

МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ И АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.6:541.18

М.Р. Петрик



ВЫСОКОСКОРОСТНЫЕ МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ ФИЛЬТРАЦИИ–КОНСОЛИДАЦИИ СЖИМАЕМЫХ СРЕД ВЛАГОНАСЫЩЕННЫХ МИКРОПОРИСТЫХ ЧАСТИЦ

Введение

Математическое моделирование исследования процессов экстрагирования жидкости из микропористых биоматериалов в химической, перерабатывающей, фармакологической и других отраслях применяется не только для построения их адекватных моделей, но и для задания их кинетических параметров. Рабочие среды исследуемых процессов состоят из сети частиц и клеток, междучастичных и междуклеточных пространств, образующих пути транспорта жидкости. Механизмы фильтрации–консолидации зависят от комплекса сложных факторов: размера частиц [1–4], структуры биологических тканей, их проницаемости, проницаемости междучастичных путей, что существенно влияет на поведение твердой и жидкой фаз. Эти агломераты и каналы сильносжимаемые и могут быть полностью или частично закрытыми в течение процесса вытеснения. Механизмы разделения твердой и жидкой фаз из биопористых биологических материалов малоизучены. В настоящее время большинство статей по моделированию таких процессов базируется на фильтрации–консолидации грунтов [5, 6] и минеральных фильтрах [7], описывающих движение макропотоков жидкости в пористых средах по аналогии с диффузией Фика. Однако когда слой микропористых частиц подвержен внешнему давлению, частицы, состоящие из «мягких» тканей, начинают сжиматься и наблюдается уменьшение пространства каналов в междучастичном (interparticle space) и внутрочастичном (intraparticle space) пространствах, что влияет на суммарную проницаемость слоя. В [8] для оценки консолидации и ползучести компонентов слоя предложена приближенная модель, базирующаяся на допущении, что интенсивность потока из частицы в междучастичное пространство пропорциональна разнице давлений: давления внутри частицы, усредненного по координате размера и давления снаружи частицы. Более реальные модели твердой и жидкой фаз в биопористом слое микропористых частиц и каналов транспорта, учитывающие влияние изменения проницаемости частиц на общую проницаемость слоя [9, 10].

В [11] с помощью предложенных и линеаризованных нами моделей фильтрации–консолидации [12] получены отдельные задачи идентификации и численные методы их дискретизации, а также выражения градиентов функционалов-невязок

для идентификации параметров. Однако описанные в [11] подходы имеют в некотором смысле более узкий диапазон применения. Во-первых, рассматриваемые здесь критерии идентификации в виде распределений давлений в слое и частице не совсем удовлетворяют условиям реальных наблюдений. В частности, не представляется возможным физически наблюдать изменение давления в жидкости для отдельно взятых частиц. Другой ограничивающий фактор — ограничение на скорость идентификации за счет большого количества внутренних итераций при построении модельных решений, что также существенно замедляет идентификацию большого количества параметров.

В настоящей статье для линеаризованных моделей фильтрации–консолидации в средах микропористых частиц сформулированы задачи идентификации параметров моделей с использованием функционала-невязки, учитывающего изменение суммарного потока жидкости на поверхности наблюдения. Предложены высокопродуктивные методы реализации задач коэффициентной идентификации на основе аналитических решений прямых и сопряженных задач, получены явные выражения компонентов градиентов функционалов-невязок для идентификации параметров модели.

Математическая формулировка проблемы

Считается, что клеточные частицы, содержащие жидкость, как микропористый слой подвергаются сжатию. Жидкость течет во внутрочастичном пространстве, за пределами частиц — в междучастичном. Слой частиц рассматривается как бипористостая среда. Сеть макропор во внутрочастичном пространстве образует область первой пористости с низкой емкостью и высокой гидравлической проницаемостью. Частицы, содержащие жидкость, образуют область второй пористости: с высокой емкостью и низкой гидравлической проницаемостью. Потоки жидкости возникают как отдельно в каждой из двух областей пористости, так и между ними. Дискретная и непрерывная концептуализация двойной пористости среды хорошо наблюдается в механике горных пород, применяемых в сети трещин в естественно трещиноватых коллекторах [4].

Основные допущения. Задача строится на основе уравнений неразрывности и закона фильтрации Дарси для междучастичного и внутрочастичного пространств. Уравнения консолидации базируются на начальных и граничных уравнениях для системы с двойной пористостью. Здесь приняты следующие допущения [9].

- Уравнения неразрывности для жидкой фазы в междучастичном и внутрочастичном пространствах соответственно запишем

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial(1 - \varepsilon_1)}{\partial t} + \frac{\partial(1 - \bar{\varepsilon}_2)}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

- Уравнения неразрывности для жидкой и твердой фаз во внутрочастичном пространстве имеют вид

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} + \frac{\partial q_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(1 - \varepsilon_2)}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Здесь ε_1 , ε_2 — соответственно междучастичная и внутрочастичная пористости,

$\bar{\varepsilon}_2$ — средняя внутрочастичная пористость, $\bar{\varepsilon}_2 = \frac{1}{R} \int_0^R \varepsilon_2(t, x, z) dx$, q_1 , q_2 и v_1 ,

v_2 — локальные скорости жидкости (local liquid velocities) и скорости движения твердой фазы (local solid velocities) в междучастичном и внутрочастичном пространствах.

• Относительные скорости потоков жидкой фазы по отношению к твердой (relatives liquid to solid flow velocities) в междучастичном (u_1) и внутричастичном (u_2) пространствах подчиняются закону фильтрации Дарси:

$$u_1 = q_1 - \frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} v_1 = -\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial P_1}{\partial z}, \quad u_2 = q_2 - \frac{\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2} v_2 = -\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial P_2}{\partial x}, \quad (3)$$

где P_1 , P_2 и $k_1 = 1/r_1$, $k_2 = 1/r_2$ — давление в жидкой фазе и проницаемости в междучастичном и внутричастичном пространствах соответственно, μ — вязкость жидкости.

