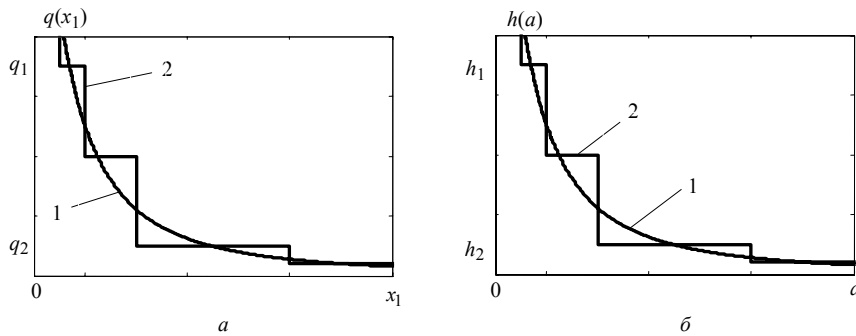


Рис. 3

Желательно реализовать процедуру погружения для некоторого множества областей пространства состояний с управлениями $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$, $\sigma_3(x)$. Однако для упрощения вычислительной процедуры ограничимся двумя областями пространства состояний: областью малых и больших значений начального положения изображающей точки (начальных условий) в пространстве состояний.

На первом этапе решаем задачу АКОР в малой области пространства состояний (см. рис. 3) при $q(x_1) = q_1 = 100$, $h(a) = h_1 = 10$, $c = c_1 = 10$ и получаем закон управления

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) &= -\frac{bh_1}{c_1}(k_{31}x_1 + k_{32}x_2 + k_{33}x_3) = -(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3) = \\ &= -(2,39x_1 + 1,26x_2 + 1,774 \cdot 10^{-4}x_3). \end{aligned}$$

На втором этапе получаем решение задачи АКОР в большом (см. рис. 3) при $q(x_1) = q_2 = 1$, $h(a) = h_2 = 0,8$, $c = c_2 = (1/33)^2$ в виде

$$\begin{aligned} \sigma_2(x) &= -\frac{bh_2}{c_2}(k_{31}x_1 + k_{32}x_2 + k_{33}x_3) = -(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3) = \\ &= -(23,9x_1 + 13,85x_2 + 2,026 \cdot 10^{-3}x_3). \end{aligned}$$

На втором этапе реализации процедуры инвариантного погружения найдем взаимосвязь между отдельными решениями, т.е. между оптимальными управлениями $u_1 = f(\sigma_1)$ и $u_2 = f(\sigma_2)$. Эта взаимосвязь определяется тем, что при переходе фазовой траектории из области в большую в положение равновесия субоптимальное управление порождает некоторую вариацию управления. При этом взаимосвязь между u_1 и u_2 можно представить в виде соотношения

$$u_2(x) = -\text{sign } \sigma_2(x) = -\text{sign}[\sigma_1(x) + \Delta\sigma(x)], \quad (12)$$

где $\Delta\sigma(x) = \sigma_2(x) - \sigma_1(x) = \Delta k_1 x_1 + \Delta k_2 x_2 + \Delta k_3 x_3$.

Вариации параметров Δk_i , возникающих при переходе изображающей точки из одной области пространства состояний в другую, можно рассматривать как управляющие воздействия. Таким образом, получена последовательность мгновенных оптимальных управлений для некоторых совокупностей начальных условий.

На заключительном этапе процедура синтеза проводится в соответствии с методикой, изложенной в [17–19]. Ставится задача минимизации функционала

$$\min_{\Delta k_1, \Delta k_2} J = \int_0^{\infty} (q_1 x_1^2 + c_1 \Delta k_1^2 + c_2 \Delta k_2^2) dt \quad (13)$$

на решениях системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -a_{21}x_1 + a_{23}x_3; \\ \dot{x}_3 &= -a_{33}x_3 + bu; \\ u &= -f(\sigma) = -\text{sign} \left[\sum_{i=1}^3 k_i x_i + \Delta k_1 x_1 + \Delta k_2 x_2 \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Процесс определения допустимого управления по переменной состояния x_3 приводит к весьма малому значению эффективности управления, что позволяет в (13) и (14) соответственно пренебречь слагаемыми $c_3 \Delta k_3^2$ и $\Delta k_3 x_3$. В итоге функциональное уравнение Беллмана для системы (14) и функционала (13) определяется соотношением [15]

$$\begin{aligned} \min_{\Delta k_1, \Delta k_2} \left[q_1 x_1^2 + c_1 \Delta k_1^2 + c_2 \Delta k_2^2 + \frac{\partial V}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2} (-a_{21}x_1 + a_{23}x_3) + \right. \\ \left. + \frac{\partial V}{\partial x_3} \left\{ -a_{33}x_3 + bh_2 \left(\sum_{i=1}^{n=3} k_i x_i + \Delta k_1 x_1 + \Delta k_2 x_2 \right) \right\} \right] = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

