УДК 517.9

Н.В. Горбань, А.В. Капустян, Е.А. Капустян, О.В. Хоменко

СИЛЬНЫЙ ГЛОБАЛЬНЫЙ АТТРАКТОР ТРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ КАНАЛОПОДОБНОЙ ОБЛАСТИ*

Введение

Важной задачей исследования качественного поведения решений эволюционных диссипативных систем является изучение глобального аттрактора (минимального компактного множества, притягивающего все траектории системы) [1, 2]. При этом использование современных методов нелинейного и многозначного анализа дает возможность обобщения результатов теории глобальных аттракторов на класс диссипативных некорректно поставленных задач [3, 4]. Особое место среди таких задач занимает 3D-система Навье–Стокса [5]. В данном направлении проводились исследования как в случае ограниченной области [1], так и в неограниченных областях [6]. Однако на сегодняшний день для трехмерной системы уравнений Навье–Стокса известны результаты лишь в слабой топологии фазового пространства [7–9]. Один из методов изучения данной проблемы заключается в анализе различных модификаций системы с дальнейшим граничным переходом. В данной работе рассмотрена одна из таких модификаций [10, 11]), совпадающая с немодифицированной 3D-системой Навье–Стокса при ограниченных градиентах скоростей. В [10] задача рассмотрена в ограниченной области, для исследуемой системы доказано существование глобального аттрактора соответствующей полугруппы в сильной топологии, а также показана его сходимость ко множеству ограниченных полных траекторий немодифицированной системы. В данной работе эти результаты обобщены на случай неограниченных областей, удовлетворяющих неравенству Пуанкаре. Отметим, что ранее близкий круг вопросов был рассмотрен в [12], где рассматривалась система Бенара с указанной модификацией в неограниченной области. Однако результаты [12], применяемые к исследуемой системе, гарантируют лишь потраекторное притяжение в слабой топологии фазового пространства. Таким образом, полученные в данной работе результаты о существовании и свойствах глобального аттрактора в сильной топологии являются новыми.

Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathsf{R}^3$ — область, удовлетворяющая неравенству Пуанкаре:

$$\exists \lambda_1 > 0 : \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \ \int_\Omega \varphi^2(x)\, dx \le \frac{1}{\lambda_1} \int_\Omega \|\nabla\varphi\|^2(x)\, dx.$$

* Исследования частично поддержаны грантами Президента Украины GP/F50/049, GP/F61/017.

Положим, что

$$V=\{u\in (C_0^\infty(\Omega))^3 \,\big|\, \operatorname{div} u=0\};\ \ H=cl_{(L^2(\Omega))^3}V,\ \ \mathsf{V}=cl_{(H_0^1(\Omega))^3}V.$$

Тогда H и V — гильбертовы пространства со скалярными произведениями и нормами:

$$\forall u,v\in H\ \ (u,v)=\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega u_i(x)v_i(x)dx,\ \ \|u\|=\sqrt{(u,u)},$$

$$\forall u,v\in \mathsf{V}\ \ (u,v)_1=\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j}\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_j}dx,\ \ \|u\|_1=\sqrt{(u,u)_1}.$$

Таким образом, вложение $\mathsf{V}\subset H\subset \mathsf{V}^*$ плотно и непрерывно. Кроме того, выполняется неравенство Пуанкаре:

$$\forall u\in \mathsf{V}\ \ \|u\|^2\le \frac{1}{\lambda_1}\|u\|_1^2.$$

В цилиндре $Q=(0,T)\times\Omega$ рассмотрим задачу,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\nu\Delta u+F_N(\|u\|_1)(u\nabla)u=f-\nabla p,\\ \operatorname{div} u=0,\\ u\big|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}\tag{1}$$

где $\nu>0$, $f:\Omega\to \mathsf{R}^3$ заданы, $u\nabla=\sum_{i=1}^{3}u_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, модифицирующий множитель $F_N:\mathsf{R}_+\to\mathsf{R}_+$ для каждого $N\ge 1$ задан равенством

$$F_N(r)=\begin{cases}1, & r=0,\\ \min\left\{1,\dfrac{N}{r}\right\}, & r>0.\end{cases}$$

