

УДК 519.873

В.Б. Ларин

**ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОТКАЗАВШЕГО
ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА**



Введение

Привлекающая внимание исследователей проблема создания надежно функционирующей системы включает различные задачи. Среди таких задач можно отметить вопросы повреждаемости элементов конструкции [1], задачи уточнения параметров математической модели [2], определения отказавших элементов (датчиков или исполнительных механизмов) системы [3–5].

Ниже рассматривается аналогичная [4] задача определения отказавшего исполнительного устройства (ИУ) системы. Предполагается, что информацией для такой диагностики может служить регистрация переходного процесса в системе, который обусловлен ненулевыми начальными условиями.

Суть подхода к решению задачи об определении отказавшего ИУ состоит в следующем. Используя для обработки результатов регистрации переходного процесса тот или иной алгоритм идентификации [6–8], определяются оценки корней характеристического уравнения системы и далее — характеристический полином (ХП). Сравнивая полученный таким образом ХП с ХП, которые соответствуют системам тем или иным отказавшим ИУ, можно делать вывод об отказе того или иного ИУ. Существенно, что такой подход позволяет использовать записи переходных процессов, соответствующих различным фазовым координатам системы (см. пример).

Постановка задачи

Пусть движение системы со всеми исправно функционирующими ИУ описывается стационарной системой линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{1}$$

где фазовый вектор $x \in R^n$, вектор управляющих воздействий $u \in R^m$, наблюдаемый вектор $y \in R^d$, постоянные матрицы A, B, C имеют соответствующие размеры.

Возможный отказ ИУ, как и в [4], моделируется следующим образом. Движение системы описывается уравнениями, аналогичными (1):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B^r u, \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{2}$$

однако в (2) матрица B^r имеет следующую структуру:

$$B^r = B \text{diag}(|a_1^r, \dots, a_m^r|),$$

где a_k^r , $k = 1, \dots, m$, принимают значения 0 или 1 в зависимости от «исправности» соответствующего ИУ. Другими словами, при отказе k -го ИУ обнуляется k -й столбец матрицы B^r . Далее предполагается, что система охвачена обратной связью с матрицей K , т.е. в (2) $u = Kx$, и что матрица B^r может иметь не больше одного нулевого столбца.

Пусть в дискретные моменты времени t_i , с интервалом $T_s = \text{const}$, $t_{i+1} = t_i + T_s$, наблюдается переходный процесс в системе (2), обусловленный ненулевыми начальными условиями ($x(0)$). Таким образом, имеем

$$y^r(t_i) = C e^{A_c^r t_i} x(0), \quad A_c^r = A + B^r K \quad (3)$$

или

$$y^r(t_i) = \sum_{j=1}^n d_j^r e^{\mu_j^r t_i}, \quad (4)$$

где μ_j^r — собственные значения матрицы A_c^r , d_j^r — константы.

Будем полагать, что замкнутой системе со всеми функционирующими ИУ соответствует матрица A_c^r с индексом $r = 0$. Индексы $r = 1, \dots, m$ матрицы A_c^r соответствуют системам с отказавшими первыми ИУ, вторым и т.д. Обозначим P_0, P_1, \dots, P_m векторы коэффициентов ХП этих матриц соответственно.

Таким образом, первый этап решения рассматриваемой задачи состоит в нахождении \tilde{P} -оценки вектора коэффициентов ХП системы по результатам наблюдений переходных процессов (3), (4). Далее оценка $\tilde{\epsilon}$ номера отказавшего ИУ находится из условия

$$\min_r \|\tilde{P} - P_r\|. \quad (5)$$

Отметим, что для нахождения \tilde{P} по результатам наблюдений (3), (4) можно использовать метод Прони [8], метод матричных пучков [6, 7] и др.

