ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИКИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

УДК 621.391

В.М. Кунцевич

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ И НЕЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ПОГРЕШНОСТЯХ ИЗМЕРЕНИЯ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ

Введение

Существует достаточно широкий класс систем управления динамическими системами, точность функционирования которых определяется ограниченной точностью измерений вектора состояния управляемых объектов, обусловленной гарантируемой погрешностью используемых средств измерений. К этому классу объектов, в частности, относятся космические аппараты, предназначенные для дистанционного наблюдения Земли из космоса, к точности функционирования систем управления ориентацией которых предъявляются жесткие требования. При таком источнике возникновения погрешности измерений гипотезу о вероятностной (в математическом смысле) природе нельзя признать адекватной. Это исключает возможность использования получившего в настоящее время широкое распространение фильтра Калмана и его модификаций. Поэтому для решения задачи синтеза управления динамическими системами в оговоренных условиях неопределенности будут использоваться методы получения гарантированного результата.

Возможны два альтернативных подхода к решению управления динамическими системами в условиях неопределенности нестохастической природы.

Суть первого из них (используемого в приложениях) заключается в том, что для получения гарантированных оценок вектора состояния в оговоренных выше условиях в режиме on-line применяются достаточно разработанные в настоящее время алгоритмы получения эллипсоидальных оценок вектора состояния, использующие основную идею фильтра Калмана. А именно: сопоставление оценок, полученных в результате прямых измерений, с прогнозными оценками, определяемыми с помощью математической модели объекта управления. При вычислении гарантированных оценок сопоставление указанных оценок осуществляется операцией пересечения множественных оценок. С современным состоянием разработок в этом направлении можно ознакомиться в работе [1] (см. также приведенную там достаточно полную библиографию). Далее принимается волевое решение, что наилучшей точечной оценкой на аппроксимирующем эллипсоиде является его центр, и после этого с помощью того или иного стандартного метода решается детерминированная задача синтеза управления (см., например, [2, 3]).

Такой подход при решении задач управления в указанных условиях дает наилучшие результаты, но не позволяет расчетным путем получить гарантированную оценку качества функционирования синтезированной таким образом системы управления, так как размеры аппроксимирующей эллипсоидальной оценки зависят от реализованных значений помех.

Второй предлагаемый ниже возможный подход к решению задачи синтеза управления динамическими системами в оговоренных выше условиях состоит в том, чтобы, отказавшись от использования каких-либо процедур фильтрации помех, существенно упростить всю совокупность вычислительных процедур, реализуемых в режиме on-line, и решать задачу синтеза, учитывая в явном виде существование ограниченных помех измерения вектора состояния.

Статья состоит из двух частей: в первой дается решение задачи синтеза для линейных динамических систем, а во второй приведено решение задачи синтеза управления для оговоренного ниже класса нелинейных систем.

1. Постановка и решение задачи синтеза управления, минимизирующего инвариантные множества линейных систем

Будем считать, что измерение вектора состояния и реализация управления осуществляются в дискретные моменты времени и что от исходного дифференциального уравнения, описывающего динамику системы, по известным правилам осуществлен переход к разностному уравнению

$$X_{n+1} = AX_n + BU_n, \tag{1}$$

где $X_n \in \mathbf{R}^m$, $U_n \in \mathbf{R}^m$, A и B — матрицы $(m \times m)$, $\det B \neq 0$.

Приняв основное допущение, что вектор состояния измеряется полностью, но с помехами, уравнение измерений запишем в виде

$$Y_n = X_n + Z_n, \tag{2}$$

где $Z_n \in \mathbf{R}^m$ — погрешность измерений, для которой задана ее оценка

$$Z_n \in \mathbf{Z} = \left\{ Z : \left\| Z \right\|_\infty = \sum_{i=1}^{m} \left| z_i \right| = m\Delta \right\}. \tag{3}$$

Для управления системой (1) на множественной оценке $\mathbf{X}_n$

$$X_n \in \mathbf{X}_n = Y_n + \mathbf{Z} \tag{4}$$

выберем такую точечную оценку $\overset{*}{X}_n$, которая минимизирует наибольшую погрешность оценки вектора X_n. Такой оценкой является

$$\overset{*}{X}_n = Y_n. \tag{5}$$

Считая, что матрица A неустойчива и без потери общности примем также, что с помощью соответствующего выбора линейного управления

$$U_n = CY_n, \text{ где } C \text{ — матрица } (m \times m), \tag{6}$$

необходимо стабилизировать положение $X_n = 0$ объекта управления (1).