Рассмотрим слабую постановку задачи (1): найти такой элемент $u=u(t,x)$, что

$$u\in W_T=L^2(0,T;\mathsf{V})\cap L^\infty(0,T;H),$$

$$\frac{d}{dt}(u,v)+\nu(u,v)_1+b_N(u,u,v)=(f,\ v)\ \ \forall v\in\mathsf{V},\tag{2}$$

где $b_N(u,v,w)=F_N(\|v\|_1)\,b(u,v,w)$, $b:\mathsf{V}\times\mathsf{V}\times\mathsf{V}\to\mathsf{R}$ — трилинейная непрерывная форма, заданная равенством

$$b(u,v,w)=\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega u_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}w_j\,dx.$$

В дальнейшем покажем, что для $\forall u_0\in H$ задача (2) имеет единственное решение u, удовлетворяющее начальному условию $u(0)=u_0$. Продолжим это решение на $(0,+\infty)$ и в результате получим корректно определенную полугруппу $\{S(t):H\to H\}_{t\ge 0}$:

$$S(t)u_0=u(t),\ \ u(0)=u_0,\tag{3}$$

где $u(\cdot)$ — решение (2).

 ISSN 0572-2691

Определение 1. Компактное множество $A = A(N) \subset H$ называют глобальным аттрактором [2] полугруппы $\{S(t)\}_{t \ge 0}$, если

1) $A = S(t)A \quad \forall t \ge 0;$

2) для произвольного непустого ограниченного множества $B \subset H$ $dist(S(t)B, A) \to 0, \quad t \to \infty$.

Основной целью работы является доказательство существования связного глобального аттрактора $A = A(N)$ полугруппы (3), а также сходимости $A(N)$ при $N \to \infty$ ко множеству полных ограниченных траекторий $3D$-системы Навье–Стокса.

Основные результаты

В дальнейшем рассмотрим эквивалентную (2) операторную постановку задачи в пространстве V^*:

$$\frac{du}{dt} + \nu A u + B_N(u, u) = f, \tag{4}$$

где $A : \mathsf{V} \to \mathsf{V}^*$ — оператор Стокса, оператор $B_N : \mathsf{V} \times \mathsf{V} \to \mathsf{V}^*$ задан равенством

$$\langle B_N(u, v), w \rangle = b_N(u, v, w).$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\| B_N(u, v) \|_{\mathsf{V}^*} \le N \cdot c \cdot \| u \|_1. \tag{5}$$

В силу (5) произвольное решение задачи (2) принадлежит классу

$$W(0, T) = \left\{ u \in L_2(0, T; \mathsf{V}) : \frac{du}{dt} \in L_2(0, T; \mathsf{V}^*) \right\}.$$

Теорема 1. Для каждого $u_0 \in H$ существует единственное решение (2), удовлетворяющее начальному условию $u(0) = u_0$.

Доказательство. Воспользуемся схемой из [5]. Пусть $\{w_i\}_{i \ge 1} \subset V$ — система линейно независимых элементов, тотальная в V. Каждое приближенное решение $u^n(t, x) = \sum_{i=1}^{n} e_{in}(t)\, w_i(x)$ удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left(\frac{du^n}{dt}, w_j \right) + \nu (u^n, w_j)_1 + b_N(u^n, u^n, w_j) = (f, w_j), \quad j = \overline{1, n}, \tag{6}$$

с начальным условием

$$u^n(0) = u_0^n \to u_0 \text{ в } H \text{ при } n \to \infty. \tag{7}$$

Для каждого $n \ge 1$, для всех $u, v \in \mathsf{V}$ функция F_N удовлетворяет оценке [11]

$$\left| F_N(\|u\|_1) - F_N(\|v\|_1) \right| \le \frac{1}{N} F_N(\|u\|_1)\, F_N(\|v\|_1) \|u - v\|_1. \tag{8}$$

Таким образом, функция

$$\mathsf{R}^n \ni \{e_1, \ldots, e_n\} \mapsto F_N\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} e_i w_i\right\|_1\right)$$

