УДК 519.872

Н.Ю. Кузнецов, И.Н. Кузнецов

ОЦЕНКА СТАЦИОНАРНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ $GI/G/\infty$ МЕТОДОМ СУЩЕСТВЕННОЙ ВЫБОРКИ

Введение

В последнее десятилетие наблюдается стремительное развитие и внедрение различных телекоммуникационных сетей. Этому в значительной степени способствуют современные достижения информационных технологий. Перед разработчиками стоят как задача создания надежно функционирующих сетей, так и всевозможные оптимизационные задачи, связанные, в частности, с минимизацией вероятности потери поступающих заявок. Успешное решение этих задач связано, прежде всего, с построением адекватных моделей и разработкой численных методов, позволяющих с высокой точностью оценивать показатели эффективности систем. Традиционный путь построения моделей основан на теории массового обслуживания. Если входящие потоки заявок считать пуассоновскими, то в некоторых наиболее простых случаях стационарные вероятности состояний системы находятся с помощью формул Эрланга (или соответствующих аналогов). Однако для подавляющего большинства моделей не удается найти аналитические формулы для оценки показателей эффективности систем. Поэтому основной упор сделан на приближенные методы расчета.

Значительная часть работ сосредоточена на исследовании систем массового обслуживания в условиях малой загрузки [1–8]. При этом сочетание регенеративного метода с методом малого параметра позволяет строить асимптотические оценки как для стационарных, так и нестационарных характеристик. В современных телекоммуникационных системах интенсивности входящих потоков весьма высоки (высокая загрузка) [9, 10]. Поскольку стационарная вероятность отсутствия требований в системе крайне мала, применение регенеративного подхода принципиально невозможно. В этом случае для стационарного распределения количества требований в системе строят гауссовскую аппроксимацию [11, 12] (нестационарные характеристики особого интереса не представляют).

Моделирование системы $GI/G/\infty$ методом Монте-Карло (для сбора статистики) и последующее использование χ^2-критерия показали, что при увеличении загрузки (отношение среднего времени обслуживания к средней длине промежутка между поступающими требованиями) стационарное распределение количества требований в системе действительно стремится к нормальному. Однако данную гипотезу нормальности можно принять лишь при весьма значительной загрузке (несколько сотен). Если же загрузка меньше ста, то во всех рассмотренных случаях гипотезу следует отвергнуть. Кроме того, аппроксимация нормальным распределением дает еще бóльшую погрешность, если оценивается малая вероятность превышения большого уровня (именно данная вероятность представляет наибольший практический интерес).

Моделирование методом Монте-Карло также обладает ограниченной областью применения, поскольку трудоемкость метода обратно пропорциональна оцениваемой вероятности. В последние годы интенсивно развиваются специальные методы Монте-Карло, направленные на уменьшение дисперсии оценки [13–16]. Эти методы, известные еще как методы ускоренного моделирования, позволяют достичь заданной точности вычислений при относительно небольших затратах времени.

В настоящей статье рассматривается система $GI/G/\infty$ (рекуррентный входящий поток, определяемый функцией распределения $F(x)$, $\tau_F = \int_0^\infty x\,dF(x) < \infty$, время обслуживания имеет функцию распределения $G(x)$, $\tau_G = \int_0^\infty x\,dG(x) < \infty$, бесконечное число обслуживающих каналов). Целью исследования является разработка метода ускоренного моделирования, позволяющего с требуемой точностью оценивать вероятности $Q_r = \mathbf{P}\{\nu \ge r\}$ и $Q_r^{(0)} = \mathbf{P}\{\nu^{(0)} \ge r\}$ при $\tau_G/\tau_F \to \infty$. Здесь $\nu^{(0)}$ — количество заявок в системе в стационарном режиме, а ν — количество заявок в стационарном режиме, находящихся в системе в момент поступления заявки.