Из (1), (2) и (6) имеем

$$U_n = CX_n + CZ_n. \tag{7}$$

Подставив (7) в (1), получим

$$X_{n+1} = \widetilde{A}(C)X_n + CZ_n, \text{ где } \widetilde{A}(\cdot) = A + BC. \tag{8}$$

Выбор матрицы C осуществим прежде всего так, чтобы удовлетворить необходимым и достаточным условиям устойчивости матрицы $\widetilde{A}(C)$

$$\left|\widetilde{\lambda}_i[\widetilde{A}(C)]\right| \le q < 1; \ i = \overline{1, m}, \tag{9}$$

или только достаточному условию устойчивости матрицы $\widetilde{A}(C)$

$$\| \widetilde{A}(C) \| \le q < 1. \tag{10}$$

Если неравенства (9) или (10) справедливы, то при ограниченном возмущении Z_n система (8), (2) имеет ограниченное инвариантное множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$, т.е. такое множество, что если $X_n \in \overset{*}{\mathbf{X}}$, то и $X_{n+1} \in \overset{*}{\mathbf{X}}$ при всех $\widetilde{Z}_n = CZ$ из $\widetilde{\mathbf{Z}} = C\mathbf{Z}$.

Сделаем отступление и рассмотрим систему

$$X_{n+1} = AX_n + Z_n, \tag{11}$$

где, так же, как и выше, $X_n \in \mathbf{R}^m$, $Z_n \in \mathbf{R}^m$, для Z_n задана оценка (2), A — матрица $(m \times m)$.

Если собственные числа $\lambda_i(A)$, $i = \overline{1, m}$, удовлетворяют условию (9), то система (11), (2) имеет ограниченное инвариантное множество. В [4] было введено понятие минимального инвариантного множества $\overline{\mathbf{X}}$ как такого инвариантного множества, которое не содержит в себе инвариантных подмножеств, и было получено соотношение, определяющее это множество:

$$\overline{\mathbf{X}} = \mathbf{Z} + A\mathbf{Z} + A^2\mathbf{Z} + \dots . \tag{12}$$

В том частном случае, когда A — нильпотентная матрица, т.е. $\lambda_i(A) = 0$, $i = \overline{1, m}$, и для такой матрицы $A^m = 0$, ряд (13) содержит лишь m членов.

В общем случае, т.е. при $m \ge 3$, соотношение (12) непригодно для выполнения каких-либо расчетов. Поэтому откажемся от определения минимального инвариантного множества и ограничимся определением только инвариантного множества $\overset{*}{\mathbf{X}}$ как оценки сверху минимального инвариантного множества $\overline{\mathbf{X}}$. Далее нас будет интересовать не само по себе множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$, а лишь его радиус $r(\overset{*}{\mathbf{X}})$, определяемый как

$$r(\overset{*}{\mathbf{X}}) = \max_{X \in \overset{*}{\mathbf{X}}} \| X \|_\infty, \tag{13}$$

как мера отклонения системы (8), (2) от положения $X = 0$ — аналог дисперсии при вероятностной природе возмущения Z_n.

Из (12) и (13) следует, что чем меньше $\|A\|$, тем меньше $r(\overset{*}{\mathbf{X}})$.

Замечание 1. В работах [5–9] (см. также [10]) решалась задача синтеза управления для систем

$$X_{n+1} = AX_n + BU_n + Z_n, \text{ где } Z_n \in \mathbf{Z},$$

отличающихся от рассматриваемых здесь систем отсутствием сомножителя C при возмущении Z_n, что существенно меняет способ решения задачи синтеза.

Вернемся к рассмотрению системы (8), (3). Из сказанного выше следует, что выбор матрицы C должен осуществляться на том их множестве, на котором обеспечивается выполнение условия (10) и уменьшается $\|\widetilde{A}(C)\|$. Но с ростом $\|C\|$ возрастает интенсивность возмущения $\widetilde{Z}_n = CZ_n$, действующего на систему (8). Таким образом, противоречивые требования, предъявляемые к выбору матрицы обратной связи C, делает этот выбор неочевидным.

Для дальнейших целей интервальное множество $\mathbf{Z}$ запишем в виде

$$\mathbf{Z} = \underset{i=1;2^m}{\mathrm{conv}}\{Z^i\}, \tag{14}$$

где Z^i — i-я вершина центрально-симметрического интервального множества

$$\mathbf{Z} = \mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2 \times \ldots \times \mathbf{z}_m, \quad \mathbf{z}_i = \{z_i : |z_i| = \Delta\}. \tag{15}$$

Если для X_n есть его оценка

$$X_n \in \mathbf{X}_n \tag{16}$$

в виде интервального множества, то из (1) и (16) имеем

$$X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1} = \widetilde{A}(C)\,\mathbf{X}_n + \widetilde{\mathbf{Z}}(C), \text{ где } \widetilde{\mathbf{Z}}(\cdot) = C\mathbf{Z}. \tag{17}$$