является локально липшицевой. Из теоремы Пикара получаем, что задача Коши (6), (7) имеет единственное решение u^n на $[0, T_n]$. Поскольку $b_N(u, v, v) = 0$, из (6) получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^n(t)\|^2 + \nu\|u^n(t)\|_1^2 = (f, u^n(t)), \tag{9}$$

$$\|u^n(t)\|^2 + 2\nu\int_0^t \|u^n(p)\|_1^2 dp = \|u^n(0)\|^2 + 2\int_0^t (f, u^n(p))\, dp. \tag{10}$$

Используем неравенство Пуанкаре и лемму Гронуолла. Получаем оценку

$$\|u^n(t)\|^2 \le \|u^n(0)\|^2 e^{-\nu\lambda_1 t} + \frac{2}{\nu^2\lambda_1^2}\|f\|^2. \tag{11}$$

Из (10), (11) следует, что $T_n = T$ и

$$\{u^n\}_{n\ge 1} \text{ — ограниченная в } W(0, T) \text{ последовательность.} \tag{12}$$

Таким образом, существует такое $u \in W(0, T)$, что, по крайней мере, по подпоследовательности справедливы сходимости

$$\begin{aligned} &u^n \to u \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T; H);\\ &u^n \to u \text{ слабо в } L^2(0, T; \mathsf{V}),\ n \to \infty. \end{aligned} \tag{13}$$

В силу (5), (12) последовательность $\{f^n = f - \nu A u^n - B_N(u^n, u^n)\}_{n\ge 1}$ ограничена в $L^2(0, T; \mathsf{V}^*)$. Аналогично [5] получаем существование таких $\gamma > 0$, $c > 0$, что $\forall n \ge 1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} \|\bar{u}^n(\tau)\|^2 d\tau < c, \tag{14}$$

где $\bar{u}^n$ — преобразование Фурье функции u^n (положим $u^n(t) = 0$ вне отрезка $[0, T]$). Используем теорему о компактности с дробными производными [5]. Получим, что для произвольной подобласти $\Omega_r = \Omega \cap \{|x| < r\}$, по крайней мере, по подпоследовательности справедлива сходимость

$$u^n \to u \text{ в } L^2(0, T; (L^2(\Omega_r))^3),\ n \to \infty. \tag{15}$$

В силу призвольности значений $r > 0$ и (15) получим

$$u^n(t, x) \to u(t, x) \text{ почти везде на } (0, T) \times \Omega \text{ при } n \to \infty. \tag{16}$$

Покажем, что функция $u \in W(0, T)$ является решением (2). Для этого достаточно обосновать (для каждого фиксированного j) граничный переход в равенстве:

$$-\int_0^T (u^n(t), \psi'(t)\, w_j)\, dt - (u_0^n, w_j)\,\psi(0) + \nu \int_0^T (u^n(t), \psi(t)\, w_j)_1\, dt +$$

$$+\int_0^T b_N(u^n(t), u^n(t), \psi(t)\, w_j)\, dt - \int_0^T (f, \psi(t)\, w_j)\, dt = 0, \tag{17}$$

где $\psi \in C^1([0,T])$, $\psi(T) = 0$. Из (13) получаем нужные сходимости для первых трех слагаемых равенства (17).

Положим $z^n(t,x) = F_N(\|u^n(t)\|_1)\, u^n(t,x)$. Поскольку $0 \le F_N(r) \le 1$,

$$z^n \to z \text{ слабо в } L^2(0,T;\mathsf{V}) \text{ при } n \to \infty. \tag{18}$$

Вследствие (15) и справедливости вложения $\operatorname{supp} w_j \subset \Omega_r$ для некоторого $r > 0$ получаем

$$\int_0^T b_N(u^n(t), u^n(t), \psi(t)\, w_j)\, dt = \int_0^T b(z^n(t), u^n(t), \psi(t)\, w_j)\, dt =$$

$$= -\int_0^T b(z^n(t), \psi(t)\, w_j, u^n(t))\, dt \to \int_0^T b(z(t), u(t), \psi(t)\, w_j)\, dt. \tag{19}$$

Осталось доказать, что $z(t,x) = F_N(\|u(t)\|_1)\, u(t,x)$. Сначала покажем, что

$$u^n(t) \to u(t) \text{ в } \mathsf{V} \text{ для почти всех } t \text{ при } n \to \infty. \tag{20}$$