Определение ХП (метод Прони)

Матрица замкнутой системы определяется, как и в (3). Однако, приняв во внимание, что приводимые ниже соотношения справедливы при любом индексе r , фигурирующем в (3), (4), далее индекс r может быть опущен. Итак, пусть ХП матрицы $e^{A_c T_s}$ имеет вид

$$\theta^n + a_1 \theta^{n-1} + \dots + a_n. \quad (6)$$

С учетом (3) рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} \Sigma = y(t_{n+i}) + a_1 y(t_{n+i-1}) + \dots + a_n y(t_i) = C \left[\left(e^{A_c T_s} \right)^n + a_1 \left(e^{A_c T_s} \right)^{n-1} + \dots + a_n I \right] \times \\ \times \left(e^{A_c T_s} \right)^i x(0). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь и далее I — единичная матрица соответствующего размера.

Так как матрица $e^{A_c T_s}$ обращает в нуль свой характеристический полином, можно утверждать, что $\Sigma = 0$. Отметим, что корни θ_j характеристического полинома (6) и корни μ_j характеристического полинома матрицы A_c связаны соотношением

$$\theta_j = e^{\mu_j T_s}. \quad (8)$$

Таким образом, задачу можно разбить на две: задачу нахождения a_j — коэффициентов характеристического полинома (6) из системы линейных уравнений, что позволит найти корни θ_j этого полинома и согласно (8) определить μ_j ; и вторую задачу (которая решается с помощью формулы Виетта) — определение ХП матрицы A_c при известных корнях μ_j .

Остановимся на первой задаче. Коэффициенты полинома (6), приняв во внимание, что $\Sigma = 0$, можно определить из следующей системы линейных уравнений:

$$Za = -Z_0, \quad (9)$$

$$Z = \begin{bmatrix} y_n & \cdots & y_1 \\ y_{n+1} & \cdots & y_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n+i-1} & \cdots & y_i \end{bmatrix}, \quad Z_0 = \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{n+i} \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее используются обозначения $y_i = y(t_i)$. Определив из (9) коэффициенты a_j полинома (6) и вычислив корни θ_j этого полинома, согласно (8) находим μ_j .

Отметим, что алгоритм Прони можно представить в более общем виде, производя выборку через кратные периоду T_s интервалы времени. Тогда аналогично (6) можно записать выражение для характеристического полинома матрицы $e^{A_c k T_s}$ (k — целое число):

$$\theta_k^n + a_{1k} \theta_k^{n-1} + \dots + a_{nk}. \quad (10)$$

В этом случае аналогом (7) будет следующее соотношение:

$$y_{nk+i} + a_{1k} y_{(n-1)k+i} + \dots + a_{nk} y_i = 0. \quad (11)$$

Соответственно имеем аналог соотношения (8)

$$\theta_{jk} = e^{\mu_j k T_s}, \quad (12)$$

где θ_{jk} — корень характеристического полинома (10). Затем можно найти искомые показатели: $\mu_j = \frac{1}{kT} \ln \theta_{jk}$. Эти соотношения могут использоваться для повышения точности μ_j (подробности см. в [8]).

Метод матричных пучков [6]

Как отмечено в [8], развитием метода Прони, направленного на повышение точности определения θ_j , можно считать метод матричных пучков [6], позволяющий находить θ_j без предварительного определения a_j .

Суть этого метода заключается в следующем. Из элементов последовательности (4) формируется матричный пучок

$$X_1 - \lambda X_0, \quad (13)$$

где матрицы X_0 и X_1 размером $(N-L) \times L$ имеют вид

$$X_0 = [x(L-1) \ x(L-2) \ \dots \ x(0)], \quad (14)$$

$$X_1 = [x(L) \ \dots \ x(1)]. \quad (15)$$

Столбцы $x(t)$ этих матриц определяются следующим образом:

$$x(t) = [y(t) \ y(t+1) \ \dots \ y(N-L+t-1)]^T, \quad (16)$$

величина L называется параметром пучка. Здесь и далее верхний индекс T означает транспонирование. Согласно [6] при выборе величины L следует руководствоваться соотношениями