• Контакты между влагосодержащими частицами упругие. Общие внешние напряжения в междучастичном и внутричастичном пространствах соответственно

$$\sigma = (1 - \varepsilon_1)\sigma_1 + \varepsilon_1 P_1, \quad \sigma_1 = (1 - \varepsilon_2)\sigma_2 + \varepsilon_2 P_2, \quad (4)$$

где σ_2 — напряжение на твердой матрице частицы, содержащей жидкость.

• Эффективное давление на частицы для бипористой системы (разность между общим напряжением и давлением жидкости в порах) на скелет (P_{s1}) и частицу (P_{s2}) соответственно запишем [4, 8]

$$P_{s1} = \sigma - P_1 = (1 - \varepsilon_1)(\sigma_1 - P_1), \quad P_{s2} = \sigma_1 - P_2 = P_1 + \frac{\sigma - P_1}{1 - \varepsilon_1} - P_2 \approx \sigma - P_2, \quad (5)$$

где $\sigma = P_E$ (вызывается внешним давлением), $P_{s1} = P_E - P_1$ и $P_{s2} = P_E - P_2$.

• Средняя внутричастичная пористость — функция среднего эффективного давления $\bar{P}_{s2} = P_E - \bar{P}_2$, где $\bar{P}_2 = \frac{1}{R} \int_0^R P_2(t, x, z) dx$ — среднее давление жидкости во внутричастичном пространстве.

Уравнения неразрывности (1), (2) с учетом (3) и использованием координат на основе объема влагосодержащих частиц (liquid containing particles — LCP)

$$dz_m = \frac{dz}{1 + e_1} \text{ и нерастворимой твердой фазы (insoluble solids — IS) } dx_m = \frac{dx}{1 + e_2}$$

имеют вид:

$$\frac{\partial e_1}{\partial t} + \frac{1}{(1 + \bar{e}_2)^2} \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial z_m} = 0, \quad \frac{\partial e_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_m} = 0, \quad (6)$$

$$\text{где } \frac{\partial e_1}{\partial t} = \frac{1}{G_1} \frac{\partial P_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial e_2}{\partial t} = \frac{1}{G_2} \frac{\partial P_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial t} = \frac{1}{G_2} \frac{\partial \bar{P}_2}{\partial t}, \quad G_1 = -\frac{\partial P_{s1}}{\partial e_1}, \quad G_2 = -\frac{\partial P_{s2}}{\partial e_1} —$$

$$\text{модули сжимаемости, } e_1 = \frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1}, \quad e_2 = \frac{\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2}, \quad \bar{e}_2 = \frac{\bar{\varepsilon}_2}{1 - \bar{\varepsilon}_2}.$$

Линеаризация зависимостей (6) согласно схемам, предложенным в [10, 12], приводит к уравнениям консолидации в междучастичном и внутричастичном пространствах.

Прямая задача

В областях $\Omega_T = (0, T) \times (0, h)$ и $\Omega_T \times (0, R)$ распределения давлений в жидкой фазе $P_1(t, z)$ и $P_2(t, x, z)$ соответственно удовлетворяют системе уравнений консолидации в частных производных:

$$\frac{\partial P_1(t, z)}{\partial t} = b_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} - \beta \frac{\partial \bar{P}_2(t, z)}{\partial t}, \quad z \in (0, h), \quad (7)$$

$$\frac{\partial P_2(t, x, z)}{\partial t} = b_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2}, \quad x \in (0, R), \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T). \quad (8)$$

Приведем начальные условия:

$$P_1(t, z)|_{t=0} = P_E, \quad P_2(t, z)|_{t=0} = P_E, \quad (9)$$

и краевые условия:

$$P_1(t, z)|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial P_1}{\partial z}|_{z=h} = 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad P_2(t, x, z)|_{x=R} = P_1(t, z), \quad (11)$$

где $b_1 = \frac{G_1}{\mu_1(1+e_1)}$, $b_2 = \frac{G_2}{\mu_2(1+e_2)}$ — коэффициенты консолидации в междучастичном и внутривчастичном пространствах соответственно, $\beta = \frac{1}{(1+\bar{e}_2)^2} \frac{G_1}{G_2}$ — фактор

эластичности материала, h — толщина слоя, R — полутолщина частицы.

Условие наблюдения. Считается, что на поверхности измерения $z = \gamma$, $\gamma \subset \Omega = [0, h]$, известен поток жидкости

$$\begin{aligned} u(t, z) \Big|_{z=\gamma} &\equiv - \left(\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial}{\partial z} P_1(t, z; b_1, b_2, \beta) + \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial}{\partial z} \bar{P}_2(t, z; b_1, b_2, \beta) \right) \Big|_{z=\gamma} = \\ &= M_{\text{exp er}}(t) \Big|_{z=\gamma}, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (12)$$

Выбор функционала-невязки. Функционал-невязку, минимизирующий отклонение модельного решения от значений экспериментального следа на $\gamma \in \Omega$, использующийся для реализации процедуры идентификации неизвестных кинетических параметров влагопереноса в междучастичном и внутривчастичном пространствах (коэффициентов консолидации и фактора эластичности), запишем в виде [13]

$$J(b_1, b_2, \beta) = \frac{1}{2} \int_0^T [E_{\text{error}}(b_1, b_2, \beta, t, \gamma)]^2 dt. \quad (13)$$

Здесь $E_{\text{error}}(b_1, b_2, \beta, t, \gamma)$ — выражение невязки между модельными и экспериментальными значениями искомых параметров,

$$\begin{aligned} E_{\text{error}}(b_1, b_2, \beta, t, \gamma) &= \left[- \left(\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial}{\partial z} P_1(t, z; b_1, b_2, \beta) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial}{\partial z} \bar{P}_2(t, z; b_1, b_2, \beta) \right) \Big|_{z=\gamma} - M_{\text{exp er}}(t) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

$M_{\text{exp er}}(t)$ — вектор экспериментальных данных на поверхности измерений $\gamma \in \Omega$.