При матрице C, обеспечивающей выполнение неравенства (10), система (17), (3) имеет ограниченное инвариантное множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$. Приняв в (17), что $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n = \overset{*}{\mathbf{X}}$, получим уравнение, определяющее искомое множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$:

$$\overset{*}{\mathbf{X}} = \widetilde{A}(C)\overset{*}{\mathbf{X}} + \widetilde{\mathbf{Z}}(C). \tag{18}$$

Из равенства множеств следует равенство их радиусов. Поэтому из (18) имеем равенство

$$r[\overset{*}{\mathbf{X}}(C)] = r[\widetilde{A}(C)\overset{*}{\mathbf{X}}] + r[\widetilde{\mathbf{Z}}(C)]. \tag{19}$$

Отметим, что множество $\widetilde{\mathbf{Z}}$, полученное в результате линейного преобразования интервального множества $\mathbf{Z}$, является выпуклым многогранником, но оно неинтервальное. Аппроксимировав его интервальным множеством минимального объема $\overline{\mathbf{Z}}(C)$, получим, что его радиус $r[\overline{\mathbf{Z}}(C)]$ равен

$$r[\overline{\mathbf{Z}}(C)] = \max_{i=1;2^m} r[\widetilde{A}(C)Z^i], \text{ где } Z^i \text{ — } i\text{-я вершина множества } \mathbf{Z}. \tag{20}$$

Множество $\mathbf{X}' = A(C)\overset{*}{\mathbf{X}}$ — также выпуклый многогранник, но оно неинтервальное. Поэтому для определения инвариантного множества $\overset{*}{\mathbf{X}}$ аппроксимируем множество $\mathbf{X}'$ интервальным множеством минимального объема $\overline{\mathbf{X}}(\overset{*}{\mathbf{X}})$, радиус которого в силу того, что по принятому условию $\|\widetilde{A}(C)\| \le q < 1$, равен

$$r[\widetilde{A}(C)\overset{*}{\mathbf{X}}] \le qr(\overset{*}{\mathbf{X}}). \tag{21}$$

Из (19)–(21) получаем радиус инвариантного множества $\overset{*}{\mathbf{X}}$ системы (17), (3):

$$r[\overset{*}{\mathbf{X}}(C)] = (1-q)^{-1} r(\overline{\mathbf{Z}}), \text{ где } r(\overline{\mathbf{Z}}) = r(\mathbf{Z})\|C\|, \; r(\mathbf{Z}) = m\Delta. \tag{22}$$

Имея аналитическое выражение для оценки радиуса искомого инвариантного множества, перейдем к выбору матрицы обратной связи C, минимизирующей его.

Для формальной постановки задачи определения искомой матрицы обратной связи C внесем уточнение в неравенство (10). Примем, что в (10) норма матрицы $\widetilde{A}(C)$ должна быть ограничена сверху нестрогим неравенством

$$q \le 1-\alpha, \text{ где } 0 < \alpha \le 1 \text{ — заданное число.} \tag{23}$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$S = BC \tag{24}$$

и примем, что она равна

$$S = -KA, \text{ где } K = \operatorname{diag}\{k_i\}_{i=1}^{m}. \tag{25}$$

В (25) $k_i \ge 0$ — варьируемые параметры, подлежащие определению и выбираемые на множестве тех их значений, которые обеспечивают выполнение достаточного условия устойчивости (10) матрицы $\widetilde{A}(C)$ (8).

Нижний предел $\underline{k}_i$ диапазона допустимых изменений параметров k_i в неявном виде ограничен допустимыми пределами изменения величины

$$0 \le q(k_i) = [1 - k_i\|A\|^{-1}] \le 1-\alpha. \tag{26}$$

Выше было принято, что матрица A не удовлетворяет достаточному условию ее устойчивости $\|A\| < 1$. Поэтому среди ее m строк A_i^{T}, $i = \overline{1, m}$, существует по крайней мере такая одна (или в общем случае несколько строк), для которой $\|A_i^{\mathrm{T}}\| > 1$. Примем для определенности, что j-я строка A_j^{T} матрицы A имеет наибольшую норму и она определяет $\|A\|$. Тогда нижний предел допустимого значения параметра k_j определим из условия $(1-\underline{k}_j)\|A\| = 1-\alpha$. Отсюда следует, что $\underline{k}_j = [1-(1-\alpha)\|A\|^{-1}]$.

Величину параметра k_i необходимо ограничить также и сверху величиной $\overline{k}_j < 1$, чтобы исключить появление формально возможного предельного случая, когда при $k_j = 1$ и $\|\widetilde{A}(C)\| = q = 0$. Следовательно, при этом система (17) вырождается. Поэтому примем, что $\overline{k}_j = 1-\delta$, где $\delta > 0$ — достаточно малое число.