После дифференцирования получаем

$$\Delta k_1 = -\frac{bh_2}{2c_1} \frac{\partial V}{\partial x_3} x_1; \quad \Delta k_2 = -\frac{bh_2}{2c_2} \frac{\partial V}{\partial x_3} x_2. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), приходим в итоге к модифицированному уравнению ГЯБ вида

$$q_1 x_1^2 + \frac{\partial V}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2} (-a_{21} x_1 + a_{23} x_3) + \frac{\partial V}{\partial x_3} \left[-a_{33} x_3 + b h_2 \sum_{i=1}^{n=3} k_i x_i \right] = \sum_{i=1}^{n=2} \frac{x_i^2}{4c_i} \left[b h_2 \frac{\partial V}{\partial x_3} \right]^2. \quad (17)$$

Решение этого уравнения аппроксимируется последовательностью степенных форм

$$V(x) = \sum_{m=1}^{\infty} v^{2m}(x) = v^2(x) + v^4(x) + v^6(x) + \dots \quad (18)$$

Параметры квадратичной и последующих форм определяются из системы линейных алгебраических уравнений. Окончательно получаем субоптимальный нелинейный закон управления, справедливый для всей области пространства состояний

$$u_2 = -\text{sign} \left[k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + b h_2 \sum_{i=1}^{n=2} \frac{x_i^2}{2c_i} \frac{\partial V}{\partial x_3} \right] = -\text{sign}[\sigma^1(x) + \sigma^3(x) + \sigma^5(x) \dots]. \quad (19)$$

2.2. Решение задачи АКОР по неклассическому функционалу. Рассмотрим решение задачи АКОР для неклассического функционала — критерия обобщенной работы А.А. Красовского. Решение задачи на заключительном этапе формулируется следующим образом. Для нелинейного управляемого объекта (14) оптимальными в смысле минимума неклассического функционала вида

$$\min_{\Delta k_1, \Delta k_2} J = \int_0^{\infty} \left[q_1 x_1^2 + \sum_{i=1}^{n=2} c_i \Delta k_i^2 + \sum_{i=1}^{n=2} \frac{x_i^2}{4c_i} \left(b h_2 \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \right)^2 \right] dt \quad (20)$$

являются управления

$$\Delta k_1 = -\frac{b h_2}{2c_1} \frac{\partial V_1}{\partial x_3} x_1; \quad \Delta k_2 = -\frac{b h_2}{2c_2} \frac{\partial V_1}{\partial x_3} x_2. \quad (21)$$

При этом оптимальная функция Беллмана–Ляпунова $V_1(x)$ — решение линейного уравнения в частных производных — уравнения ГЯБ

$$q_1 x_1^2 + \frac{\partial V_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial V_1}{\partial x_2} (-a_{21} x_1 + a_{23} x_3) + \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \left[-a_{33} x_3 + b h_2 \sum_{i=1}^{n=3} k_i x_i \right] = 0. \quad (22)$$

Решение этого уравнения представляет собой квадратичную форму от переменных состояния, параметры которой определяются линейной системой алгебраических уравнений. Доказательство данного утверждения полностью аналогично предыдущему решению задачи АКОР на первых этапах. После подстановки (21) в (19) получим закон управления, справедливый для области пространства состояний «в большом»

$$u_2 = -\text{sign} \left[\sum_{i=1}^{n=2} k_i x_i + b h_2 \sum_{i=1}^{n=3} \frac{x_i^2}{2c_i} \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \right] = -\text{sign}[\sigma^1(x) + \sigma^3(x)]. \quad (23)$$

3. Получение закона управления и моделирование замкнутой системы

Используя квадратичную форму, которая является решением уравнения (22), получаем нелинейный закон управления

$$u_2 = -\text{sign}[k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + (k_{21}x_1^2 + k_{22}x_2^2) \times (k_{31}x_1 + k_{32}x_2 + k_{33}x_3)]. \quad (24)$$

Исследование динамики замкнутого контура в виде синтезированного регулятора (24) и нелинейного объекта управления (1) при учете электромагнитной инерционности электропривода (третье уравнение в системе (2)) выполнено методом цифрового моделирования. Результаты моделирования приведены на рис. 4, 5.