В результате получена задача идентификации (7)–(12): нахождение неизвестных функций $b_1 \in \Omega_T$, $b_2 \in \Omega_T$, $\beta \in \Omega_T$, $\Omega_T = D_1$ ($b_1 > 0, b_2 > 0, \beta > 0$), где $P_1(t, z) + \bar{P}_2(t, z)$ удовлетворяют условиям (10) для поверхности наблюдения $\gamma \subset \Omega$ среды [13].

Градиентный метод решения задачи коэффициентной идентификации. Решение задачи идентификации (7)–(12) сводится к задаче оптимизации функционала-невязки (13) с постепенным совершенствованием решения посредством особой процедуры регуляризации с использованием градиентных методов. Следуя [13, 14] и используя градиентный метод минимизации погрешности для идентификации распределений коэффициентов консолидации в междучастичном b_2 и внутривчастичном b_1 пространствах и коэффициента эластичности материала β , получим регуляризационные выражения для $n + 1$ -го шага идентификации:

$$\begin{aligned} b_1^{n+1}(t) &= b_1^n(t) - \nabla J_{b_1}^n(t) \frac{E_{error}(b_1^n, b_2^n, \beta; t, \gamma)^2}{\|\nabla J_{b_1}^n(t)\|^2 + \|\nabla J_{b_2}^n(t)\|^2 + \|\nabla J_{\beta}^n(t)\|^2}, \quad t \in (0, T), \\ b_2^{n+1}(t) &= b_2^n(t) - \nabla J_{b_2}^n(t) \frac{E_{error}(b_1^n, b_2^n, \beta; t, \gamma)^2}{\|\nabla J_{b_1}^n(t)\|^2 + \|\nabla J_{b_2}^n(t)\|^2 + \|\nabla J_{\beta}^n(t)\|^2}, \quad t \in (0, T), \\ \beta^{n+1}(t) &= \beta^n(t) - \nabla J_{\beta}^n(t) \frac{E_{error}(b_1^n, b_2^n, \beta; t, \gamma)^2}{\|\nabla J_{b_1}^n(t)\|^2 + \|\nabla J_{b_2}^n(t)\|^2 + \|\nabla J_{\beta}^n(t)\|^2}, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $J(b_1, b_2, \beta, \dots)$ — функционал-невязка на поверхности изменений $\gamma \in \Omega_T$ (13), $\nabla J_{b_1}^n(t)$, $\nabla J_{b_2}^n(t)$, $\nabla J_{\beta}^n(t)$ — компоненты градиента функционала-невязки $J(b_1, b_2, \beta, \dots)$ по искомым функциям $b_1 \in \Omega_T, b_2 \in \Omega_T, \beta \in \Omega_T$, $\|\nabla J_n^n(t)\|^2 = \int_0^T [\nabla J_n^n(t)]^2 dt$, $u \in \{b_1, b_2, \beta, \dots\}$ — квадрат нормы u -компоненты градиента функционала-невязки.

Точное аналитическое решение прямой задачи (7)–(11) для моделирования распределений давлений без учета условия наблюдения (12) в предположении, что известны коэффициенты консолидации b_1, b_2 , фактор эластичности β и другие параметры, построены с помощью интегральных преобразований Фурье и операционного метода Хевисайда в [10, 15].

Технология получения аналитических выражений компонентов градиента функционала-невязки

Построение расширенного функционала. Перейдем к безусловной экстремальной форме рассматриваемой задачи идентификации, вводя расширенный функционал [14, 16]

$$\Phi(b_1, b_2, \beta, \dots) = J + I_1 + I_2, \quad (16)$$

в котором I_1, I_2 — составляющие, учитывающие специфику основных уравнений баланса (7), (8) соответственно для выходной задачи идентификации (7)–(12):

$$I_1 = \int_0^T \int_0^h \phi(t, z) \left(\frac{\partial P_1}{\partial t} - b_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial \bar{P}_2}{\partial t} \right) dz dt, \quad (17)$$

$$I_2 = \frac{1}{R} \int_0^T \int_0^h \int_0^R \psi(t, x, z) \left(\frac{\partial P_2}{\partial t} - b_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} \right) dx dz dt. \quad (18)$$

Здесь J — функционал-невязка, определяемый формулой (13), ϕ, ψ — неизвестные множители Лагранжа, подлежащие определению из условия стационарности функционала $\Phi(b_1, b_2)$ (равенства нулю его полной вариации) [14, 16]:

$$\Delta\Phi(b_1, b_2, \beta) \equiv \Delta J + \Delta I_1 + \Delta I_2 = 0. \quad (19)$$

Отдельные члены в (16) вычисляем в предположении, что величины b_1, b_2, β получили приращения $\Delta b_1, \Delta b_2, \Delta\beta$. В результате давление $P_1(t, z)$ изменится на некоторое приращение $\Delta P_1(t, z)$, а давление $P_2(t, x, z)$ — на $\Delta P_2(t, x, z)$.

Начально-краевая задача в приращениях. Подставляя в исходную начально-краевую задачу (7)–(12) вместо b_1, b_2, β и $P_1(t, z), P_2(t, x, z), P_1(t, z) + \Delta P_1(t, z)$ соответствующие величины с приращениями $b_1 + \Delta b_1, b_2 + \Delta b_2, \beta + \Delta\beta, P_2(t, x, z) + \Delta P_2(t, x, z)$ и вычитая из преобразованных уравнений и условий задачи соответствующие компоненты уравнений и условий задачи (7)–(12), пренебрегая членами второго порядка малости, получаем постановку начально-краевой задачи в приращениях для определения величин $\Delta P_1(t, z)$ и $\Delta P_2(t, x, z)$ (которая будет использоваться для определения аналитических выражений компонентов градиентов функционала $\Delta J_{b_1}^n(t), \Delta J_{b_2}^n(t), \Delta J_{\beta}^n(t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta P_1(t, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left(b_1 \frac{\partial}{\partial z} \Delta P_1 \right) - \beta \frac{\partial \Delta \bar{P}_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta b_1 \frac{\partial}{\partial z} P_1 \right) - \Delta \beta \frac{\partial \bar{P}_2}{\partial t}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta P_2(t, x, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(b_2 \frac{\partial}{\partial x} \Delta P_2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta b_2 \frac{\partial}{\partial x} P_2 \right), \quad (21)$$

$$\Delta P_1(t, z)|_{t=0} = 0, \quad \Delta P_2(t, x, z)|_{t=0} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta P_2(t, x, z)|_{x=0} = 0, \quad \Delta P_2(t, x, z)|_{x=R} = \Delta P_1(t, z), \quad (23)$$

$$\Delta P_1(t, z = h) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \Delta P_1(t, z = 0) = 0. \quad (24)$$

