УДК 517.95:519.86

В.А. Стоян

О НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ ПРОСТРАНСТВЕННО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

Введение. Вопросы корректной постановки и решения задач исследования динамики распределенных пространственно-временных процессов являются сложными и актуальными. Сложность проблем увеличивается при решении задач управления такими процессами. Предложенный в [1] и обобщенный в [2, 3] подход позволяет решить эти задачи по среднеквадратическому критерию. Важно, что решения при этом строятся без ограничений на количество и качество наблюдений за начально-краевым состоянием процесса, которые при решении задачи удовлетворяются тоже среднеквадратически. Ниже на основе математических результатов [2, 3] предлагаются решения задач управления распределенным пространственно-временным процессом по достижении его функцией состояния дискретно и непрерывно заданных значений. Управляющими факторами при этом выступают дискретно и непрерывно распределенные внешнединамические факторы, начальное и краевое состояние процесса, как отдельно, так и при их различных комбинациях. Описываются особенности реализации математических решений сформулированных задач в частично ограниченных и неограниченных пространственно-временных областях.

Постановка задачи. Рассмотрим пространственно-временной процесс, функция $y(s)$ состояния которого в пространственно-временной области

$$S_0^T = \{s = (x, t) : x \in S_0 \subset R^n, 0 \le t \le T\}, \tag{1}$$

пространственно ограниченной контуром Γ, определяется уравнением

$$L(\partial_s)\, y(s) = u(s) \quad (s \in S_0^T), \tag{2}$$

где $L(\partial_s)$ — линейный дифференциальный оператор, $\partial_s = (\partial_x, \partial_t) = (\partial_{x_1}, \dots$ $\dots, \partial_{x_n}, \partial_t)$, $u(s)$ — функция распределенных внешнединамических возмущений, которые этот процесс сопровождают.

Обозначим $Y_\rho^0(x)$ $(x \in S \subset S_0,\ r = \overline{1, R_0})$ и $Y_\rho^\Gamma(s)$ $(x \in \Gamma \subset \Gamma_0,\ t \in [0, T],$ $\rho = \overline{1, R_\Gamma})$ начальные (при $t = 0$) и краевые (на контуре Γ) возмущения, которые дополнительно влияют на динамику процесса. Предположим, что известны линейные дифференциальные операторы $L_r^0(\partial_t)$ и $L_\rho^\Gamma(\partial_x)$, такие, что:

$$Y_r^0(x) = L_r^0(\partial_t)(s)\big|_{t=0},\ x \in S, \tag{3}$$

$$Y_\rho^\Gamma(s) = L_\rho^\Gamma(\partial_x)\, y(s),\ s \in \Gamma \times [0, T]. \tag{4}$$

Рассмотрим случай, когда некоторые из функций $u(s)$, $Y_r^0(x)$ $(r=\overline{1,R_0})$, $Y_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ известны, а остальные подлежат определению из условия, чтобы

$$\sum_{i=1}^{I}\int_{S_i}(L_i(\partial_s)\,y(s)-Y_i(s))^2\,ds\to\min_{y(s)}, \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{I}\int_{X_i}(L_i(\partial_s)\,y(s)\big|_{t=t_i}-Y_i(x))^2\,dx\to\min_{y(s)}, \qquad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{I}\int_{0}^{T}(L_i(\partial_s)\,y(s)\big|_{x=x_i}-Y_i(t))^2\,dt\to\min_{y(s)}, \qquad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{I}(L_i(\partial_s)\,y(s)\big|_{s=s_i}-Y_i)^2\,dt\to\min_{y(s)}, \qquad (8)$$

при $t_i\in[0,T]$, $x_i\in X_i\subset S_0$, $s_i\in S_i\subset S_0^T$.

Как и в [2, 3], функцию $y(s)$ состояния процесса в ограниченной пространственно-временной области S_0^T представим соотношением

$$y(s)=y_\infty(s)+y_0(s)+y_\Gamma(s), \qquad (9)$$

в котором при определенной согласно (2) на $S^0=S_0\times(-\infty,0]$, $S^\Gamma=(R^n\setminus S_0)\times$ $\times[0,T]$ функции $G(s-s')$ [4]

$$y_\infty(s)=\int_{S_0^T}G(s-s')\,u(s')\,ds', \qquad (10)$$

$$y_0(s)=\int_{S^0}G(s-s')\,u_0(s')\,ds', \qquad (11)$$

$$y_\Gamma(s)=\int_{S^\Gamma}G(s-s')\,u_\Gamma(s')\,ds'. \qquad (12)$$

Здесь и далее $u_0(s), u_\Gamma(s)$ — функции, с помощью которых по среднеквадратическому критерию моделируются известные начальные и краевые внешнединамические возмущения. Эти функции, как и составляющие $y_0(s)$ и $y_\Gamma(s)$, которые через них определяются, будут отсутствовать, если нет ограничений по временному интервалу $(t\in(-\infty,T])$ и размеру пространственной области $(x\in R^n)$.