Переходные процессы угла $y(t)$ при отработке начальных отклонений $y(0)$ транспортируемого груза, находящихся в пределах рабочей зоны $-60^\circ \leq y \leq 60^\circ$, представлены на рис. 4. На этом рисунке кривая 1 получена при $y(0) = 0,3$ рад, а кривая 2 — при $y(0) = 1$ рад. Эти кривые позволяют сделать вывод о достаточно

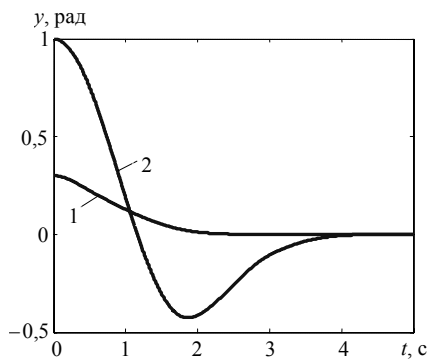


Рис. 4

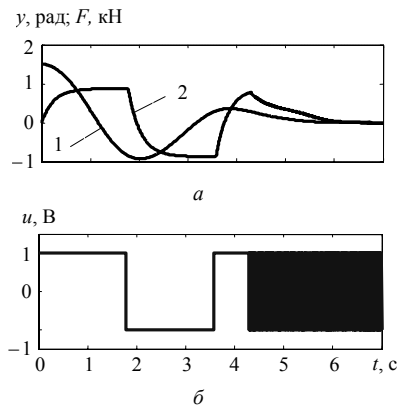


Рис. 5

В заключение целесообразно сравнить результаты моделирования синтезированной системы с субоптимальным управлением (24) и результаты моделирования достаточно близкого динамического объекта, для которого получено точное решение синтеза оптимального регулятора на основе принципа максимума [5, гл. VIII]. Принципиальная основа для сопоставления этих объектов — наличие в них свойств колебательности. При этом различие (не столь существенное для исполняемого анализа) состоит в том, что в нашем случае управляемый объект включает консервативное звено (коэффициент затухания $\xi = 0$), а в [5] — колебательное звено ($\xi = 0,2$).

эффективном гашении системой колебаний груза. При этом длительность обоих переходных процессов не превышает периода свободных колебаний груза, равного $T \approx 2\pi\sqrt{l/g} = 2\pi\sqrt{4/9,81} = 4$ с.

В целях проверки работоспособности синтезированной системы управления в случае выхода углового положения груза за пределы рабочей зоны, а также для анализа ее субоптимальных свойств было проведено моделирование при $y(0) = 1,5$ рад. Полученные переходные процессы углового положения груза $y(t)$ и прикладываемого к тележке усилия $F(t)$ представлены на рис. 5, а (кривые 1, 2 соответственно), а управляющее воздействие $u(t)$ — на рис. 5, б. Графики показывают, что колебания груза успешно гасятся системой управления.

Следует отметить, что в первых двух случаях отработки начальных условий управление $u(t)$ имело два интервала постоянных значений, а в третьем случае — три (рис. 5, б).

При исследовании динамики на практике обычно ограничиваются рассмотрением совокупности начальных условий, расположенных в ограниченной области пространства состояний, из которой изображающая точка приходит в начало координат при оптимальном управлении за определенное количество интервалов. Поэтому переходные процессы целесообразно сравнивать не по отработке равных начальных условий, а по количеству интервалов переходного оптимального процесса и управления, при котором изображающая точка фазовой траектории достигает начала координат.

Сравнительный анализ субоптимального и оптимального динамических процессов, представленных на рис. 5 и в главе VIII монографии [5], показывает, что в обоих случаях количество интервалов управления равно трем, а по основному показателю качества — длительности переходного процесса; результаты практически совпадают.

Заключение

Таким образом, сочетание двух подходов — процедуры АКОР по классическому функционалу с процедурой синтеза по обобщенному критерию А.А. Красовского позволяет найти приближенное решение нелинейной задачи Летова–Калмана в замкнутой форме для управляемых динамических систем, т.е. в предлагаемом методе на основе инвариантного погружения решение задачи нелинейной оптимизации сводится к последовательному решению линейных задач АКОР, что обеспечивает высокую вычислительную производительность метода.