Вычисление приращений расширенного функционала Лагранжа. Предполагая, что искомые вектор-функции $(P_1(t, z) + \Delta P_1(t, z), P_2(t, x, z) + \Delta P_2(t, x, z))$ получили приращения (вариации) по всем составляющим расширенного функционала $\Phi(b_1, b_2, \beta)$, пренебрегая членами второго порядка малости, получим приращение функционала-невязки (14):

$$\Delta J(b_1, b_2, \beta) = \int_0^T \int_0^h E_{\text{error}}(t) \delta(z - \gamma) \left(-\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial}{\partial z} \Delta P_1(t, z) - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial}{\partial z} \Delta \bar{P}_2(t, z) \right) dz dt, \quad (25)$$

где

$$E_{\text{error}}(b_1, b_2, \beta; t, \gamma) = \left[-\left(\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial}{\partial z} P_1(t, z; b_1, b_2, \beta) + \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial}{\partial z} \bar{P}_2(t, z; b_1, b_2, \beta) \right) - M_{\text{exper}}(t) \right]_{z=\gamma}.$$

Адаптируя общую формулу для вычисления приращения функционала невязки [16] к (25) $\Delta J(u + \Delta u) - \Delta J(u) = 2(Au - q, A\Delta u)_\gamma + O\|\Delta u\|_\gamma^2 = (2A^*(Au - q), \Delta u)_\gamma + O\|\Delta u\|_\gamma$, где A^* — оператор, сопряженный с оператором A , получим

$$\Delta J(b_1, b_2, \beta) = \int_0^T \int_0^h \frac{\partial}{\partial z} E_{\text{error}}(t, \gamma) \delta(z - \gamma) \left(-\frac{1}{\mu_1} \Delta P_1(t, z) - \frac{1}{\mu_2} \Delta \bar{P}_2(t, z) \right) dz dt \quad (26)$$

и приращения составляющих функционала I_1, I_2 (в результате интегрирования по частям с использованием начальных и краевых условий прямой задачи (7)–(11)):

$$\Delta I_1 = \int_0^T \int_0^h \left(\frac{\partial \phi(t, z)}{\partial t} + b_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \Delta P_1 + \beta \frac{\partial \bar{\psi}(t, z)}{\partial t} \Delta \bar{P}_2 dz dt, \quad (27)$$

$$\Delta I_2 = \frac{1}{R} \int_0^T \int_0^h \int_0^R \left(\frac{\partial \psi(t, x, z)}{\partial t} + b_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \Delta P_2 dx dz dt. \quad (28)$$

Постановка сопряженной краевой задачи. Согласно исходной начально-краевой задаче (7)–(12) с учетом (26)–(28) для каждого приближения b_1^n, b_2^n, β^n решения b_1, b_2, β получаем постановку сопряженной краевой задачи:

$$\frac{\partial \phi(t, z)}{\partial t} + b_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial \bar{\psi}(t, z)}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial}{\partial z} E_{\text{error}}^n(t, \gamma) \delta(z - \gamma), \quad (29)$$

$$\frac{\partial \psi(t, x, z)}{\partial t} + b_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial}{\partial z} E_{\text{error}}^n(t, \gamma) \delta(z - \gamma), \quad (30)$$

$$\phi(t, z)|_{t=T} = 0; \quad \psi(t, x, z)|_{t=T} = 0 \quad \text{при } t=T; \quad (31)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi(t, z=h) = 0, \quad \phi(t, z=0), \quad (32)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi(t, x, z)|_{x=0} = 0, \quad \psi(t, x, z)|_{x=R} = \phi(t, z). \quad (33)$$

Здесь $E_{\text{error}}^n(t)$ — n -е приближение невязки (11) (минимизируемое на каждом шаге регуляризации):

$$\bar{\psi}(t, z) = \frac{1}{R} \int_0^R \psi(t, x, z) dx, \quad \delta(z) \text{ — дельта-функция Дирака.}$$

Построение аналитического решения сопряженной задачи. По определению аналитическое решение сопряженной задачи выполнено с использованием операционного метода Хевисайда подобно решению прямой задачи, изложенной в [9]. Применяя к задаче (30), (31), (33) интегральное преобразование Фурье (cos) по переменной x , получим [15, 17]:

$$\psi(t, x, z) = \frac{2}{R} \sum_{m=0}^{\infty} \left[(-1)^{m+1} b_2 \eta_m \int_t^T e^{b_2 \eta_m^2 (t-\tau)} \phi(\tau, z) d\tau - \frac{1}{\mu_2} \frac{(-1)^m}{\eta_m} \int_t^T e^{b_2 \eta_m^2 (t-\tau)} F(\tau) d\tau \right] \cos \eta_m x. \quad (34)$$

Предполагается, что искомые функции ϕ и ψ — оригиналы по Лапласу по временной переменной t . Подставляя (34) в уравнение (29), произведя замену $t = t - T$ в задаче (29)–(32) и применяя к ней преобразованное интегральное преобразование Лапласа, получаем задачу Коши:

$$b_1 \frac{d^2 \phi^*(s, z)}{dz^2} + s(\phi^*(s, z) + \beta \bar{\psi}^*(s, z)) = -\frac{1}{\mu r_1} F^*(\tau), \quad (35)$$

$$\phi^*(s, z)|_{z=0} = 0; \quad \frac{d}{dz} \phi^*(s, z)|_{z=h} = 0. \quad (36)$$