Задачи управления с дискретно определенным желаемым состоянием. Основываясь на результатах работ [2, 3], приведем решения задачи (8) по достижении функцией $y(s)$ состояния процесса дискретно определенных значений Y_i $(i=\overline{1,I})$ для различных пространственно-временных областей и различных комбинаций управляющих внешнединамических факторов.

Задача 1. Управление процессом (2)–(4) по достижении согласно (8) значений Y_i $(i=\overline{1,I})$ выполняется функцией $u(s)$ при известных начально-краевых возмущениях $Y_{rl}^0=Y_r^0(x_l^0)$ $(x_l^0\in S_0)$, $(r=\overline{1,R_0},\ l=\overline{1,L_0})$, $Y_{\rho l}^\Gamma=Y_\rho^\Gamma(s_l^\Gamma)$ $(s_l^\Gamma\in\Gamma\times[0,T])$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma},\ l=\overline{1,L_\Gamma})$.

Определенная согласно (8) динамика процесса описывается соотношениями (9)–(12), в которых вектор-функция управляюще-моделирующих факторов

$$\bar{u}(s) = \mathrm{col}(u(s)(s \in S_0^T),\ u_0(s)(s \in S^0),\ u_\Gamma(s)(s \in S^\Gamma)) \tag{13}$$

определяется из условия

$$\Phi_1 = \Phi_{10} + \Phi_{1\Gamma} + \Phi_{1*} \to \min_{y(s)}$$

при

$$\Phi_{10} = \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} \left(L_r^0(\partial_t y(s) \Big|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0}} - Y_{rl}^0 \right)^2,$$

$$\Phi_{1\Gamma} = \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} (L_\rho^\Gamma(\partial_x)\, y(s)\big|_{s=s_l^\Gamma} - Y_{\rho l}^\Gamma)^2,$$

$$\Phi_{1*} = \sum_{i=1}^{I} (L_i(\partial_s)\, y(s)\big|_{s=s_i} - Y_i)^2$$

в результате среднеквадратического обращения системы интегральных уравнений

$$\int\limits_{(\bullet)} A(s)\bar{u}(s)\, ds = Y \tag{14}$$

(здесь и далее знаком $(\bullet)$ обозначено интегрирование по области изменения аргумента s),

$$Y = \begin{pmatrix} Y^* \\ Y^0 \\ Y^\Gamma \end{pmatrix};\ A(s) = \begin{pmatrix} A_{11}(s)\ (s \in S_0^T) & A_{12}(s)\ (s \in S^0) & A_{13}(s)\ (s \in S^\Gamma) \\ A_{21}(s)\ (s \in S_0^T) & A_{22}(s)\ (s \in S^0) & A_{23}(s)\ (s \in S^\Gamma) \\ A_{31}(s)\ (s \in S_0^T) & A_{32}(s)\ (s \in S^0) & A_{33}(s)\ (s \in S^\Gamma) \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$Y^* = \mathrm{col}(Y_i,\ i = \overline{1, I}),$$

$$Y^0 = \mathrm{col}((Y_{rl}^0,\ l = \overline{1, L_0}),\ r = \overline{1, R_0}), \tag{16}$$

$$Y^\Gamma = \mathrm{col}((Y_{\rho l}^\Gamma,\ l = \overline{1, L_\Gamma}),\ \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$A_{1i}(s') = \mathrm{col}(L_i(\partial_s)\, G(s - s')\big|_{s = s_i},\ i = \overline{1, I}),$$

$$A_{2i}(s') = \mathrm{col}((L_r^0(\partial_t)\, G(s - s')\Big|_{\substack{x=x_l^0 \\ t=0}},\ l = \overline{1, L_0}),\ r = \overline{1, R_0}), \tag{17}$$

$$A_{3i}(s') = \mathrm{col}((L_\rho^\Gamma(\partial_x)\, G(s - s')\Big|_{s=s_l^\Gamma},\ l = \overline{1, L_\Gamma}),\ \rho = \overline{1, R_\Gamma})$$

($s' \in S_0^T$ при $i = 1,\ s' \in S_0$ при $i = 2,\ s' \in \Gamma \times [0, T]$ при $i = 3$).