 ISSN 0572-2691

Замечание 2. Нетрудно убедиться в том, что система (8) со скалярным управлением u_n и с матрицей A в виде матрицы Фробениуса

$$A = \left\| \begin{array}{c:c} 0 & \\ \vdots & I_{m-1} \\ 0 & \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{A_m^{\mathrm{T}}} \end{array} \right\|$$

и вектором B, равным $B^{\mathrm{T}} = (0, 0, \ldots, b_m)$, при выборе управления $u_n = -kA_m^{\mathrm{T}} X_n$ с $k = \bar{k} = 1$ не вырождается. При этом неравенство (9) выполняется (спектральный радиус $\lambda(\widetilde{A})$ матрицы $\widetilde{A}$ равен нулю) и автономная система (8) асимптотически устойчива, несмотря на то, что норма матрицы $\widetilde{A}$ равна единице. Причина такого на первый взгляд парадокса рассмотрена в [11]. Об особенностях определения радиуса инвариантного множества с матрицей Фробениуса см. в [12].

Так как из (21), (22), (25) следует, что

$$r[\overset{*}{\mathbf{X}}(C)] = \frac{m\Delta \|C\|}{1-q} = \frac{m\Delta \|B^{-1}A\|}{1-(1-k_j)\|A\|} k_j, \tag{27}$$

то задача определения матрицы обратной связи $C = -k_j A_m$, где $k_j = \mathrm{var}$, минимизирующей радиус $r(\overset{*}{\mathbf{X}})$ инвариантного множества $\overset{*}{\mathbf{X}}$, сводится к задаче однопараметрической оптимизации

$$\min_{\underline{k}_j \le k_j \le \bar{k}_j} \left\{ r[\overset{*}{\mathbf{X}}(k_j)] = \frac{m\Delta \|B^{-1}\| \cdot \|A\|}{1-(1-k_j)\|A\|} k_j \right\}. \tag{28}$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Наименьшее значение радиуса $r[\overset{*}{\mathbf{X}}(k_j)]$ инвариантного множества системы (8), (3), (6) достигается при $k_j = \bar{k}_j$ и равно

$$r(\overset{*}{\mathbf{X}}) = \frac{m\Delta \|B^{-1}\| \cdot \|A\|}{1-(1-\bar{k}_j)\|A\|} \bar{k}_j. \tag{29}$$

Справедливость утверждения 1 следует из того, что функция

$$\varphi(k) = \frac{m\Delta \|B^{-1}\| \cdot \|A\|}{1-(1-k_j)\|A\|} k_j$$

при изменении k_j в пределах $\underline{k}_j \le k_j \le \bar{k}_j$ с ростом k_j монотонно убывает и при $k_j = \bar{k}_j$ достигает своего наименьшего значения, равного $\overset{*}{r}(\overset{*}{\mathbf{X}})$.

Теперь после определения величины $\bar{k}_j = \overset{*}{k}$ обратимся к определению величин $\bar{k}_i$, $i = \overline{1; m}$, $i \ne j$. Для всех тех $\bar{k}_i$, для которых $(1-\bar{k}_i)\| A_i^{\mathrm{T}} \| \le (1-\overset{*}{k})\| A_j^{\mathrm{T}} \|$, величины $\bar{k}_i$ принимаем равными нулю. Для всех тех $\bar{k}_i$, для которых справедливы неравенства $(1-\bar{k}_i)\| A_i^{\mathrm{T}} \| \ge (1-\overset{*}{k})\| A_j^{\mathrm{T}} \|$, величины $\bar{k}_i$ выбираем из условия выполнения равенств

$$(1-\bar{k}_i)\| A_i^{\mathrm{T}} \| = (1-\overset{*}{k})\| A_j^{\mathrm{T}} \| .$$

Такой выбор величин $\bar{k}_i$, $i \ne j$, обеспечивает выполнение условия

$$\| \widetilde{A}(\bar{k}_i) \| \le (1-\bar{k}_i)\| A_i^{\mathrm{T}} \| \le (1-\overset{*}{k})\| A_j^{\mathrm{T}} \|; \; i \ne j.$$

Все вычисления, необходимые для определения оптимального коэффициента $\overset{*}{k}$, выполняются в режиме off-line, а в режиме on-line реализуется управление $U_n = -CY_n = -\bar{k}_j B^{-1} A Y_n$, обеспечивающее наименьшее значение радиуса инвариантного множества системы (17), (3).

2. Постановка и решение задачи синтеза управления, минимизирующего инвариантные множества нелинейных систем

Задана нелинейная динамическая система

$$X_{n+1} = F(X_n) + BU_n, \tag{30}$$

где так же, как и выше, $X_n \in \mathbf{R}^m$; $U_n \in \mathbf{R}^m$ — вектор управления, B — матрица $(m \times m)$, $\det B \ne 0$, $F(X_n) = \| f_i(X_n) \|_{i=1}^m$, $f_i(\cdot)$ — однозначные одноэкстремальные функции, такие что $f_i(0) = 0$, $i = \overline{1, m}$.