Из (19) следует, что $u \in W(0,T)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}(u, v) + \nu(u, v)_1 + b(z, u, v) = (f, v), \quad \forall v \in \mathsf{V}. \tag{21}$$

Это означает выполнение энергетического равенства:

$$\|u(t)\|^2 + 2\nu \int_0^t \|u(p)\|_1^2\, dp = \|u(0)\|^2 + 2\int_0^t (f, u(p))\, dp. \tag{22}$$

Из (10), (22), (7) и (13) получаем

$$\|u(t)\|^2 + 2\nu \limsup \int_0^t \|u^n(p)\|_1^2\, dp \le \|u(0)\|^2 + \int_0^t (f, u(p))\, dp.$$

Таким образом,

$$\limsup \int_0^T \|u^n(p)\|_1^2\, dp \le \int_0^T \|u(p)\|_1^2\, dp. \tag{23}$$

С другой стороны, в силу слабой сходимости

$$\liminf \int_0^T \|u^n(p)\|_1^2\, dp \ge \int_0^T \|u(p)\|_1^2\, dp.$$

Таким образом,

$$u^n \to u \text{ в } L^2(0,T;\mathsf{V}) \text{ при } n \to \infty. \tag{24}$$

Из (24) получаем сходимость (20) по подпоследовательности. Из (15) следует, что

$$z^n \to F_N(\|u\|_1)u \text{ в } L^2(0,T;(L^2(\Omega_r))^3) \text{ при } n\to\infty.$$

Вследствие (18) справедливо равенство

$$z(t,x) = F_N(\|u(t)\|_1)\,u(t,x) \text{ почти везде.}$$

Таким образом, u — решение (2) и $u(0)=u_0$.

Докажем единственность. Пусть $w=u-v$, где u и v — решения (2). Воспользуемся рассуждениями, аналогичными [11]. Тогда из (8) и неравенства

$$|b(u,v,w)| \le c_0\|u\|_1\|v\|_1\|w\|^{1/2}\|w\|_1^{1/2},$$

получаем

$$|b_N(u,u,w)-b_N(v,v,w)| \le \nu\|w\|_1^2 + c\cdot N^4\cdot\|w\|^2.$$

Из равенства

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + 2\nu\|w(t)\|_1^2 = -2(b_N(u,u,w)-b_N(v,v,w))$$

следует

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + \nu\|w(t)\|_1^2 \le 2c\cdot N^4\cdot\|w(t)\|^2. \tag{25}$$

Из неравенства Гронуолла получаем, что $w(t)\equiv 0$, как только $u(0)=v(0)$.

Теорема доказана.

Произвольность значения $T>0$ позволяет утверждать, что каждое решение (2) определено на $[0,+\infty)$. Тогда формула (3) корректно определяет полугруппу $\{S(t):H\to H\}_{t\ge 0}$.

Теорема 2. Для полугруппы $\{S(t)\}_{t\ge0}$, определенной формулой (3), существует глобальный аттрактор в фазовом пространстве H, ограниченный в H равномерно по N.

Доказательство. Из оценки (25) следует непрерывность $S(t):H\to H$ для всех $t\ge 0$. Каждое решение (2) почти везде удовлетворяет равенству

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \nu\|u(t)\|_1^2 = (f,u(t)). \tag{26}$$

Из неравенства Пуанкаре и леммы Гронуолла получаем оценку

$$\|u(t)\|^2 \le \|u(0)\|^2 e^{-\nu\lambda_1 t} + \frac{2}{\nu^2\lambda_1^2}\|f\|^2, \quad \forall t\ge 0. \tag{27}$$

Из (27) следует, что $\{S(t)\}_{t\ge0}$ диссипативна с поглощающим множеством

$$B_0 = \left\{u\in H : \|u\|^2 \le 1 + \frac{2}{\nu^2\lambda_1^2}\|f\|^2\right\},$$