Решением системы (14), таким, что

$$\left\| \int\limits_{(\bullet)} A(s)\bar{u}(s)\, ds - Y \right\|^2 \to \min_{\bar{u}(s)},$$

будет [2, 3]

 ISSN 0572-2691

$$\bar{u}(s) = A^{\mathrm{T}}(s)\, P_1^{+}(Y + A_{\upsilon}) + \bar{\upsilon}(s), \tag{18}$$

где при произвольных интегрируемых в S_0^T, S^0 и S^Γ функциях и $v_\Gamma(s)$

$$\bar{v}(s) = \mathrm{col}(v(s)(s \in S_0^T),\, v_0(s)(s \in S^0),\, v_\Gamma(s)(s \in S^\Gamma)),$$

$$A_v = \int\limits_{(\bullet)} A(s)\,\bar{v}(s)\,ds,$$

а знаком «+» обозначена операция псевдообращения матрицы

$$P_1 = \int\limits_{(\bullet)} A_1(s) A^{\mathrm{T}}(s)\,ds.$$

При этом $\min\limits_{y(s)} \Phi_1 = \min\limits_{\bar{u}(s)} \Phi_1 = \varepsilon_1^2$, а

$$\varepsilon_1^2 = Y^{\mathrm{T}} Y - Y^{\mathrm{T}} P_1 P_1^{+} Y. \tag{19}$$

Задача 2. Управляющим фактором при решении задачи (8) для системы (2)–(4) являются функции $Y_r^0(x)$ $(r = \overline{1, R_0})$ начальных возмущений. Функции $u(s)$ и $Y_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho = \overline{1, R_\Gamma})$ известны.

Решение задачи получим согласно (3) при $y(s)$, определенном соотношениями (9)–(12), (18), в которых

$$Y = \begin{pmatrix} \bar{Y}^* \\ \bar{Y}^\Gamma \end{pmatrix}, \quad A(s) = \begin{pmatrix} A_{12}(s) & A_{13}(s) \\ A_{32}(s) & A_{33}(s) \end{pmatrix}, \tag{20}$$

а

$$\bar{Y}^* = \mathrm{col}((Y_i - L_i(\partial_s)\, y_\infty(s)\big|_{s = s_i}),\ i = \overline{1, I}),$$

$$\bar{Y}^\Gamma = \mathrm{col}(((Y_\rho^\Gamma(s_l^\Gamma) - L_\rho^\Gamma(\partial_x)\, y_\infty(s)\Big|_{s = s_i^\Gamma}),\ l = \overline{1, L_\Gamma}),\ \rho = \overline{1, R_\Gamma}).$$

При этом точность решения оценивается величиной

$$\min_{y(s)} (\Phi_{1\Gamma} + \Phi_{1*}) = \min_{Y_r^0(x)\ (r = \overline{1, R_0})} (\Phi_{1\Gamma} + \Phi_{1*}) = \varepsilon_1^2. \tag{21}$$

Задача 3. Аналогично находится и решение задачи (8) для системы (2)–(4) в случае, когда при известных $u(s)$ и $Y_r^0(x)$ $(r = \overline{1, R_0})$ управляющим фактором является $Y_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho = \overline{1, R_\Gamma})$.

Управляющие краевые внешнединамические возмущения $Y_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho = \overline{1, R_\Gamma})$ находятся согласно (4), (9)–(12), (18), однако, в отличие от (20),

$$Y = \begin{pmatrix} \bar{Y}^* \\ \bar{Y}^0 \end{pmatrix}, \quad A(s) = \begin{pmatrix} A_{12}(s) & A_{13}(s) \\ A_{22}(s) & A_{23}(s) \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$\bar{Y}^0 = \mathrm{col}\left(((Y_r^0(x_l^0) - L_r^0(\partial_t)\, y_\infty(s)\Bigg|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0}}\right),\ l = \overline{1, L_0}),\ r = \overline{1, R_0}).$$

С учетом этих изменений величиной

$$\varepsilon_1^2 = \min_{y(s)} (\Phi_{10} + \Phi_{1*}) = \min_{Y_\rho^\Gamma(x,t)\ (\rho=\overline{1,R_\Gamma})} (\Phi_{10} + \Phi_{1*})$$

определяется и точность полученного решения.