Оценка вероятностей Q_r и $Q_r^{(0)}$ методом существенной выборки

Обозначим $\{\xi_i,\ i=1,2,\ldots\}$ и $\{\eta_i,\ i=1,2,\ldots\}$ независимые последовательности независимых случайных величин, определяемых функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ соответственно. Предположим, что существует плотность распределения $f(x) = F'(x)$. Рассмотрим вначале вычисление Q_r. Пусть в момент $t=0$ система находится в стационарном режиме и поступает заявка. Тогда моменты поступления заявок образуют простой процесс восстановления, уходящий в прошлое и определяемый функцией распределения $F(x)$. Справедливо следующее соотношение:

$$Q_r = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty}_{n} \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^n I(\eta_i > t_1 + \ldots + t_i) \ge r\right\} dF(t_1)\ldots dF(t_n)\,, \qquad (1)$$

где $I(\cdot)$ — индикатор соответствующего события. Выражение в фигурных скобках означает событие «обслуживание, по крайней мере, r из n заявок, поступивших последними, не окончится к моменту $t=0$».

Формула (1) позволяет моделировать вероятность Q_r методом Монте-Карло. Поскольку при увеличении r вероятность события в фигурных скобках стремится к нулю, вычислительные затраты неограниченно возрастают. Для уменьшения дисперсии оценки воспользуемся методом существенной выборки. Вероятность указанного события можно увеличить, уменьшив значения $\{t_j\}$. Пусть $\{H_j(x)\}$ — некоторые функции распределения положительных случайных величин, $\{h_j(x)\}$ — соответствующие плотности распределения.

Тогда

$$Q_r = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty}_{n} \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{n} I(\eta_i > t_1 + \ldots + t_i) \geq r\right\} \prod_{j=1}^{n} \frac{f(t_j)}{h_j(t_j)} \prod_{j=1}^{n} h_j(t_j)\, dt_1 \ldots dt_n\,. \quad (2)$$

Положим $H_j(x) = \mathbf{P}\{\alpha_j\, \xi_j < x\} = F(x/\alpha_j)$, где $\alpha_j \in (0, 1]$. Иначе говоря, уменьшаем интервал между поступлением $(j-1)$- и j-й заявок пропорционально α_j. В этом случае $h_j(x) = \dfrac{1}{\alpha_j} f(x/\alpha_j)$ и формула (2) имеет вид

$$Q_r = Q_r(\overline{\alpha}) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty}_{n} \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{n} I(\eta_i > t_1 + \ldots + t_i) \geq r\right\} \prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j f(t_j)}{f(t_j/\alpha_j)} dF\left(\frac{t_1}{\alpha_1}\right)\ldots$$

$$\ldots dF\left(\frac{t_n}{\alpha_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty}_{n} \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{n} I(\eta_i > \alpha_1 t_1 + \ldots + \alpha_i t_i) \geq r\right\} \prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j f(\alpha_j t_j)}{f(t_j)} \times$$

$$\times dF(t_1) \ldots dF(t_n), \quad (3)$$

где $\overline{\alpha} = (\alpha_i,\ i \geq 1)$. Обозначим $s(m, k) = \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{m} I(\eta_i > \alpha_1 t_1 + \ldots + \alpha_i t_i) = k\right\}$, $0 \leq k \leq m$, $p_i = \mathbf{P}\{\eta_i > \alpha_1 t_1 + \ldots + \alpha_i t_i\} = 1 - G(\alpha_1 t_1 + \ldots + \alpha_i t_i)$, $i \geq 1$, $s(m, k)$ — вероятность того, что обслуживание ровно k заявок из m, поступивших последними, не окончится к моменту $t = 0$. Тогда при фиксированных n и $\overline{\alpha}$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{n} I(\eta_i > \alpha_1 t_1 + \ldots + \alpha_i t_i) \geq r\right\} = \sum_{k=r}^{n} s(n, k), \quad (4)$$

где вероятности $\{s(m,k),\ 0 \leq k \leq m,\ 0 \leq m \leq n\}$ вычисляются согласно рекуррентным формулам:

$$s(0,0) = 1,\ s(m, 0) = (1 - p_m)\, s(m-1, 0),\ 1 \leq m \leq n, \quad (5)$$

$$s(m, m) = p_m\, s(m-1,\ m-1),\ 1 \leq m \leq n, \quad (6)$$

$$s(m, k) = p_m\, s(m-1,\ k-1) + (1 - p_m)\, s(m-1,\ k),\ 1 \leq k < m,\ 2 \leq m \leq n. \quad (7)$$

Алгоритм построения асимптотически несмещенной (при $n \to \infty$) оценки $\hat{Q}_r(n, \overline{\alpha})$ в одной реализации для $Q_r(\overline{\alpha})$ при фиксированных n и $\overline{\alpha}$ формулируется так.