т.е. для любого непустого ограниченного множества $B\subset H$ существует такое значение $T(B)$, что

$$\forall t\ge T(B)\ \ S(t)B\subset B_0. \tag{28}$$

 ISSN 0572-2691

Докажем асимптотическую компактность полугруппы $\{S(t)\}_{t\ge 0}$. Это значит, что для произвольных последовательностей $\{u_n^0\}_{n\ge 1}\subset H$, $\{t_n\}_{n\ge 1}\subset [0,+\infty)$, таких, что для некоторого $R>0$ $\|u_n^0\|\le R$; $t_n\uparrow\infty$:

$$\text{последовательность } \{S(t_n)u_n^0\}_{n\ge 1} \text{ предкомпактна в } H. \tag{29}$$

Отметим, что согласно [1] асимптотическая компактность полугруппы и выполнение (28) гарантируют существование глобального аттрактора $A=A(N)\subset B_0$ для полугруппы $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ в фазовом пространстве H.

Докажем утверждение (29). Воспользуемся методом энергетических равенств [1, 6]. Вследствие (27) последовательность $\{\xi_n = S(t_n)u_n^0\}_{n\ge 1}$ ограничена в H. Таким образом, по подпоследовательности

$$\xi_n \to \xi \text{ слабо в } H \text{ при } n\to\infty. \tag{30}$$

Аналогично для любого $T>0$ по подпоследовательности (зависящей от T)

$$S(t_n-T)u_n^0 \to \xi^T \text{ слабо в } H \text{ при } n\to\infty. \tag{31}$$

Для каждого $n\ge 1$ положим $u_n(t)=S(t+t_n-T)u_n^0=S(t)\,S(t_n-T)u_n^0$, $t\ge 0$. Определенная таким образом функция u_n удовлетворяет (26), (27), поэтому является ограниченной в $W(0,T)$. Следовательно, существует такая функция $u\in W(0,T)$, что справедливо (13). Из равенства

$$(u_n(t+h)-u_n(t),v)=\int_t^{t+h} <u_n'(s),v>ds$$

получаем справедливось следующих оценок $\forall v\in \mathsf{V}$, $\forall 0\le t<t+h\le T$:

$$\left|(u_n(t+h)-u_n(t),v)\right|\le c_T\|v\|_1 h^{1/2}; \tag{32}$$

$$\int_0^{T-h}\left|(u_n(t+h)-u_n(t)\right|^2 dt\le c_T h^{1/2}. \tag{33}$$

Рассуждая аналогично [6], получим сходимость u_n к u в смысле (15), (16). Тогда для $z_n(t,x)=F_N(\|u_n(t)\|_1)u_n(t,x)$ существует такая функция $z\in L^2(0,T;\mathsf{V})$, что справедливо (18). Аналогично (19) для $v\in V$:

$$\int_0^T b_N(u_n(t),u_n(t),v)\,dt\to\int_0^T b(z(t),u(t),v)dt,\ \ n\to\infty.$$

Из плотности вложения V в V получаем выполнение (21) для u. Более того, для почти всех $t\in(0,T)$ справедливо равенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2+\nu\|u(t)\|_1^2=(f,u(t)). \tag{34}$$

Из (15) получаем, что $\forall r>0$, $u_n(t)\to u(t)$ в $(L^2(\Omega_r))^3$ для почти всех $t\in(0,T)$ при $n\to\infty$. Таким образом, для всех $v\in V$, для почти всех $t\in(0,T)$: $(u_n(t),v)\to$

$\to (u(t), v)$ при $n \to \infty$. Из (32) следует равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность на $[0, T]$ последовательности функций $\{(u_n(t), v)\}_{n\geq 1}$. Поскольку $u \in C([0, T]; H)$,

$$(u_n(t), v) \to (u(t), v) \text{ при } n \to \infty, \ \forall t \in [0, T], \ \forall v \in V.$$

Из критерия слабой сходимости, в силу плотности вложения V в H, имеем

$$u_n(t) \to u(t) \text{ слабо в } H \text{ при } n \to \infty, \ \forall t \in [0, T]. \tag{35}$$

Из (35) получаем, что

$$u_n(T) = \xi_n \to \xi = u(T) \text{ слабо в } H \text{ при } n \to \infty,$$

$$u_n(0) = S(t_n - T) u_n^0 \to \xi^T = u(0) \text{ слабо в } H \text{ при } n \to \infty.$$

Обозначим $[u] = \left(\nu \|u\|_1^2 - \nu \frac{\lambda_1}{2} \|u\|^2 \right)^{1/2}$ норму в V, эквивалентную норме $\|u\|_1$ [6].