Как и выше, принимаем, что вектор состояния X_n измеряется с ограниченной помехой Z_n и уравнение измерений имеет вид (2), в котором для помехи Z_n задана ее оценка (3). Считаем также, что на множестве $\mathbf{X}_n$ (см. (4)) в качестве наилучшей оценки $\overset{*}{\mathbf{X}}_n$ вектора X_n принято значение $\overset{*}{X}_n = X_n = Y_n$.

Целью управления системой (30), (2), (3) будем считать минимизацию радиуса инвариантного множества этой системы, приняв управление в виде

$$U_n = \psi(Y_n) = \psi(X_n + Z_n), \tag{31}$$

где $\psi(\cdot)$ — пока еще неизвестная нелинейная вектор-функция.

Подставив (31) в (30), получим уравнение замкнутой системы

$$X_{n+1} = F(X_n) + B\psi(X_n + Z_n). \tag{32}$$

Пусть при $U_n \equiv 0$ система (30) неустойчива, а так как ограниченное инвариантное множество система (31), (3) может иметь лишь в том случае, когда автономная система

$$X_{n+1} = F(X_n) + B\psi(X_n) \tag{33}$$

асимптотически устойчива, поэтому управление U_n должно обеспечить асимптотическую устойчивость системы (33). Откажемся от избыточного в приложениях требования асимптотической устойчивости системы (30) в целом и ограничимся требованием ее устойчивости лишь в области

$$X_n \in \overset{\circ}{\mathbf{X}} = \{X : \| X \| \le m\delta\}, \text{ где } \delta > 0 . \tag{34}$$

Введем обозначение

$$W_n(X_n) = B^{-1}\psi(X_n) \tag{35}$$

и примем функцию $\psi(X_n)$ в виде

$$\psi(X_n) = -KF(X_n), \text{ где } K = \operatorname{diag}\{k_i\}_{i=1}^m;\ k_i \ge 0. \tag{36}$$

Для исследования устойчивости системы (33) функцию Ляпунова запишем в виде

$$\upsilon_n = \| X_n \|_\infty . \tag{37}$$

Найдем вычисленную в силу уравнений (33), (35) первую разность $\Delta\upsilon_n$ функции υ_n :

$$\Delta\upsilon_n = \| F(X_n) + B\psi(X_n) \|_\infty - \| X_n \|_\infty . \tag{38}$$

Подставив (36) в (38), получим

$$\Delta\upsilon_n = \| (I-K)F(X_n) \| - \| X_n \| . \tag{39}$$

Элементы k_i матрицы K выберем так, чтобы при $X_n \in \overset{\circ}{\mathbf{X}}$

$$\Delta\,\upsilon_n = -\alpha\delta, \text{ где } 0 < \alpha << 1. \tag{40}$$

Тогда из (39), (40) имеем

$$\| (I-K)\,F(X_n) \| - \| X_n \| = -m\delta . \tag{41}$$

Найдем величину $\max F(X_n)$ при $X_n \in \overset{\circ}{\mathbf{X}}.$ Для этого определим величины:

$$\underline{x}_i = \min_{X_n \in \overset{\circ}{\mathbf{X}}} f_i(X_n);\ \bar{x}_i = \max_{X_n \in \overset{\circ}{\mathbf{X}}} f_i(X_n);\ i = \overline{1;m}. \tag{42}$$

Обозначим бóльшие по модулю величины $|\underline{x}_i|, |\bar{x}_i|$ через $|\overset{*}{x}_i|, i = \overline{1;m}.$ Тогда

$$\max_{X_n \in \overset{\circ}{\mathbf{X}}} \| F(X_n) \| = \sum_{i=1}^m |\overset{*}{x}_i| = m\delta . \tag{43}$$

Потребуем, чтобы

$$\max_{X_n \in \overset{\circ}{\mathbf{X}}} \{ \| (I-K)\,F(X_n) \| - \| X_n \| \} = -m\delta . \tag{44}$$

Тогда из (42)–(44) будем иметь

$$\sum_{i=1}^m (1-k_i)|\overset{*}{x}_i| = -m\delta . \tag{45}$$

Теперь выберем $k_i = \underline{k}_i;\ i = \overline{1;m},$ из условия выполнения равенств

$$(1-\underline{k}_i)|\overset{*}{x}_i| - m\delta = -\alpha, \quad i = \overline{1;m}.$$

Из этих равенств получаем

$$\underline{k}_i = 1 - |\overset{*}{x}_i|^{-1}(m\delta - \alpha), \; i = \overline{1; m}. \tag{46}$$

Такой выбор $\underline{k}_i, i = \overline{1; m}$, обеспечивает выполнение достаточного условия устойчивости автономной системы (33) в области $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$.