Задача 4. С точностью

$$\varepsilon_1^2 = \min_{y(s)} \Phi_{1*} = \min_{\substack{Y_r^0(x)(r=\overline{1,R_0}) \\ Y_\rho^\Gamma(x,t)(\rho=\overline{1,R_\Gamma})}} \quad \Phi_{1*} = Y^{\mathrm{T}} Y - Y^{\mathrm{T}} P_1 P_1^{+} Y$$

соотношениями (3), (4), (9)–(12), (18) решается задача (8) и при известной функции $u(s)$ и управляющих начально-краевых возмущениях. Однако при этом

$$Y = \overline{Y}^*, \ \ A(s) = (A_{12}(s)\ \ A_{13}(s)). \tag{23}$$

Задача 5. Управление рассматриваемым процессом по достижении его функцией состояния значений $Y_i \ \ (i = \overline{1, I})$ выполняется начальными и распределенными в S_0^T возмущениями. Определенное согласно (8) управление $u(s)$ найдем из (18), полагая

$$Y = \begin{pmatrix} Y^* \\ Y^0 \end{pmatrix}, \ \ A(s) = \begin{pmatrix} A_{11}(s)\ \ A_{12}(s)\ \ A_{13}(s) \\ A_{31}(s)\ \ A_{32}(s)\ \ A_{33}(s) \end{pmatrix}. \tag{24}$$

С учетом записанных соотношением (18) $u_0(s)$ и $u_\Gamma(s)$ из (3), (9)–(12) найдем и выражения для управляющих функций $Y_r^0(x) \ \ (r = \overline{1, R_0})$. Как и ранее, определенное согласно (8) среднеквадратическое отклонение найденного решения от желаемого определяется величиной ε_1^2, записанной с учетом принятых в (24) обозначений.

Задача 6. Аналогично решается рассматриваемая задача и для случая, когда управление выполняется совместным действием распределенных в S_0^T и сосредоточенных на контуре пространственной области управляющих факторов $u(s)$ и $Y_\rho^\Gamma(s)$ соответственно. В этом случае при

$$Y = \begin{pmatrix} Y^* \\ Y^0 \end{pmatrix}, \ \ A(s) = \begin{pmatrix} A_{11}(s)\ \ A_{12}(s)\ \ A_{13}(s) \\ A_{21}(s)\ \ A_{22}(s)\ \ A_{23}(s) \end{pmatrix} \tag{25}$$

из (18) определим управления $u(s)$ и моделирующие функции $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$. С учетом соотношений (4), (9)–(12) найдем функции $Y_\rho^\Gamma(s)$, а с учетом (25) легко запишем и определенную выше величину ε_1^2.

Задача 7. Рассмотрим случай, когда управляющими факторами при решении задачи (8) являются все внешнединамические факторы — начальные, краевые и распределенные пространственно-временные возмущения. Вектор управляюще-моделирующих функций $u(s)$, $u_0(s)$ и $u_\Gamma(s)$ найдем из (18) при

$$Y = \overline{Y}^*, \ \ A(s) = (A_{11}(s)\ \ A_{12}(s)\ \ A_{13}(s)). \tag{26}$$

Функции $Y_r^0(x)$ $(r=\overline{1, R_0})$ и $Y_\rho^\Gamma(s)$ $\rho=(\overline{1, R_\Gamma})$ найдем из (3), (4) с учетом (9)–(12).

При определенных согласно (26) векторе Y и матричной функции $A(s)$ величиной ε_1^2 оценим и точность решения задачи.

Заметим, что решения рассмотренных выше задач будут иметь место как в условиях неограниченности пространственной области S_0, так и при установившемся характере динамического процесса (временной интервал не ограничен слева). В первом случае отсутствуют моделирующая функция $u_\Gamma(s)$ и блоки $A_{3i}(s)$ $(i=\overline{1, 3})$ в выражениях (15), (20), (24) для матричной функции $A(s)$. Аналогично и для второго случая. Здесь будут отсутствовать моделирующая функция $u_0(s)$ и блоки $A_{2i}(s)$ $(i=\overline{1, 3})$ в выражениях (15), (22) и (25) для матричной функции $A(s)$.