Тогда функции $\{u_n\}_{n\geq 1}$, u почти всюду на $(0, T)$ удовлетворяют равенству:

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \nu\lambda_1 \|u(t)\|^2 + 2[u(t)]^2 = 2(f, u(t)). \tag{36}$$

Применив (36) к u_n для каждого $n \geq 1$, получим

$$\|u_n(T)\|^2 = \|\xi_n\|^2 = \|u_n(0)\|^2 e^{-\nu\lambda_1 T} + 2\int_0^T e^{\nu\lambda_1 (t-T)} ((f, u_n(t)) - [u_n(t)]^2)\, dt. \tag{37}$$

Тогда из (13) следует, что

$$\liminf_{n\to\infty} \|\xi_n\|^2 + 2\int_0^T e^{\nu\lambda_1(t-T)} [u(t)]^2 dt \leq \limsup_{n\to\infty} \|u_n(0)\|^2 e^{-\nu\lambda_1 T} + 2\int_0^T e^{\nu\lambda_1(t-T)} (f, u(t)). \tag{38}$$

Применив теперь (36) к u, имеем

$$\|u(T)\|^2 = \|\xi\|^2 = \|u(0)\|^2 e^{-\nu\lambda_1 T} + 2\int_0^T e^{\nu\lambda_1(t-T)} ((f, u(t)) - [u(t)]^2)\, dt. \tag{39}$$

Из (38) и (39) получим

$$\liminf_{n\to\infty} \|\xi_n\|^2 \leq \limsup_{n\to\infty} \|u_n(0)\|^2 e^{-\nu\lambda_1 T} - \|u(0)\|^2 e^{-\nu\lambda_1 T} + \|\xi\|^2. \tag{40}$$

Из (27) следует, что для любого $T > 0$

$$\|u(0)\|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n(0)\|^2 \leq \limsup_{n\to\infty} \|u_n(0)\|^2 \leq$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \left(\|u_n^0\|^2 e^{-\nu\lambda_1(t_n - T)} + \frac{2}{\nu^2\lambda_1^2}\|f\|^2 \right) \leq \frac{2}{\nu^2\lambda_1^2}\|f\|^2 + 1.$$

Следовательно, из (40) при $T \to \infty$ получаем, что

$$\liminf_{n\to\infty} \|\xi_n\|^2 \leq \|\xi\|^2.$$

Последнее неравенство совместно со слабой сходимостью ξ_n к ξ в H гарантирует предкомпактность последовательности $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ в H.

Теорема доказана.

Замечание 1. Из результатов общей теории глобальных аттракторов [1] следует, что аттрактор $A = A(N)$, полученный в теореме 2, является связным устойчивым подмножеством в фазовом пространстве H и состоит из ограниченных полных траекторий, т.е. $\forall z \in A$, $\exists u(\cdot): R \to H : u(0) = z$,

$$\forall t \geq 0,\ \forall \tau \in \mathrm{R},\ S(t)u(\tau) = u(t+\tau).$$

Далее, поскольку $\forall N \geq 1$, $A(N) \subset B_0 = \left\{ u \in H : \|u\|^2 \leq 1 + \frac{2}{\nu^2 \lambda_1^2} \|f\|^2 \right\}$, имеем непустой w — верхний предел Куратовского для $\{A(N)\}_{N\geq 1}$:

$$\Theta = w - \limsup A(N) = \{u \in H : \exists u_{N_k} \in A(N_k),\ u_{N_k} \to u \text{ слабо при } k \to \infty \text{ в } H\}.$$

Теорема 3. Через каждую точку $u_0 \in \Theta$ проходит полная траектория 3D-системы Навье–Стокса $u(\cdot): \mathrm{R} \to H$, причем $\forall t \in \mathrm{R}$, $u(t) \in B_0$.