Подставив в (32), (36), получим уравнение замкнутой неавтономной системы

$$X_{n+1} = F(X_n) - KF(X_n + Z_n). \tag{47}$$

Отметим, что в общем случае в этой системе помеха Z_n действует на нее как аддитивно, так и мультипликативно. Покажем это на простейшем примере. Примем, что $f_i(x_i) = \alpha x_i^2 \operatorname{sign} x_i$. Тогда $\varphi_i(x_i, z_i) = \alpha[x_i^2 \operatorname{sign} x_i - (x_i + z_i)^2 \operatorname{sign}(x_i + z_i)]$. Пусть $\operatorname{sign}(x_i + z_i) = \operatorname{sign} x_i$, при этом $\varphi_i(\cdot) = -\alpha(2x_i + z_i)\operatorname{sign} x_i$.

Из (47) следует, что в отличие от рассмотренной выше линейной системы нелинейная система (47) при $K = I$ не вырождается. Поэтому примем $k_i = \overline{k}_i = 1$; $i = \overline{1; m}$.

Так как для возмущения Z_n задана лишь его оценка (3), и если для X_n также задана ее оценка $X_n \in \mathbf{X}_n$, где $\mathbf{X}_n$ — выпуклое множество, то эволюция системы (47) описывается в терминах разностных включений

$$X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1} = \Phi(\mathbf{X}_n, \mathbf{Z}), \tag{48}$$

где

$$\Gamma(\mathbf{X}_n, \mathbf{Z}, K) = \bigcup_{X_n \in \mathbf{X}_n; Z_n \in \mathbf{Z}} \Phi(X_n, Z_n, K), \; \underline{K} \le K \le I. \tag{49}$$

В (49)

$$\Phi(X_n, Z_n, K) = F(X_n) - KB^{-1}F(X_n + Z_n), \; \underline{K} = \operatorname{diag}\{\underline{k}_i\}_{i=1}^m. \tag{50}$$

В общем случае преобразование (49) определяет невыпуклое множество $\mathbf{X}_{n+1}$, точное определение которого связано с существенными трудностями вычислительного характера. Поэтому, как было предложено в [13], введем его оценку сверху, аппроксимировав его интервальным множеством минимального объема

$$X_{n+1} \in \overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \overline{\Gamma}(\mathbf{X}_n, \mathbf{Z}, K) = \overline{\mathbf{x}}_{1,n+1} \times \overline{\mathbf{x}}_{2,n+1} \times \ldots \times \overline{\mathbf{x}}_{m,n+1}, \tag{51}$$

где

$$\overline{\mathbf{x}}_{i,n+1} = \{x_{i,n+1} : \underline{x}_{i,n+1} \le x_{i,n+1} \le \overline{x}_{i,n+1}\}; \; i = \overline{1; m}. \tag{52}$$

В (52) приняты следующие обозначения:

$$\overline{x}_{i,n+1} = \max_{X_n \in \mathbf{X}_n; Z_n \in \mathbf{Z}_n} \{\varphi_i(X_n, Z_n)\}, \; \underline{x}_{i,n+1} = \min_{X_n \in \mathbf{X}_n; Z_n \in \mathbf{Z}_n} \{\varphi_i(X_n, Z_n)\}; \, i = \overline{1, m}, \tag{53}$$

$$\varphi_i(X_n, Z_n) = f_i(X_n) - f_i(X_n + Z_n); \, i = \overline{1, m}. \tag{54}$$

Отметим, что $\overline{\mathbf{x}}_{i,n+1}$ — проекция множества $\mathbf{X}_{n+1}$ на i-е пространство $\{X_n\}$.

В общем случае задачи отыскания глобальных экстремумов функций $\varphi_i(X_n, Z_n)$ могут оказаться слишком трудоемкими в вычислительном отношении. В приложениях часто известны некоторые важные свойства этих функций, которые позволяют конструктивно решать задачи отыскания экстремумов (54). Если ограничиться рассмотрением только одноэкстремальных на множестве $\mathbf{X}_n$ функций $\varphi_i(\cdot),\ i=\overline{1;\,m},$ то решения задач (53) можно эффективно отыскать с помощью известных программ решения задач нелинейной оптимизации.

Найдем теперь инвариантное множество системы (48), воспользовавшись утверждением 2 [14].