Задачи управления при непрерывно определенном желаемом состоянии. Остановимся на постановке и результатах решения задачи (5) [2, 3] (на задачах (6) и (7) останавливаться не будем — это частные случаи задачи (5)) по управлению системой (2) с целью получения функцией $y(s)$ состояния системы значений, среднеквадратически близких к функциям $Y_i(s)$ $(i=\overline{1, I})$. В отличие от рассмотренного выше, непрерывно определенными будем считать начально-краевые внешнединамические возмущения $Y_r^0(x)$ $(r=\overline{1, R_0})$ и $Y_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1, R_\Gamma})$ в задачах, где они принимаются во внимание. Моделирование этих возмущений выполняется векторами

$$u^0=\operatorname{col}(u_m^0=u_0(s_m^0), m=\overline{1, M_0}) \quad (s_m^0\in S^0)$$

и

$$u^\Gamma=\operatorname{col}(u_m^\Gamma=u_\Gamma(s_m^\Gamma), m=\overline{1, M_\Gamma}) \quad (s_m^\Gamma\in S^\Gamma)$$

значений моделирующих функций $u_0(s)$ и $u_\Gamma(s)$. Вектором

$$u^*=\operatorname{col}(u_m=u(s_m), m=\overline{1, M}) \quad (s_m\in S_0^T)$$

определяется распределенное внешнединамическое возмущение $u(s)$ для случаев, когда оно является управляющим.

С учетом этого составляющие $y_\infty(s)$, $y_0(s)$ и $y_\Gamma(s)$ в представлении (9) функции $y(s)$ системы (2) запишем в виде

$$y_0(s)=\sum_{m=1}^{M_0} G(s-s_m^0)u_m^0, \tag{27}$$

$$y_\Gamma(s)=\sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(s-s_m^\Gamma)u_m^\Gamma, \tag{28}$$

$$y_\infty(s)=\sum_{m=1}^{M} G(s-s_m)u_m \tag{29}$$

(для случая, когда функция $u(s)$ управляющая).

Приведем решения задачи (5) [2, 3] для системы (2)–(4) при различных комбинациях управляющих факторов.

Задача 8. Задача (5) по среднеквадратическому приближению функции $L_i(\partial_s)\,y(s)$ к функции $Y_i(s)$ $(i = \overline{1, I})$ решается при известных начально-краевых возмущениях $Y_r^0(x)$ $(r = \overline{1, R_0})$, $Y_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho = \overline{1, R_\Gamma})$ с управляющим вектором u^*.

Вектор

$$\bar{u} = \mathrm{col}(u^*, u^0, u^\Gamma)$$

значений управляюще-моделирующих функций $u(s)$, $u_0(s)$ и $u_\Gamma(s)$, через который соотношениями (9), (27)–(29) определяется состояние $y(s)$ системы, найдем из условия

$$\Phi_2 = \Phi_{20} + \Phi_{2\Gamma} + \Phi_{2*} \to \min_{y(s)} \tag{30}$$

при

$$\Phi_{20} = \sum_{r=1}^{R_0} \int_S (L_r^0(\partial_t)\,y(s)\Big|_{t=0} - Y_r^0(x))^2\,dx,$$

$$\Phi_{2\Gamma} = \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\Gamma\times[0,T]} (L_\rho^\Gamma(\partial_x)\,y(s) - Y_\rho^\Gamma(s))^2\,ds,$$

$$\Phi_{2*} = \sum_{i=1}^{\overset{\bullet}{I}} \int_{S_0^T} (L_i(\partial_s)\,y(s) - Y_i(s))^2\,ds$$

или, что эквивалентно [2, 3],

$$\sum_{i=1}^{I} \left\| \int_{(\bullet)} (B(s)\bar{u} - Y(s))\,ds \right\|^2 \to \min_{\bar{u}}. \tag{31}$$

Как и выше, интегрирование в (30) выполняется по области изменения аргумента s в векторной и матричной функциях $Y(s)$ и $B(s)$, определяемых соотношениями

$$Y(s) = \begin{pmatrix} Y^*(s) & (s \in S_0^T) \\ Y^0(x) & (x \in S_0) \\ Y^\Gamma(s) & (s \in \Gamma\times[0, T]) \end{pmatrix}, \quad B(s) = \begin{pmatrix} (B_{1i}(s) & s \in S_0^T), & i = \overline{1, 3} \\ (B_{2i}(x) & x \in S_0), & i = \overline{1, 3} \\ (B_{3i}(s) & s \in \Gamma\times[0,T]), & i = \overline{1, 3} \end{pmatrix}, \tag{32}$$