1. Моделируем n независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$. Их реализации обозначим $\{t_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$.

2. Вычисляем вероятности $p_i = 1 - G(\alpha_1 t_1 + \ldots + \alpha_i t_i),\ 1 \leq i \leq n.$

3. Согласно (4) и рекуррентным формулам (5)–(7) вычисляем

$$R = \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{n} I(\eta_i > \alpha_1 t_1 + \ldots + \alpha_i t_i) \geq r\right\}.$$

4. Строим оценку в одной реализации:

$$\hat{Q}_r(n, \overline{\alpha}) = R \prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j f(\alpha_j t_j)}{f(t_j)}. \qquad (8)$$

Формула (8) определяет семейство оценок, зависящих от параметров n и $\overline{\alpha}$. Значение n должно быть настолько большим, чтобы практически исключить возможность наличия заявок с номерами $n+1,\ n+2,\ \ldots$ в системе в момент $t=0$. Выбор $\overline{\alpha}$ нацелен на минимизацию дисперсии. Поскольку получить решение этой оптимизационной задачи с n переменными в явном виде весьма проблематично, целесообразно использовать эвристический подход, описанный в следующем разделе.

Если исследуемой величиной является стационарная вероятность $Q_r^{(0)}$ наличия в системе не менее r заявок, то вместо простого процесса восстановления следует рассматривать стационарный процесс восстановления. При этом в сформулированный выше алгоритм следует внести такие изменения:

а) время до первого момента поступления заявки имеет плотность распределения $\frac{1}{\tau_F}[1-F(x)],\ x \ge 0$;

б) в формуле (8) вместо $\frac{f(\alpha_1 t_1)}{f(t_1)}$ следует использовать $\frac{1-F(\alpha_1 t_1)}{1-F(t_1)}$.

Некоторые способы выбора n и вектора $\overline{\alpha}$

В каждой реализации алгоритма имеется свой набор вероятностей $\{p_i,\ i=1,2,\ldots,n\}$, обладающих общим свойством: $p_1 > p_2 > \ldots > p_n$. Очевидно, что с возрастанием n вероятности $\{p_i,\ i>n\}$ перестают оказывать столь заметное влияние на вероятность R. Пусть ε — наперед заданное малое число. Положим $w = G^{-1}(1-\varepsilon)$ (функцию $G(x)$ будем считать непрерывной), т.е. $\mathbf{P}\{\eta \ge w\} = 1-G(w)=\varepsilon$. В каждой реализации алгоритма значение n будем выбирать из условия $n = \min\{k : \alpha_1 t_1 + \ldots + \alpha_k t_k > w\}$. В этом случае $p_i < \varepsilon,\ i>n.$ При уменьшении ε возрастает не только точность, но и время расчетов. Контрольные расчеты показывают, что приемлемая точность достигается уже при $\varepsilon = 10^{-4}$.

Несколько сложнее подобрать вектор $\overline{\alpha}$, минимизирующий дисперсию оценки. Вряд ли стоит рассчитывать, что удастся предложить алгоритм, позволяющий минимизировать функцию (многомерный интеграл), зависящую от n переменных. Поэтому воспользуемся следующим эвристическим подходом.