Утверждение 2. Система (48) имеет ограниченное инвариантное множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$, когда преобразование $\overline{\Gamma}(\mathbf{X}_n,\mathbf{Z},K)$ осуществляет сжатое отображение множества $\mathbf{X}_n$ во множество $\mathbf{X}_{n+1}$ и $\overset{*}{\mathbf{X}}\subset\overset{\circ}{\mathbf{X}}$. Сжатое отображение множества $\mathbf{X}_n$ во множество $\mathbf{X}_{n+1}$ имеет место, если существует включение

$$\mathbf{X}_{n+1}=\overline{\Gamma}(\mathbf{X}_n,\mathbf{Z},K)\subset\mathbf{X}_n. \tag{55}$$

В [14] показано, что строгое включение (55) имеет место тогда и только тогда, когда по крайней мере одно из нестрогих неравенств

$$\overline{x}_{i,n+1}\le\overline{x}_{i,n};\ \ \underline{x}_{i,n+1}\ge\underline{x}_{i,n};\ \ i=\overline{1,\,m}, \tag{56}$$

является строгим. При этом справедливо неравенство

$$r\,\{\mathbf{X}_{n+1}=\overline{\Gamma}(\mathbf{X}_n,\mathbf{Z},K)\}<r\,(\mathbf{X}_n), \tag{57}$$

где $r\,(\mathbf{X}_n)$ и $r\,(\mathbf{X}_{n+1})$ — радиусы множеств $\mathbf{X}_n,\ \mathbf{X}_{n+1}$ соответственно.

Если условия (60) выполняются, переходим к определению искомого инвариантного множества $\overset{*}{\mathbf{X}}$ системы (48) и его радиуса $r\,(\overset{*}{\mathbf{X}})$. Приняв в (48), что $\mathbf{X}_{n+1}=\mathbf{X}_n=\overset{*}{\mathbf{X}},$ получим уравнение

$$\overset{*}{\mathbf{X}}=\overline{\Gamma}(\overset{*}{\mathbf{X}},\mathbf{Z},K),$$

определяющее искомое инвариантное множество.

Из равенства множеств $\overset{*}{\mathbf{X}}$ и $\overline{\Gamma}(\overset{*}{\mathbf{X}},\mathbf{Z},K)$ следует равенство их радиусов:

$$r(\overset{*}{\mathbf{X}})=r[\overline{\Gamma}(\overset{*}{\mathbf{X}},\mathbf{Z},K)]. \tag{58}$$

Уравнение (58) не имеет аналитического решения, поэтому для определения его решения воспользуемся предложенной в [14] итерационной процедурой. При фиксированной матрице K на первом шаге итерации примем $\overset{*}{\mathbf{X}}=\overset{*}{\mathbf{X}}_1$ в виде единичного m-мерного куба с центром в начале координат, радиус $r\,(\overset{*}{\mathbf{X}}_1)$ которого равен $r\,(\overset{*}{\mathbf{X}}_1)=m.$ Далее по соотношениям (51)–(54) определяем $\overline{\Gamma}(\overset{*}{\mathbf{X}}_1,\mathbf{Z},K)$ и вычисляем радиус $r\,[\overline{\Gamma}(\overset{*}{\mathbf{X}}_1,\mathbf{Z},K)]$ этого множества, равный $r\,[\overline{\Gamma}(\overset{*}{\mathbf{X}}_1,\mathbf{Z},K)]=mr_i[\overline{\Gamma}(\overset{*}{\mathbf{X}}_1,\mathbf{Z},K)],$ $i=\overline{1;\,m},$ где $r_i(\cdot)$ — радиусы интервальных множеств $\overline{\gamma}_i\,(\overset{*}{\mathbf{X}}_1,\mathbf{Z},K),$ образующих интервальное множество $r\,[\overline{\Gamma}(\overset{*}{\mathbf{X}}_1,\mathbf{Z},K)],$ и находим величины $\Delta\,r_i=r_i[\overline{\Gamma}(\overset{*}{\mathbf{X}}_1,\mathbf{Z},K)]-$ $-r_i(\overset{*}{\mathbf{X}}_1),\ \ i=\overline{1;\,m}.$ Затем действуем по правилу деления отрезков $\Delta\,r_i$ пополам и величины $r_i(\overset{*}{\mathbf{X}}_k),\ \ i=\overline{1;\,m},$ изменяем по алгоритму:

$$r_{i+1}(\overset{*}{\mathbf{x}}_{i,k+1})=r_i(\overset{*}{\mathbf{x}}_{i,k})+0{,}5\Delta\,r_i,\ \ i=\overline{1;\,m}.$$

Этот итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будут выполнены неравенства $\left|\Delta r_i\right| \le \varepsilon_i,\ i = \overline{1; m},$ где ε_i — заданная допустимая погрешность.