в которых

$$Y^*(s) = \mathrm{col}(Y_i(s), i = \overline{1, I}),$$

$$Y^0(x) = \mathrm{col}(Y_r^0(x), r = \overline{1, R_0}), \tag{33}$$

$$Y^\Gamma(s) = \mathrm{col}(Y_\rho^\Gamma(x, t), \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$B_{11}(s) = \mathrm{col}(\mathrm{str}(L_i(\partial_s)\,G(s - s_m), m = \overline{1, M}), i = \overline{1, I}),$$

$$B_{12}(s) = \mathrm{col}(\mathrm{str}(L_i(\partial_s)\,G(s - s_m^0), m = \overline{1, M_0}), i = \overline{1, I}),$$

$$B_{13}(s) = \mathrm{col}(\mathrm{str}(L_i(\partial_s)\,G(s - s_m^\Gamma), m = \overline{1, M_\Gamma}), i = \overline{1, I}),$$

$$B_{21}(x) = \mathrm{col}(\mathrm{str}(L_r^0(\partial_t)\, G(s - s_m)\big|_{t=0},\ m = \overline{1, M}),\ r = \overline{1, R_0}),$$

$$B_{22}(x) = \mathrm{col}(\mathrm{str}(L_r^0(\partial_t)\, G(s - s_m^0)\big|_{t=0},\ m = \overline{1, M_0}),\ r = \overline{1, R_0}), \tag{34}$$

$$B_{23}(x) = \mathrm{col}(\mathrm{str}(L_r^0(\partial_t)\, G(s - s_m^\Gamma\big|_{t=0},\ m = \overline{1, M_\Gamma}),\ r = \overline{1, R_0}),$$

$$B_{31}(s) = \mathrm{col}(\mathrm{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)\, G(s - s_m),\ m = \overline{1, M}),\ \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$B_{32}(s) = \mathrm{col}(\mathrm{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)\, G(s - s_m^0),\ m = \overline{1, M_0}),\ \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$B_{33}(s) = \mathrm{col}(\mathrm{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)\, G(s - s_m^\Gamma),\ m = \overline{1, M_\Gamma}),\ \rho = \overline{1, R_\Gamma}).$$

Решением задачи (31) будет [2, 3]

$$\bar{u} = P_2^+ B_Y + \bar{v} - P_2^+ P_2 \bar{v}, \tag{35}$$

где при произвольных $v \in R^M$, $v_0 \in R^{M_0}$, $v_\Gamma \in R^{M_\Gamma}$

$$\bar{v} = \mathrm{col}(v, v_0, v_\Gamma),$$

$$P_2 = \int B^{\mathrm{T}}(s)\, B(s)\, ds,$$

$$B_Y = \int B^{\mathrm{T}}(s)\, Y(s)\, ds.$$

Здесь, как и выше, знаком «+» обозначена операция псевдообращения матрицы. При этом

$$\min_{\bar{u}} \Phi_2 = \int_{(\bullet)} Y^{\mathrm{T}}(s)\, Y(s)\, ds - B_Y^{\mathrm{T}} P_2^+ B_Y = \varepsilon_2^2. \tag{36}$$

Задача 9. Среднеквадратическое согласно (5) приближение функции $L_i(\partial_s)\, y(s)$ к функции $Y_i(s)$ $(i = \overline{1, I})$ выполняется начальными возмущениями $Y_r^0(x)$ при известных краевых и распределенных внешнединамических возмущениях $Y_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho = \overline{1, R_\Gamma})$ и $u(s)$ соответственно. Управляющие функции $Y_r^0(x)$ $(r = \overline{1, R_0})$ получим из (3) при $y(s)$, определенном соотношениями (9), (10), (27), (28), в которых

$$Y(s) = \begin{pmatrix} \bar{Y}^*(s) \\ \bar{Y}^\Gamma(s) \end{pmatrix}, \quad B(s) = \begin{pmatrix} B_{12}(s) & B_{13}(s) \\ B_{32}(s) & B_{33}(s) \end{pmatrix}, \tag{37}$$

$$\bar{Y}^*(s) = \mathrm{col}(Y_i(s) - L_i(\partial_s)\, y_\infty(s)) \quad (i = \overline{1, I}),$$

$$\bar{Y}^\Gamma(s) = \mathrm{col}(Y_\rho^\Gamma(s) - L_\rho^\Gamma(\partial_x)\, y_\infty(s)) \quad (\rho = \overline{1, R_\Gamma}).$$