Очевидно, что масштабный множитель $\alpha_1 < 1$ оказывает влияние не только на вероятность p_1, но и на другие вероятности (за счет того, что они зависят от $\alpha_1 t_1$). В то же время множитель α_j влияет лишь на $p_k,\ k=j,\ldots,n$. Чем меньше влияние соответствующего множителя на оценку, тем ближе он должен быть к единице (иначе за счет нормирующего множителя в (8) может наблюдаться не уменьшение, а увеличение дисперсии). Поэтому естественно предположить, что $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \le \alpha_n \le 1$. Пусть $\phi(x)$ — некоторая монотонно неубывающая функция на отрезке $[1, n]$, удовлетворяющая условиям $\phi(1) = \alpha^*,\ \phi(m) = 1$, где $\alpha^* \in (0,1)$, а m — целое число, $1 < m \le n$. Положим $\alpha_j = \phi(j),\ 1 \le j \le n$. Функцию $\phi(\cdot)$ можно выбирать различными способами. Например, $\phi(x) = a + bx,\ \phi(x) = a + \frac{b}{x},\ \phi(x) = \ln(a+bx)$, $\phi(x) = \ln\ln(a+bx)$. Константы a и b подбираются из указанных выше граничных условий. При выбранной функции $\phi(\cdot)$ задача минимизации дисперсии оценки сводится к оптимальному выбору всего лишь двух параметров α^* и m. Заметим, что асимптотическая несмещенность оценок сохраняется при любом выборе функции $\phi(\cdot)$ и параметров α^*, m.

Численные результаты

Воспользуемся изложенным выше подходом для определения вероятности Q_r у системы обслуживания, задаваемой распределениями

$$F(x) = 1 - e^{-(\rho x)^{\beta}}, \quad G(x) = 1 - e^{-x^{\beta}}.$$

Параметр $\rho = \dfrac{\tau_G}{\tau_F}$ определяет загрузку системы. Положим $\rho = 100$. В этом случае исследования показали, что стационарное распределение количества требований в системе не может быть аппроксимировано нормальным распределением. Рассмотрим три случая: а) $\beta = 1$; б) $\beta = 2$; в) $\beta = 0{,}5$. В первом случае стационарное распределение находится в явном виде

$$Q_r = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho}$$

и можно сравнить точные значения с оценками, получаемыми ускоренным моделированием. В качестве функции $\phi(\cdot)$ выберем $\phi(x) = \ln(a + bx)$, где $b = \dfrac{1}{m-1}(e - e^{\alpha^*})$, $a = e^{\alpha^*} - b$. Результаты вычислений Q_r при различных значениях r для всех трех случаев представлены соответственно в табл. 1–3. При этом выбираем $\varepsilon = 10^{-4}$. Все оценки построены с относительной погрешностью 1% и достоверностью 0,99. Для каждого r указаны значения m и α^*, подобранные по оценочным расчетам с использованием относительно небольшого количества реализаций. Наряду с оценками $\hat{Q}_r(\alpha^*, m)$ приведены точные значения Q_r (табл. 1) и оценки $\hat{\varepsilon}_r(\alpha^*, m)$ относительной среднеквадратической погрешности (отношение корня квадратного выборочной дисперсии к $\hat{Q}_r(\alpha^*, m)$).

Таблица 1

r	m	α^*	Q_r	$\hat{Q}_r(\alpha^*, m)$	$\hat{\varepsilon}_r(\alpha^*, m)$
120	240	0,80	$2{,}82 \cdot 10^{-2}$	$2{,}85 \cdot 10^{-2}$	0,45
140	280	0,70	$9{,}16 \cdot 10^{-5}$	$9{,}14 \cdot 10^{-5}$	0,53
160	320	0,65	$2{,}05 \cdot 10^{-8}$	$2{,}04 \cdot 10^{-8}$	0,62
180	360	0,55	$4{,}10 \cdot 10^{-13}$	$4{,}11 \cdot 10^{-13}$	0,57
200	400	0,50	$9{,}34 \cdot 10^{-19}$	$9{,}31 \cdot 10^{-19}$	0,62

Таблица 2

r	m	α^*	$\hat{Q}_r(\alpha^*, m)$	$\hat{\varepsilon}_r(\alpha^*, m)$
120	220	0,90	$2{,}85 \cdot 10^{-3}$	0,71
140	240	0,80	$3{,}04 \cdot 10^{-8}$	1,63
160	270	0,75	$1{,}03 \cdot 10^{-15}$	3,76
180	290	0,65	$1{,}73 \cdot 10^{-25}$	10,62