Здесь изображение $\bar{\psi}^*(s, z)$ имеет вид

$$\bar{\psi}^*(s, z) = \frac{2}{R^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{\frac{s}{b_2} + \eta_m^2} \phi^*(s, z) - \frac{1}{\mu r_2 b_2} \frac{(-1)^m}{\eta_m \left(\frac{s}{b_2} + \eta_m^2 \right)} F^*(s) \right]. \quad (37)$$

Находя пределы рядов $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\frac{s}{b_2} + \eta_m^2}$ и $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\frac{s}{b_2} + \eta_m^2}$ и подставляя преобразованное выражение (37) в (35), получаем [18]

$$\begin{aligned} b_1 \frac{d^2 \phi^*(s, Z)}{dZ^2} + \left(s - \frac{\beta}{R} \sqrt{b_2} \sqrt{s} \cdot th \sqrt{\frac{s}{b_2} R} \right) \phi^*(s, Z) = \\ = -\frac{1}{\mu r_1} \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \frac{\beta}{R} \left(1 - \frac{1}{ch \sqrt{\frac{s}{b_2} R}} \right) \right) F^*(\tau). \end{aligned} \quad (38)$$

Применяя к (38) конечное интегральное преобразование Фурье по переменной z с учетом краевых условий [9, 15], имеем

$$\phi_n^*(s) = -\frac{1}{\mu r_1} \frac{1}{\omega(s)} \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \frac{\beta}{R} \left(1 - \frac{1}{ch \sqrt{\frac{s}{b_2} R}} \right) \right) F_n^*(s), \quad (39)$$

где $\omega_n(s) = s - b_1 \lambda_n^2 - \frac{\beta}{R} \sqrt{b_2} \sqrt{s} \cdot th \sqrt{\frac{s}{b_2} R}$, $\lambda_n = \frac{2n+1}{2h} \pi$, $\eta_m = \frac{2m+1}{2R} \pi$, $\tilde{\eta}_m = \frac{2m+1}{2R} \sqrt{b_2} \pi$, $n, m = \overline{0, \infty}$, $\{v_j\}$, $j = \overline{1, \infty}$, $n = \overline{0, \infty}$, — корни трансцендентного уравнения

$$v^2 + b_1 \lambda_n^2 - \beta \cdot v \frac{\sqrt{b_2}}{R} tg \frac{v}{\sqrt{b_2}} R = 0. \quad (40)$$

Переход к оригиналу по Лапласу по переменной t в (39) осуществляем согласно формуле

$$\phi_n^*(t) = -\frac{1}{\mu r_1} \left(L^{-1} \left[\frac{1}{\omega(s)} \right] - \frac{r_1}{r_2} \frac{\beta}{R} \left(L^{-1} \left[\frac{1}{\omega(s)} \right] - L^{-1} \left[\frac{1}{\omega(s) ch \sqrt{\frac{s}{b_2} R}} \right] \right) \right) * F(\tau), \quad (41)$$

где

$$L^{-1} \left[\frac{1}{\omega(s)} \right] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-v_{jn}^2 t}}{1 - \frac{\beta_2}{2} \left(\frac{\sqrt{b_2}}{v_{jn} R} \operatorname{tg} \frac{v_{jn} R}{\sqrt{b_2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{v_{jn} R}{\sqrt{b_2}}} \right)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-v_{jn}^2 t}}{\overline{\omega}(v_{jn})}; \quad (42)$$

$$L^{-1} \left[\frac{1}{\omega(s) ch \sqrt{\frac{s}{b_2}} R} \right] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-v_{jn}^2 t}}{ch \frac{v_{jn} R}{\sqrt{b_2}} \overline{\omega}(v_{jn})} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\eta_{kn}^2 t}}{\frac{R}{\sqrt{b_2}} \sin \frac{\eta_{kn} R}{\sqrt{b_2}} \overline{\omega}(\eta_{kn})}, \quad (43)$$

$$\overline{\omega}(v) = 1 - \frac{\beta}{2} \left(\frac{\sqrt{b_2}}{v R} \operatorname{tg} \frac{v R}{\sqrt{b_2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{v R}{\sqrt{b_2}}} \right).$$

Осуществляя обратный переход к оригиналу по переменной z , с учетом (42), (43) получаем единственное решение сопряженной краевой задачи (29)–(33) [9, 15]:

$$\begin{aligned} \phi(t, z) = & -\frac{1}{\mu_1} \frac{2}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-v_{jn}^2 (t-\tau)}}{\overline{\omega}_n(v_{jn})} \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \frac{\beta}{R} \right) \left[1 - \frac{1}{ch \frac{v_{jn} R}{\sqrt{b_2}} \overline{\omega}_n(v_{jn})} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{r_1}{r_2} \frac{\beta}{R} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\eta_k^2 (t-\tau)}}{\frac{R}{\sqrt{b_2}} \sin \frac{\eta_k R}{\sqrt{b_2}} \overline{\omega}_n(\eta_k)} \right] F(\tau) d\tau \sin \lambda_n z. \end{aligned} \quad (44)$$

Теорема о разрешимости сопряженной краевой задачи. Если выполняется условие однозначной разрешимости сопряженной краевой задачи (29)–(33), заданные и искомые функции — это оригиналы по Лапласу по временной переменной t и удовлетворяют условиям применения конечного интегрального преобразования Фурье по геометрической переменной z и дополнительно по переменной x для функции ψ , то решение краевой задачи (29)–(33) существует и единственно и определяется формулами (34), (44).