В.Ф. Кудин, Б.І. Приймак

СУБОПТИМАЛЬНЕ НЕЛІНІЙНЕ КЕРУВАННЯ ЗА КРИТЕРІЄМ ШВИДКОДІЇ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ІНВАРІАНТНОГО ЗАНУРЕННЯ

Розглянуто загальнотеоретичну задачу синтезу субоптимального нелінійного керування на прикладі двомасової електромеханічної системи переміщення кранового механізму з урахуванням гасіння коливань транспортного вантажу. Задача розв'язується на базі методу Белмана–Ляпунова з використанням концепції інваріантного занурення за критерієм швидкодії. Проведено дослідження динаміки замкнутої системи із синтезованим субоптимальним регулятором.

V.F. Kudin, B.I. Pryymak

SUBOPTIMAL NONLINEAR CONTROL FOR OPERATION SPEED CRITERION ON THE BASIS OF INVARIANT IMMERSION METHOD

General theoretical task of suboptimal nonlinear control algorithm synthesis is under consideration. It is examined in the instance of two-mass electromechanical system of a crane moving mechanism considering load's oscillations damping. The task is solved on the basis of Bellman-Lyapunov method using the invariant immersion concept for operation speed criterion. Analysis of feedback system dynamics is performed.

1. *Динамика машин и управление машинами* / Под ред. Крейнина Г.В. — М. : Машиностроение, 1988. — 240 с.
2. *Терехов В.М., Осипов О.И.* Системы управления электроприводов. — М. : Академия, 2005. — 300 с.
3. *Герасимьяк Р.П., Параил В.А.* Электроприводы крановых механизмов. — М. : Энергия, 1970. — 136 с.
4. *Герасимьяк Р.П. Лецев В.А.* Анализ и синтез крановых электромеханических систем. — Одесса : СНИЛ, 2008. — 192 с.
5. *Павлов А.А.* Синтез релейных систем, оптимальных по быстродействию: метод фазового пространства. — М. : Наука, 1966. — 392 с.
6. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. — М. : Машиностроение. 1968. — 764 с.
7. *Федунов Б.Е.* Синтез оптимального по быстродействию управления колебательным звеном // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2000. — № 3. — С. 78–84.
8. *Крутько П.Д.* Исследование динамики субоптимальных по быстродействию автоматических систем // Там же. — 2004. — № 2. — С. 16–33.
9. *Беллман Р., Калаба Р., Сриджар Р.* Анализ чувствительности и инвариантное погружение. / Чувствительность автоматических систем // Труды Международного симпозиума по чувствительности систем автоматического управления. — М. : Наука, 1968.
10. *Булатов В.Н.* Методы погружения в задачах оптимизации. — Новосибирск : Наука, 1977. — 154 с.
11. *Баранов А.Ю., Трухаев Р.И., Хоменюк В.В.* Обоснование метода погружения в вариационных задачах // Автоматика и телемеханика. — 1967. — № 7. — С. 10–14.
12. *Miele A.* General variation theory of the light paths of rocket-powered aircraft, missiles and satellite carriers // Astronaut Acta. — 1958. — 4. — P. 264–288.
13. *Хованский А.Н.* Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. — М. : Гостехиздат, 1956. — 203 с.
14. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т.2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. — М. : Физматлит, 2004. — 464 с.
15. *Попов Е.П.* Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. — М. : Наука, 1973. — 584 с.
16. *Пальтов И.П.* Качество процессов и синтез корректирующих устройств в нелинейных автоматических системах. — М. : Наука, 1975. — 367 с.
17. *Кудин В.Ф.* К вопросу построения нелинейного регулятора методом динамического программирования // Автоматика. — 1968. — № 1. — С. 32–38.
18. *Кудин В.Ф.* Аналитическое конструирование нелинейных регуляторов с помощью метода гармонической линеаризации // Электромеханика. — 1989. — № 9. — С. 60–66.
19. *Kudin V., Kolachny I.* Synthesis of suboptimal nonlinear regulator by immersion method // Jour. Electrical engineering. — 1998. — 49, N 1–2. — P. 11–15.

*Получено 03.03.2015
После доработки 18.06.2015*