Точность решения задачи определяется величиной

$$\varepsilon_2^2 = \min_{y(s)} (\Phi_{2\Gamma} + \Phi_{2*}) = \min_{Y_r^0(x)\ (r = \overline{1, R_0})} (\Phi_{2\Gamma} + \Phi_{2*}). \tag{38}$$

Задача 10. Задача (5) решается при известных $Y_r^0(x)$ $(r=\overline{1,R_0})$, $u(s)$ и управляющих $Y_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$. Искомые $Y_\rho^\Gamma(s)$ найдем из (4), (9), (10), (27), (28), полагая

$$Y(s)=\begin{pmatrix}\overline{Y}^*(s)\\ \overline{Y}^0(x)\end{pmatrix},\quad B(s)=\begin{pmatrix}B_{12}(s) & B_{13}(s)\\ B_{22}(x) & B_{23}(x)\end{pmatrix}, \tag{39}$$

$$\overline{Y}^0(x)=\mathrm{col}((Y_r^0(x)-L_r^0(\partial_t)\,y_\infty(s))\Big|_{t=0})\ \ (r=\overline{1,R_0}).$$

При этом

$$\min_{y(s)}(\Phi_{20}+\Phi_{2*})=\min_{Y_\rho^\Gamma(x,t)(\rho=\overline{1,R_\Gamma})}(\Phi_{20}+\Phi_{2*})=\varepsilon_2^2,$$

где ε_2^2 определено в (36).

Задача 11. При известной функции $u(s)$ и управляющих начально-краевых возмущениях $Y_r^0(x)$ $(r=\overline{1,R_0})$ и $Y_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ определенное согласно (9), (10), (27), (28) состояние системы будет решением задачи (5), если $Y_r^0(x)$ $(r=\overline{1,R_0})$ и $Y_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ определить соотношениями (3), (4), (9), (10), (27), (28), в которых

$$Y(s)=\overline{Y}^*(s),\ \ B(s)=(B_{12}(s),\,B_{13}(s)). \tag{40}$$

Как и выше, при этом $\varepsilon_2^2=\min\limits_{y(s)}\Phi_{2*}=\min\limits_{\substack{Y_r^0(x)\,(r=\overline{1,R_0})\\ Y_\rho^\Gamma(x,t)\,(\rho=\overline{1,R_\Gamma})}}\Phi_{2*}$.

Задача 12. Рассмотрим случай, когда задача (5) решается при известных краевых возмущениях. Управляющий вектор u^* и моделирующие векторы u^0, u^Γ найдем из (34), полагая

$$Y(s)=\begin{pmatrix}\overline{Y}^-(s)\\ \overline{Y}^\Gamma(s)\end{pmatrix},\quad B(s)=\begin{pmatrix}B_{11}(s) & B_{12}(s) & B_{13}(s)\\ B_{31}(s) & B_{32}(s) & B_{33}(s)\end{pmatrix}. \tag{41}$$

Соответствующие этим векторам управляющие начальные возмущения определяются соотношениями (3) с учетом (9), (27)–(29). Подстановкой (41) в (36) найдем и точность решения задачи ε_2^2.

Задача 13. Аналогично решается и задача управления рассматриваемым процессом при известных начальных возмущениях. Здесь, как и выше, управляюще-моделирующий вектор $\overline{u}$ определяется согласно (35) при

$$Y(s)=\begin{pmatrix}\overline{Y}^*(s)\\ \overline{Y}^0(x)\end{pmatrix},\quad B(s)=\begin{pmatrix}B_{11}(s) & B_{12}(s) & B_{13}(s)\\ B_{21}(x) & B_{22}(x) & B_{23}(x)\end{pmatrix}. \tag{42}$$

С учетом (35) и (42) соотношением (4) определим и управляющие функции $Y_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$. Подстановкой (42) в (36) найдем ε_2^2.

 ISSN 0572-2691

Задача 14. Для случая, когда при решении задачи (5) все внешнединамические факторы являются управляющими, вектор u^* найдем из (35), а функции $Y_r^0(x)$ $(\rho = \overline{1, R_0})$ и $Y_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho = \overline{1, R_\Gamma})$ — из (3), (4), полагая при этом

$$Y(s) = Y^*(s); \; B(s) = (B_{11}(s), B_{12}(s), B_{13}(s)). \qquad (43)$$

С учетом (43) соотношением (36) определим и величину ε_2^2.