Получение формул выражений градиентов функционала-невязки

Связь между прямой задачей и сопряженной. Базовые уравнения в приращениях (20), (21) и сопряженной задаче (29), (30) запишем в операторной форме:

$$Lw(t, x, z) = X, \quad w \in (0, R) \cup \Omega_T,$$

$$L^* \Psi(t, x, z) = Y^n(t, \gamma), \quad \Psi \in (0, R) \cup \Omega_T, \quad (45)$$

$$\text{где } L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(b_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) & \beta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R \dots dx \\ 0 & \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(b_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{bmatrix}, \quad L^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(b_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) & \beta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R \dots dx \\ 0 & \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(b_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{bmatrix},$$

$$w(t, x, z) = \begin{bmatrix} \Delta P_1(t, z) \\ \Delta P_2(t, x, z) \end{bmatrix}, \quad \Psi(t, x, z) = \begin{bmatrix} \phi(t, z) \\ \psi(t, x, z) \end{bmatrix}.$$

Правые части формулы (45) имеют вид

$$X(t, x, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta b_1 \frac{\partial}{\partial z} P_1(t, z) \right) - \Delta \beta \frac{\partial}{\partial t} \bar{P}_2(t, z) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta b_2 \frac{\partial}{\partial x} P_2(t, x, z) \right) \end{bmatrix},$$

$$Y^n(t, x, z) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\mu r_1} \frac{\partial}{\partial z} E_{\text{error}}^n(t, \gamma) \delta(z - \gamma) \\ -\frac{1}{\mu r_2} \frac{\partial}{\partial z} E_{\text{error}}^n(t, \gamma) \delta(z - \gamma) \end{bmatrix}, \quad (46)$$

где L^* — оператор Лагранжа, сопряженный с оператором L .

Введем скалярное произведение

$$(w, v) = \begin{bmatrix} \int_0^T \int_0^h w_1(t, z) \dots dz dt & \frac{1}{R} \int_0^T \int_0^h \int_0^R w_2(t, x, z) \dots dx dz dt \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(t, z) \\ v_2(t, x, z) \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Приращение функционала-невязки (26), пренебрегая членами второго порядка малости, с учетом (47) для удобства последующих преобразований представим в виде

$$\Delta J(b_1, b_2, \beta) = (\tilde{w}(t, x, z), Y(t, \gamma)), \quad \tilde{w}(t, x, z) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\mu r_1} \Delta P_1(t, z) \\ -\frac{1}{\mu r_2} \Delta P_2(t, x, z) \end{bmatrix}. \quad (48)$$

С учетом равенства (45) правую часть (48) запишем

$$\Delta J(b_1, b_2, \beta) = (\tilde{w}(t, x, z), Y(t, \gamma)) = (\tilde{w}(t, x, z), L^* \Psi(t, x, z)). \quad (49)$$

С учетом тождества Лагранжа [16]

$$L \tilde{w}(t, x, z), \Psi(t, x, z) = (\tilde{w}(t, x, z), L^* \Psi(t, x, z)) \quad (50)$$

и равенства (44) получаем приращение функционала-невязки в следующем виде:

$$\Delta J(b_1, b_2, \beta) = (\tilde{X}(t, x, z), \Psi(t, x, z)). \quad (51)$$

Подставляя в уравнение (51) компоненты $\tilde{X}(t, x, z)$, получаем формулу, устанавливающую связь между прямой задачей (1)–(9) и сопряженной задачей (23)–(26), соответствующую получению явных выражений компонентов градиента функционала-невязки:

$$\Delta J(b_1, b_2, \beta) = \left(\phi(t, Z) - \frac{1}{\mu r_1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta b_1 \frac{\partial}{\partial z} P_1(t, z) \right) - \Delta \beta \frac{\partial}{\partial t} \bar{P}_2(t, z) \right) \right) + \left(\psi(t, x, z) - \frac{1}{\mu r_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta b_2 \frac{\partial}{\partial x} P_2(t, x, z) \right) \right). \quad (52)$$

Аналитические выражения градиентов функционала-невязки. Дифференцируя выражение (52) по Δb_1 , Δb_2 и $\Delta \beta$ соответственно и раскрывая скалярное произведение согласно (47), получаем требуемые аналитические выражения компонентов градиентов функционала-невязки для необходимых компонентов коэффициентов консолидации и параметра как функций от времени соответственно:

$$\nabla J_{b_2}(t) = -\frac{1}{\mu r_2} \frac{1}{R} \int_0^h \int_0^R \frac{\partial^2 P_2(t, x)}{\partial x^2} \psi(t, x, z) dx dz, \quad (53)$$

$$\nabla J_{b_1}(t) = -\frac{1}{\mu_1} \int_0^h \frac{\partial^2 P_1(t, z)}{\partial z^2} \phi(t, z) dz, \quad (54)$$

$$\nabla J_{\beta}(t) = \frac{1}{\mu_1} \int_0^h \frac{\partial \bar{P}_2(t, z)}{\partial t} \phi(t, z) dz. \quad (55)$$

Формулы градиентов $\nabla J_{b_1}^n(t)$, $\nabla J_{b_2}^n(t)$ включают аналитические решения прямой задачи (7)–(12) и сопряженной задачи (29)–(33). Использование высокоскоростных аналитических методов обеспечивает высокую продуктивность вычислительного процесса, сокращение большого количества итераций для каждого регуляризационного цикла.

Еще одно преимущество формул (53)–(55): они позволяют идентифицировать неизвестные кинетические параметры как функции от времени ($b_1(t)$, $b_2(t)$) и других координат. Это обеспечивает определение внутренней кинетики консолидации в междучастичном и внутривчастичном пространствах и дает новую визуализацию процесса в целом.

Численный анализ

Результаты численного моделирования и идентификации параметров показаны на рис. 1–4. Рис. 1 иллюстрирует процесс сходимости кривых распределения безразмерного потока жидкости на выходе из сжатого слоя влагосодержащих частиц на поверхности наблюдения $z = 0$ к кривой наблюдения (№ 8) при реализации процедуры пошаговой идентификации коэффициентов консолидации в междучастичном и внутривчастичном пространствах b_1 и b_2 соответственно согласно (15). Значения входных параметров, свойств частиц и данные наблюдения взяты из работ [9, 10], поскольку в данной публикации продолжается дальнейшее развитие изложенных результатов. В [9] исследованы компрессионно-консолидирующие свойства для двух видов биологических тканей: легко разрушаемых (better disrupted tissue) и тяжело разрушаемых (less disrupted tissue).