Из оценок, представленных в табл. 1, следует, что все точные значения находятся в соответствующих однопроцентных доверительных интервалах. Значения m примерно в два раза больше соответствующих значений r, но могут быть и исключения (табл. 2). С увеличением r (убыванием вероятности Q_r) следует выбирать меньшие значения α^*. При убывании оцениваемой вероятности возрастает относительная среднеквадратическая погрешность, хотя этот рост и нельзя назвать значительным (например, при $\beta = 2$ при переходе от $r = 160$ к $r = 180$ вероятность Q_r уменьшается на 10 порядков, в то время как $\mathcal{E}_r(\alpha^*, m)$ увеличивается всего в 3 раза). Следует обратить внимание на то, что при одной и той же загрузке системы вид функций распределения весьма существенно влияет на вероятностные характеристики системы. Например, при $r = 180$ порядок Q_r составляет 10^{-13} ($\beta = 1$), 10^{-25} ($\beta = 2$) и 10^{-7} ($\beta = 0{,}5$).

Таблица 3

r	m	α^*	$\mathcal{Q}_r(\alpha^*, m)$	$\mathcal{E}_r(\alpha^*, m)$
120	240	0,70	$9{,}99 \cdot 10^{-2}$	1,01
140	280	0,65	$4{,}27 \cdot 10^{-3}$	1,59
160	320	0,55	$4{,}70 \cdot 10^{-5}$	2,87
180	360	0,45	$1{,}68 \cdot 10^{-7}$	4,80
200	400	0,40	$1{,}70 \cdot 10^{-10}$	9,12

Исследуем, можно ли добиться еще более значительного уменьшения дисперсии оценки при дальнейшем «сглаживании» функции $\phi(\cdot)$. Выберем $\phi(x) = \ln\ln(a + bx)$, где $b = \frac{1}{m-1}\left(e^{e} - e^{e^{\alpha^*}}\right)$, $a = e^{e^{\alpha^*}} - b$. Результаты вычислений Q_r при различных значениях r для всех трех случаев представлены соответственно в табл. 4–6.

Таблица 4

r	m	α^*	Q_r	$\mathcal{Q}_r(\alpha^*, m)$	$\mathcal{E}_r(\alpha^*, m)$
120	250	0,80	$2{,}82 \cdot 10^{-2}$	$2{,}82 \cdot 10^{-2}$	0,40
140	320	0,70	$9{,}16 \cdot 10^{-5}$	$9{,}12 \cdot 10^{-5}$	0,41
160	380	0,60	$2{,}05 \cdot 10^{-8}$	$2{,}06 \cdot 10^{-8}$	0,41
180	450	0,55	$4{,}10 \cdot 10^{-13}$	$4{,}12 \cdot 10^{-13}$	0,52
200	500	0,45	$9{,}34 \cdot 10^{-19}$	$9{,}28 \cdot 10^{-19}$	0,66

Таблица 5

r	m	α^*	$\mathcal{Q}_r(\alpha^*, m)$	$\mathcal{E}_r(\alpha^*, m)$
120	230	0,90	$2{,}86 \cdot 10^{-3}$	0,72
140	250	0,80	$3{,}05 \cdot 10^{-8}$	1,68
160	280	0,75	$1{,}02 \cdot 10^{-15}$	4,55
180	310	0,65	$1{,}70 \cdot 10^{-25}$	15,12

Таблица 6

r	m	α^*	$\hat{Q}_r(\alpha^*, m)$	$\hat{C}_r(\alpha^*, m)$
120	250	0,70	$9{,}97 \cdot 10^{-2}$	0,91
140	300	0,65	$4{,}23 \cdot 10^{-3}$	1,59
160	350	0,55	$4{,}76 \cdot 10^{-5}$	2,81
180	400	0,50	$1{,}71 \cdot 10^{-7}$	4,94
200	450	0,40	$1{,}68 \cdot 10^{-10}$	9,05

Приведенные оценки показывают, что справедливы все те же выводы, что и ранее. Нет оснований утверждать, что указанные в таблицах значения m и α^* минимизируют дисперсию. В то же время значения дисперсий являются вполне приемлемыми для построения оценок с относительной погрешностью 1% при относительно небольших затратах времени. Расчеты показали, что выбор функций $\phi(x) = a + bx$ и $\phi(x) = a + \frac{b}{x}$ является менее удачным, т.е. значения дисперсий будут существенно выше указанных в таблицах.