Доказательство. Рассмотрим любое $u_0^N \in B_0$, такое, что $u_0^N \to u_0$ слабо в H при $N \to \infty$. Покажем, что решение (2) $u_N(\cdot)$, удовлетворяющее начальному условию $u_N(0) = u_0^N$, сходится в смысле (13) к $u(\cdot) \in W_T$, где $u(\cdot)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}(u, v) + \nu (u, v)_1 + b(u, u, v) = (f, v),\ \forall v \in V, \tag{41}$$

с начальным условием

$$u(0) = u_0. \tag{42}$$

Действительно, поскольку $\forall N \geq 1$ $u_N(\cdot)$ удовлетворяет (10), (11), $0 \leq F_N(r) \leq 1$, то

$$\begin{gathered} \{u_N\}_{N\geq 1} \text{ ограничена в } W_T; \\ \left\{ \frac{du_N}{dt} \right\}_{N\geq 1} \text{ ограничена в } L^{4/3}(0, T; \mathrm{V}^*). \end{gathered} \tag{43}$$

Таким образом, существует такая $u \in W_T$, что с точностью до подпоследовательности $u_N \to u$ в смысле (13). Кроме того, из (43) следует, что $\forall v \in \mathrm{V}$, $\forall 0 \leq t < t + h \leq T$

$$\left| (u_N(t+h) - u_N(t), v) \right| \leq c_T \|v\|_1 h^{1/4};$$

$$\int_0^{T-h} \left| u_N(t+h) - u_N(t) \right|^2 dt \leq c_T h^{1/4}.$$

Отсюда получаем сходимость u_N к u в смысле (15), (16).

Для дальнейшего доказательства воспользуемся леммой.

Лемма [10]. Пусть $\int_0^T \|u_N(t)\|_1^2\,dt \le K_T$. Тогда $\forall p \ge 1$

$$F_N(\|u_N(\cdot)\|_1) \to 1 \text{ при } N \to \infty \text{ в } L^p(0,T). \tag{44}$$

Покажем, что $\forall v \in V$

$$\int_0^T b_N(u_N(t), u_N(t), v)\,dt \to \int_0^T b(u(t), u(t), v)\,dt. \tag{45}$$

Поскольку $\operatorname{supp} V \subset \Omega_r$ для некоторого $r > 0$, то в силу сходимостей (13), (15) получаем, что

$$\int_0^T b(u_N(t), u_N(t), v)\,dt \to \int_0^T b(u(t), u(t), v)\,dt, \quad N \to \infty. \tag{46}$$

Кроме того,

$$\int_0^T \left| b(u_N(t), u_N(t), v) \right|^2 dt \le \int_0^T \|u_N(t)\|^2 \|u_N(t)\|_1^2 \|v\|^2_{(L^\infty(\Omega_r))^3} \le c(T, v). \tag{47}$$

Из (44), (46), (47) и леммы получаем требуемую сходимость (45). Это позволяет перейти к пределу при $N \to \infty$ в (2) и получить в результате, что u удовлетворяет (41) для всех $v \in V$ и, таким образом, для всех $v \in \mathsf{V}$. При этом аналогично (35)

$$u_N(t) \to u(t) \text{ слабо в } H \text{ при } N \to \infty, \ \forall t \in [0, T], \tag{48}$$

в частности, $u(0) = u_0$.

Пусть $u_0 \in \Theta$. Тогда $\exists u_0^N \in A(N)\colon u_0^N \to u_0$ слабо в H. Пусть $u^N\colon \mathsf{R} \to H$ — полная траектория, для которой $u^N(0) = u_0^N$, $u^N(t) \in A(N) \subset B_0$. Воспользовавшись стандартными рассуждениями [10], на каждом конечном интервале получаем сходимость последовательности u_N к полной траектории 3D-системы Навье–Стокса $u(\cdot)\colon \mathsf{R} \to H$, $u(0) = u_0$, причем в силу (48) $\forall t \in \mathsf{R}$, $u(t) \in B_0$.

Теорема доказана.