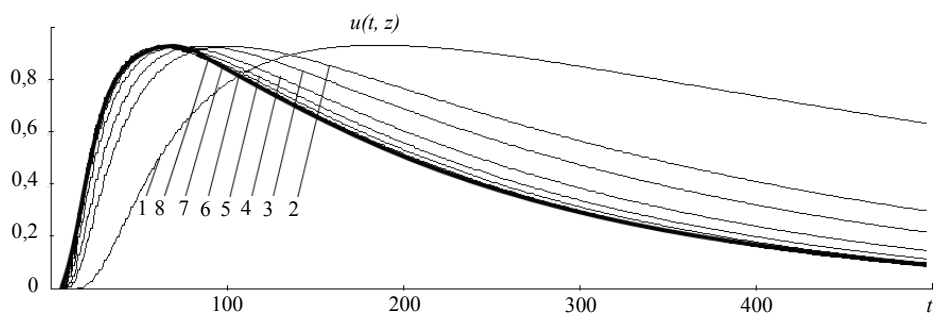


Рис. 1

Начальные приближения коэффициентов консолидации в междучастичном и внутривчастичном пространствах взяты для случая легко разрушаемых тканей, которые здесь принимались соответственно $b_1=6,0 \times 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$ и $b_2=1,0 \times 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$. Числа 1–7 на графиках рис. 1 соответствуют номерам блоков регуляризационных итераций, по обоим параметрам (b_1 и b_2) одновременно. Суммарное количество итераций по внешнему (b_1) и внутреннему контуру (b_2) для каждого блока в рамках функциональной модели регуляризации в среднем составляет 700–900 итераций.

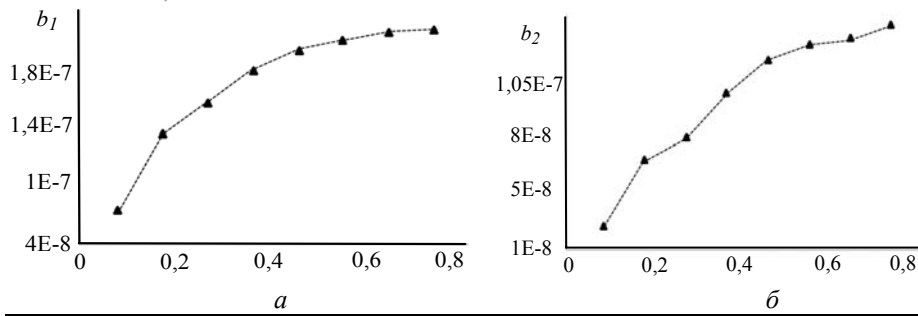


Рис. 2

На рис. 2 a , b показаны соответствующие эволюционные изменения усредненных на временном интервале процесса консолидации и вытеснения влаги из слоя коэффициентов консолидации в междучастичном пространстве b_1 и во внутричастичном b_2 , восстанавливаемых согласно регуляризационным зависимостям (15) от приведенных к общему количеству выполняемых итераций. Как видно из рис. 2, для двух последних блоков итераций (позиции 0,6–0,8) наблюдается стабилизация усредненных профилей коэффициентов консолидации. Для коэффициента консолидации b_1 получаем значение $1,8 \times 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, для коэффициента консолидации b_2 значение равно $1,0 \times 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$.

Аналогичные результаты получены при выборе других начальных приближений. В частности, при задании начальных приближений аналогичный процесс сходимости модельных распределений потоков жидкости к кривой наблюдения можно наблюдать с противоположной стороны (процесс «снизу») (рис. 3). При этом обеспечивается аналогичная картина эволюции коэффициентов консолидации в пространствах макро- и микропор b_1 и b_2 соответственно до тех же значений: $1,8 \times 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ и $1,0 \times 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ (рис. 4, a , b).