Заключение

Предложенный в статье метод ускоренного моделирования является весьма эффективным инструментом для оценки стационарных вероятностей состояний системы $GI/G/\infty$ в условиях большой загрузки, в частности, когда «не работают» предельные теоремы и не могут быть использованы асимптотические оценки, построенные на их основе.

М.Ю. Кузнєцов, І.М. Кузнєцов

ОЦІНКА СТАЦІОНАРНИХ ІМОВІРНОСТЕЙ СТАНІВ СИСТЕМИ ОБСЛУГОВУВАННЯ $GI/G/\infty$ МЕТОДОМ ІСТОТНОЇ ВИБІРКИ

Досліджується система обслуговування $GI/G/\infty$ в умовах великого завантаження. Запропоновано метод прискореного моделювання, що дозволяє будувати асимптотично незміщені оцінки стаціонарних імовірностей станів. Розглянуто числові приклади.

N.Yu. Kuznetsov, I.N. Kuznetsov

EVALUATION OF THE STEADY-STATE PROBABILITIES OF QUEUEING SYSTEM $GI/G/\infty$ BY IMPORTANCE SAMPLING

A queueing system $GI/G/\infty$ in heavy traffic is investigated. A fast simulation method enabling to construct asymptotically unbiased estimates of steady-state probabilities is proposed. Numerical examples are considered.

1. *Asmussen S.* Light traffic equivalence in single–server queues // Ann. Appl. Probab. — 1992. — **2,** N 3. — P. 555–574.
2. *Daley D.J., Rolski T.* Light–traffic approximations in many server queues // Adv. Appl. Probab. — 1992. — **24**, N 2. — P. 202–218.
3. *Kovalenko I.N.* Approximation of queues via small–parameter method // Advances in Queueing. — Boca Raton: CRC Press, 1995. — P. 481–506.
4. *Blaszczyszyn B., Frey A., Schmidt V.* Light–traffic approximations for Markov–modulated multi–server queues // Commun. Statist. Stoch. Models. — 1995. — **11**, N 3. — P. 423–445.
5. *Wang C.L.* Light–traffic approximations for regenerative queueing processes // Adv. Appl. Probab. — 1997. — **29**, N 3. — P. 532–541.
6. *Коваленко И.Н.* Оценка интенсивности потока немонотонных отказов в системе обслуживания // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, № 9. — С. 1219–1225.
7. *Kovalenko I.N., Atkinson J.B., Mikhalevich K.V.* Three cases of light–traffic insensitivity of the loss probability in a $GI/G/m/0$ loss system to the shape of the service time distribution // Queueing Systems. — 2003. — **45**, N 3. — P. 245–271.
8. *Anisimov V.V.* Switching processes in queueing models. — Chichester: Wiley–ISTE, 2008. — 352 p.
9. *Ross K.W.* Multiservice loss models for broadband telecommunication networks. — London: Springer, 1995. — 288 p.
10. *Simonian A., Roberts J.W., Theberge F., Mazumdar R.* Asymptotic estimates for blocking probabilities in a large multi–rate loss network // Adv. Appl. Probab. — 1997. — **29**, N 4. — P. 806–829.
11. *Ливинская А.В., Лебедев Е.А.* Предельная теорема для перегруженных многоканальных сетей // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 6. — С. 106–113.
12. *Lebedev E., Livinska G.* Gaussian approximation of multi–channel networks in heavy traffic // Communications in Computer and Information Science. — 2013. — N 356. — P. 122–130.
13. *Mandjes M.* Fast simulation of blocking probabilities in loss networks // Europ. J. Oper. Res. — 1997. — **101**, N 2. — P. 393–405.
14. *Smith P.J., Shafi M., Gao H.* Quick simulation: a review of importance sampling techniques in communications systems // IEEE Selected Areas Commun. — 1997. — **15**, N 4. — P. 597–613.
15. *Lassila P.E., Virtamo J.T.* Efficient importance sampling for Monte Carlo simulation of loss systems // Proc. of the ITC–16, Teletraffic Engineering in a Competitive World. — Edinburgh: Elsevier, 1999. — P. 787–796.
16. *Шумская А.А.* Оценка стационарной вероятности потери в системе массового обслуживания с рекуррентными потоками требований // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 2. — С. 133–145.

Получено 30.11.2015