Далее начинаем итерационный процесс определения матрицы $K = \overset{*}{K},$ минимизирующей величину $r[\overline{\Gamma}(\overset{*}{\mathbf{X}}, \mathbf{Z}, K)].$ Для этого, приняв матрицу K равной $\underline{K} = \operatorname{diag}\{\underline{k}_i\}_{i=1}^{m}$ и $\overline{K} = I,$ определяем величины $r[\overline{\Gamma}(\overset{*}{\mathbf{X}}_s, \mathbf{Z}, \underline{K})]$ и $r[\overline{\Gamma}(\overset{*}{\mathbf{X}}_s, \mathbf{Z}, \overline{K})],$ где $s = 1, 2, 3, \ldots$ — номер шага итерации. Затем действуем по правилу деления отрезков $[(\overline{k}_i = 1) - \underline{k}_i],\ i = \overline{1; m},$ пополам и продолжаем итерационный процесс определения оптимальных величин $k_i = \overset{*}{k}_i,\ i = \overline{1; m}.$

Все вычисления, необходимые для определения оптимальной матрицы $\overset{*}{K},$ выполняются в режиме off-line, а в режиме on-line реализуется управление $U_n = -B^{-1} \overset{*}{K} F(Y_n).$

Заключение

Использование гарантированных оценок погрешностей измерений позволило получить конструктивное решение задач синтеза управления для таких классов линейных и нелинейных объектов, в которых основные возмущения, не имеющие вероятностной природы, действуют не непосредственно на них, а на их измерительные элементы.

Для линейных и нелинейных объектов управления достаточно широкого класса предложены алгоритмы управления, минимизирующие радиус инвариантного множества, порождаемого наличием помех измерений, — аналог величины дисперсии при вероятностной природе помех.

Совместное использование результатов работ [7, 9] с результатами, полученными в статье, позволяет обобщить их на класс динамических систем с параметрической неопределенностью (на семейство динамических систем).

В.М. Кунцевич

СИНТЕЗ КЕРУВАННЯ ЛІНІЙНИМИ І НЕЛІНІЙНИМИ ДИНАМІЧНИМИ СИСТЕМАМИ ПРИ ОБМЕЖЕНИХ ПОХИБКАХ ВИМІРУ ВЕКТОРА СТАНУ

Проведено конструктивний розв'язок задачі синтезу керування лінійними та деякого класу нелінійними дискретними динамічними системами, на які основні обмежені збурення діють не безпосередньо, а на їх вимірювальні елементи.

V.M. Kuntsevich

CONTROL SYNTHESIS FOR LINEAR AND NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS UNDER BOUNDED DISTURBANCES IN MEASUREMENTS OF STATE VECTOR

The paper provides a constructive approach to solution of control synthesis problem for linear and nonlinear discrete-time dynamic systems under bounded disturbances. The disturbances affect particularly the state vector measurements.

1. *Кунцевич В.М., Волосов В.В.* Эллипсоидальные и интервальные оценки вектора состояния семейств линейных и нелинейных дискретных динамических систем // Кибернетика и системный анализ. — 2015. — **51**, № 1. — С. 73–84.
2. *Волосов В.В.* Об управлении ориентацией космического аппарата в орбитальной системе координат с использованием эллипсоидальных оценок его вектора состояния // Проблемы управления и информатики. — 1998. — № 5. — С. 31–41.
3. *Ефименко Н.В., Новиков А.К.* Регуляризованные эллипсоидальные наблюдатели и их применение в задаче определения ориентации космического аппарата // Там же. — 1998. — № 6. — С. 145–154.
4. *Кунцевич В.М., Пшеничный Б.Н.* Минимальные инвариантные множества динамических систем с ограниченными возмущениями // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 1. — С. 74–81.
5. *Кунцевич В.М., Поляк Б.Т.* Инвариантные множества нелинейных дискретных систем с ограниченными возмущениями и задачи управления // Проблемы управления и информатики. — 2009. — № 6. — С. 6–21.
6. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 3. — С. 106–125.
7. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // Там же. — 2008. — № 5. — С. 72–90.
8. *Хлебников М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений: линейный динамический регулятор по выходу // Там же. — 2011. — № 4. — С. 27–42.
9. *Хлебников М.В.* Нехрупкий регулятор для подавления внешних возмущений // Там же. — 2010. — № 4. — С. 106–119.
10. *Хлебников М.В., Поляк Б.Т., Кунцевич В.М.* Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) // Там же. — 2011. — № 11. — С. 9–59.
11. *Кунцевич В.М.* О «сверхустойчивых» дискретных системах // Там же. — 2007. — № 4. — С. 61–66.
12. *Кунцевич А.В., Кунцевич В.М.* Инвариантные множества семейств линейных и нелинейных дискретных систем с ограниченными возмущениями // Там же. — 2012. — № 1. — С. 92–106.
13. *Кунцевич В.М., Куржанский А.Б.* Области достижимости линейных и некоторых классов нелинейных дискретных систем и управление ими // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2010. — № 1. — С. 5–21.
14. *Кунцевич А.В., Кунцевич В.М.* Устойчивость в области нелинейных разностных включений // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 5. — С. 11–18.

Получено 05.11.2015