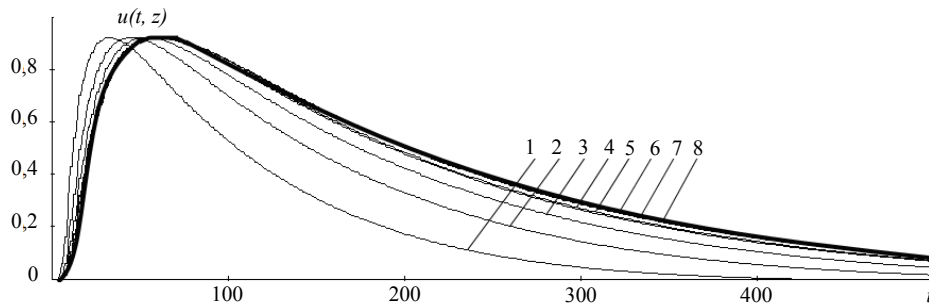


Рис. 3

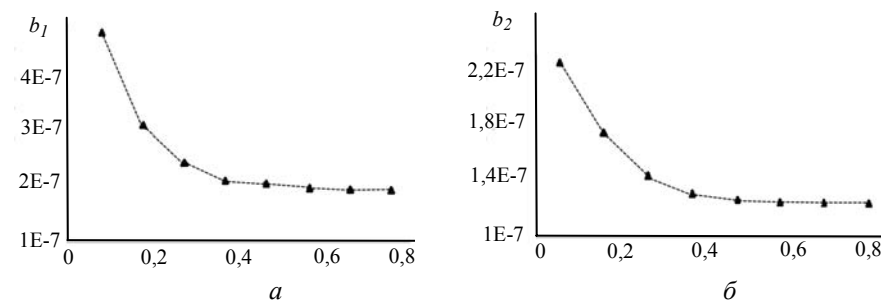


Рис. 4

Заключення

В настоящей работе для разномасштабных неклассических моделей фильтрации–консолидации в сжимаемых средах микропористых частиц сформулированы задачи идентификации кинетических параметров моделей с использованием функционалов-невязок, учитывающих изменение суммарного потока жидкости на поверхности наблюдения. Предложены высокопродуктивные методы реализации задач идентификации (коэффициент консолидации во внутрочастичном и между-частичном пространствах b_1 , b_2 и фактор эластичности материала β) как функций от времени на основе аналитических решений прямых и сопряженных задач, получены явные выражения компонентов градиентов функционалов-невязок для реализации высокопродуктивных процедур идентификации параметров модели. Такой подход при реализации адекватных схем линеаризации моделей обеспечивает более полное описание механизма влагопереноса из пространства микропор и взаимовлияния микро- и макропотоков на поведение жидкой и твердой фазы в целом, явную аналитическую связь между определяющими и лимитирующими параметрами переноса (давлениями в жидкой фазе в пространстве микро- и макропор P_1 , P_2 и компрессионно-кинетическими параметрами b_1 , b_2 , β). Выполнена численная идентификация и анализ указанных параметров модели.

M.P. Petryk

ВИСОКОШВИДКІСНІ МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛЕЙ ФІЛЬТРАЦІЇ–КОНСОЛІДАЦІЇ СТИСКУВАНИХ СРЕДОВИЩ ВОЛОГОНАСИЧЕНИХ МІКРОПОРИСТИХ ЧАСТИНОК

Сформульовано задачі ідентифікації параметрів моделей фільтрації–консолідації в стискуваних середовищах мікропористих частинок з використанням функціоналів-нев'язок, що враховують зміну сумарного потоку рідини на поверхні спостереження. Запропоновано високопродуктивні методи реалізації задач ідентифікації на основі аналітичних розв'язків прямих і спряжених задач. Отримано явні вирази компонентів градієнтів функціоналів-нев'язок для ідентифікації параметрів моделі градієнтними методами.

M.R. Petryk

HIGH VELOCITY IDENTIFICATION METHODS OF THE MODEL PARAMETERS OF FILTRATION–CONSOLIDATION OF COMPRESSIBLE MEDIA OF MOISTURE- SATURATED MICRO-POROUS PARTICLES

The identification problems of the model parameters of filtration-consolidation in compressible media of micro-porous particles using residual functionals, taking into account the total liquid flow changes on the observation surface are formulated. Highly productive methods of identification problems implementation based on the analytical solutions of the direct and conjugate problems are proposed. Explicit analytical expressions of components of residual functional gradients for the model parameters identification by gradient methods are obtained.

1. *Zhuw H. X., Melrose, J. R.* A mechanics model for the compression of plant and vegetative tissues // *Journal of Theoretical Biology.* — 2003 — N 221. — P. 89–101.
2. *Schwartzberg H.G.* Expression of fluid from biological solids // *Separation and Purification Methods.* — 1997. — N 26 (1). — P.1–213.
3. *Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.* Theory of fluid flows through natural rocks. — Dordrecht: Kluwer, 1990. — 303 p.
4. *Grimi N., Vorobiev E., Lebovka N., Vaxelaire J.* Solid–liquid expression from denaturated plant tissue: Filtration–consolidation behavior // *Journal of Food Engineering.* — 2010. — N 96 (1). — P. 29–36.
5. *Terzaghi K.* Erdbaumechanik auf Bodenphysikalischer Grundlage. — Wien: Deuticke, 1925. — 399 p.
6. *Suclje L.* Rheological aspects of soil mechanics. — New York: Wiley Interscience, 1970. — 570 p.
7. *Shirato M., Murase T., Iwata, M., Nakatsuka S.* The Terzaghi–Voigt combined model for constant pressure consolidation of filter cakes and homogeneous semi–solid materials // *Chemical Engineering Science.* — 1986. — N 41. — P. 3213–3218.
8. *Lanoisell, J.–L., Vorobyov E. Bouvier J.–M., Piar G.* Modelling of solid / liquid expression for cellular materials // *AIChE Journal.* — 1996. — N 42(7). — P. 2057–2067.
9. *Petryk M., Vorobiev E.* Numerical and analytical modelling of solid–liquid expression from soft plant materials // *Ibid.* — 2013. — N 59(12). — P. 4762–4771.
10. *Petryk M., Vorobiev E.* Liquid flowing from porous particles during the pressing of biological materials // *Computer & Chem. Eng.* — 2007. — N 31(10). — P. 1336–1345.
11. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Идентификация параметров некоторых задач фильтрации–консолидации влагонасыщенных микропористых сред // *Кибернетика и системный анализ.* — 2015. — № 2. — С. 89–107.
12. *Петрик М.Р., Михалик Д.М.* Нелинейная математическая модель двухуровневого переноса типа «фильтрация–консолидация» // *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики».* — 2010. — № 2. — С. 74–85.
13. *Сергиенко И.В., Дейнека В.* Системный анализ. — Киев: Наук. думка, 2013. — 500 с.
14. *Высокопродуктивные методы идентификации параметров конкурентивной диффузии в неоднородных средах нанопористых частиц / И.В. Сергиенко, М.Р. Петрик, Ж. Фрессар, С. Леклерк // Кибернетика и системный анализ.* — 2015. — № 4. — С. 44–61.
15. *Ленюк М.П.* Інтегральні перетворення Фур'є, Бесселя із спектральним параметром в задачах математичного моделювання масопереносу в неоднорідних середовищах. — Київ: Наук. думка, 2000. — 372 с.
16. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена. — М.: Машиностроение, 1988. — 280 с.
17. *Математичне моделювання масопереносу в середовищах частинок нанопористої структури / І.В. Сергієнко, М.Р. Петрик, О.М. Хіміч, Д. Кане, Д.М. Михалик, С. Фрессар Леклерк.* — Київ: Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2014. — 210 с.
18. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1981. — Т. 1. — 800 с.

Получено 26.10.2015

Статья представлена к публикации чл.-корр. НАН Украины А.Н. Химичем.