Заметим, что, как и при решении задач 1–7, расчетные формулы упрощаются в случае неограниченности пространственной и временной областей. Если нет ограничений на пространственную область, в расчетных соотношениях отсутствуют моделирующий вектор u^Γ и блоки $B_{3i}(s)$ $(i = \overline{1, 3})$. Если не введены начальные условия, отсутствуют вектор u^0, который их моделирует, и блоки $B_{2i}(x)$ в выражениях для матричных функций $B(s)$.

Однозначность решения задачи (5) для системы (2)–(4) вытекает из однозначности $(\overline{\upsilon} \equiv 0)$ решения задачи (31). Условием же этого будет $\det P_2 > 0$.

Заключение. Резюмируя изложенное выше, скажем, что закончено исследование проблем управления динамикой распределенного в заданной пространственной области динамического процесса, физическая природа которого описана линейной дифференциальной математической моделью, допускающей заданное количество внешнединамических наблюдений за ним. Предполагается, что эти наблюдения являются линейными преобразованиями функции состояния процесса, которая фиксируется непрерывно или дискретно в части пространственной области, ее контура и временного интервала, на котором процесс рассматривается. Количество таких наблюдений, а также области и точки, в которых они выполняются, не связаны с дифференциальным порядком математической модели процесса. Поставлены и решены задачи управления любой из допустимых комбинаций внешнединамических возмущающих факторов, которая по среднеквадратическому критерию выводит функцию состояния процесса в окрестности значений, заданных непрерывно или дискретно в рассматриваемой пространственно-временной области. Постановки задач носят практически направленный характер, а их количество позволяет удовлетворить любому исследователю-прикладнику.

Для решения задач использован классический аппарат линейной псевдоинверсной алгебры и его обобщения, полученные в предыдущих публикациях автора. В силу этого конечные математические результаты по решению поставленных задач оказались простыми и доступными для инженерных приложений. Для каждой из таких задач определена среднеквадратическая точность, с которой точное аналитическое решение математической модели процесса согласуется с пространственно-временными наблюдениями за ним. Рассмотренные примеры проиллюстрировали, что предложенная методика решения практически важных но некорректно сформулированных задач дает положительные результаты по решению задач управления пространственно распределенным динамическим процессом даже при минимальном количестве информации о начально-краевых наблюдениях за ним.

В.А. Стоян

ПРО ДЕЯКІ РЕЗУЛЬТАТИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ КЕРУВАННЯ ДИНАМІКОЮ ПРОСТОРОВО РОЗПОДІЛЕНИХ ПРОЦЕСІВ

Поставлено і розв'язано задачі керування просторово розподіленим динамічним процесом, описаним лінійною диференціальною моделлю. Вимагається, щоб розв'язок цієї моделі за середньоквадратичним критерієм узгоджувався з неперервно та дискретно визначеними спостереженнями за початково-крайовим станом процесу. За цим же критерієм стан системи виводиться в окіл бажаного. Розглянуто випадки керування довільною комбінацією початкового, крайового та розподіленого зовнішньодинамічних збурюючих факторів. Дано оцінку точності отриманих розв'язків, виписано умови їх однозначності.

V.A. Stoyan

SOME RESULTS ON THE MATHEMATICAL MODELING OF PROBLEMS SOLUTIONS OF DYNAMICS OF SPATIALLY DISTRIBUTED PROCESSES CONTROL

Problems of control of spatially distributed dynamic process, described by linear differential model are set and solved. The solution of this model for mean square criterion is to be consistent with continuous and discrete definite observations of the initial-boundary state of the process. The same criterion system state is displayed in the vicinity of the desired area. The cases of control of arbitrary combination of the initial, boundary and distributed outer dynamical perturbing factors are considered. The assessment of solutions accuracy is made and conditions of their uniqueness are formulated.

1. *Стоян В.А.* Об одном подходе к исследованию начально-краевых задач матфизики // Проблемы управления и информатики. — 1998. — № 1. — С. 79–86.
2. *Скопецький В.В., Стоян В.А., Зваридчук В.Б.* Математичне моделювання динаміки розподілених просторово-часових процесів. — Київ : Сталь, 2008. — 316 с.
3. *Стоян В.А.* Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем. — Київ : ВПЦ «Київський університет», 2011. — 320 с.
4. *Стоян В.А., Двірничук К.В.* До побудови інтегрального еквіваленту лінійних диференціальних моделей // Доп. НАН України. — 2012. — № 9. — С. 36–43.

Получено 20.05.2015

Статья представлена к публикации членом редколлегии доктором техн. наук Ф.Г. Гаращенко.