Заключение

Таким образом, в работе изучена модифицированная система, совпадающая с 3D-системой Навье–Стокса при ограниченных градиентах скоростей, в неограниченной области, удовлетворяющей неравенству Пуанкаре. Для исследуемой задачи получена теорема о существовании и единственности решения задачи Коши (теорема 1). Для соответствующей полугруппы, определенной формулой (3), с помощью теории глобальных аттракторов бесконечномерных динамических систем доказано существование глобального аттрактора (теорема 2). Более того, показана его близость ко множеству ограниченных полных траекторий немодифицированной 3D-системы Навье–Стокса (теорема 3).

Н.В. Горбань, О.В. Капустян, О.А. Капустян, О.В. Хоменко

СИЛЬНИЙ ГЛОБАЛЬНИЙ АТРАКТОР ТРИВИМІРНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ НАВ'Є–СТОКСА В НЕОБМЕЖЕНІЙ КАНАЛОПОДІБНІЙ ОБЛАСТІ

Розглянуто модифіковану тривимірну систему Нав'є–Стокса в необмеженій області, що задовольняє нерівності Пуанкаре. Доведено однозначну глобальну розв'язність, для відповідної напівгрупи встановлено існування глобального атрактора в сильній топології фазового простору, показано збіжність одержаних атракторів до множини повних обмежених траєкторій 3D-системи Нав'є–Стокса.

N.V. Gorban, A.V. Kapustyan, E.A. Kapustyan, O.V. Khomenko

STRONG GLOBAL ATTRACTOR FOR THREE-DIMENSIONAL NAVIER–STOKES SYSTEM OF EQUATIONS IN UNBOUNDED DOMAIN OF CHANNEL TYPE

The modified three-dimensional Navier–Stokes system in unbounded domain satisfying the Poincare inequality is considered. The unique global solvability is proved, the existence of a global attractor for the corresponding semigroup in the strong topology of the phase space, is obtained the convergence of these attractors to the set of complete bounded trajectories of 3D-Navier–Stokes system is shown.

1. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. — New York : Springer, 1988. — 645 p.
2. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Attractors for equations of mathematical physics. — Rhode Island: American Mathematical Society. — 2002. — 324 p.
3. *Kapustyan O.V., Mel'nik V.S., Valero J., Yasinsky V.V.* Global attractors of multi valued dynamical systems and evolution equations without uniqueness. — Kyiv : Naukova dumka, 2008. — 215 p.
4. *Evolution* inclusions and variation inequalities for Earth data processing III: Long-time behavior of evolution inclusions solutions in Earth data analysis / M.Z. Zgurovsky, P.O. Kasyanov, O.V. Kapustyan etc. — Berlin: Springer, 2012. — **27**. — 340 p.
5. *Темам Р.* Уравнение Навье–Стокса: Теория и численный анализ. — М. : Мир, 1981. — 408 с.
6. *Rosa R.* The global attractor for the 2D Navier–Stokes flow on some unbounded domains // Nonlinear analysis. — 1998. — **32**, N 1. — P. 71–85.
7. *Kapustyan O.V., Melnik V. S., Valero J.* A weak attractor and properties of solutions for the three-dimensional Benard problem // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2007. — **18**, N 2, 3. — P. 449–481.
8. *Kapustyan O.V., Valero J.* Weak and strong attractors for the 3D Navier–Stokes system // Journal of Differential Equations. — 2007. — **240**, N 2. — P. 249–278.
9. *Cheskidov A., Foias C.* On global attractors of the 3D Navier–Stokes equations // Ibid. — 2006. — **231**. — P. 714–754.
10. *Caraballo T., Kloeden P.E., Real J.* Unique strong solution and *V*-attractor of a three-dimensional system of globally modified Navier–Stokes equation // Advanced Nonlinear Studies. — 2006. — **6**. — P. 411–436.
11. *Romito M.* The uniquiness of weak solutions of the globally modified Navier–Stokes equations // Advanced Nonlinear Studies. — 2009. — **9**. — P. 425–427.
12. *Kapustyan O.V., Pankov A.V.* Global φ-attractor for a modified 3D Benard system on channel-like domains // Nonautonomous dynamical systems. — 2014. — **1**. — P. 1–9.

Получено 12.05.2015

Статья представлена к публикации членом редколлегии акад. НАН Украины М.З. Згуровским.