$$L \geq n, \quad N \leq 3L \leq 2N.$$

Нетрудно видеть, что матрицы X_0 , X_1 допускают следующее представление через параметры d_j , θ_j , фигурирующие в (4), (8):

$$X_0 = Z_L R Z_R, \quad X_1 = Z_L R Z Z_R;$$

$$Z_L = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \theta_1 & \dots & \theta_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \theta_1^\gamma & \dots & \theta_n^\gamma \end{bmatrix}, \quad \gamma = N-L-1, \quad Z_R = \begin{bmatrix} \theta_1^{L-1} & \theta_1^{L-2} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \theta_n^{L-1} & \theta_n^{L-2} & \dots & 1 \end{bmatrix};$$

$$Z = \text{diag}\{\theta_1, \dots, \theta_n\}; \quad R = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}.$$

Таким образом, пучок (13) можно записать

$$X_1 - \lambda X_0 = Z_L R (Z - \lambda I) Z_R. \quad (17)$$

Как показано в [6], при $n \leq L \leq N-n$ значение $\lambda = \theta_j$ уменьшает ранг пучка (17). Соответствующая обобщенная задача на собственные значения имеет вид

$$(X_1 - \lambda X_0)q = 0. \quad (18)$$

Умножив слева (18) на X_0^\dagger — результат псевдообращения матрицы X_0 , получим обычную задачу на собственные значения

$$X_0^\dagger X_1 q = \lambda q \quad (19)$$

для матрицы $X_0^\dagger X_1$, которая имеет ранг $n \leq L$. Как показано в [6], интересующие нас значения θ_j совпадают с ненулевыми собственными значениями матрицы $X_0^\dagger X_1$, фигурирующей в (19).

Приведенные выше соотношения позволяют указать алгоритм определения θ_j (с последующим определением согласно (8) величин μ_j). Задавшись величиной L , формируем согласно (13)–(15) матрицы X_0 и X_1 . Далее строим сингулярное разложение (SVD) [9, 10] матрицы X_0 :

$$X_0 = U\Sigma V^T,$$

где U, V — ортогональные матрицы, $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Диагональная матрица Σ_1 размером $L \times L$ имеет вид

$$\Sigma_1 = \text{diag} \{ \sigma_1, \dots, \sigma_n, 0, \dots, 0 \} = \text{diag} \{ \Sigma_0, 0 \}. \quad (20)$$

Разбив матрицы U, V, Σ на блоки:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = [U_0 \quad U_1], \quad V = [V_0 \quad V_1],$$

получим следующее представление матрицы X_0 :

$$X_0 = U_0 \Sigma_0 V_0^T, \quad U_0^T U_0 = I, \quad V_0^T V_0 = I. \quad (21)$$

Согласно (21) $X_0^\dagger = V_0 \Sigma_0^{-1} U_0^T$ и соотношение (19) можно записать

$$V_0 \Sigma_0^{-1} U_0^T X_1 q = \lambda q. \quad (22)$$

Так как интерес представляют только ненулевые значения матрицы $X_0^\dagger X_1$, то, умножив соотношение (22) слева на V_0^T , перепишем его в виде [6]

$$\Sigma_0^{-1} U_0^T X_1 V_0 (V_0^T q) = \lambda V_0^T q.$$

Последнее соотношение позволяет находить величины θ_j как собственные значения несимметричной $n \times n$ -матрицы

$$Z_E = \Sigma_0^{-1} U_0^T X_1 V_0. \quad (23)$$

Отметим, что при наличии погрешности измерений в общем случае в матрице (20) все диагональные элементы будут ненулевыми. Однако при малых погрешностях регистрации первые n элементов этой матрицы будут существенно превосходить остальные, что можно использовать как индикатор порядка модели идентифицируемой системы.

Обобщение метода матричных пучков [7]

В целях оптимизации процедуры перехода от θ_j к μ_j ниже будет изложена модификация метода матричных пучков, дающая возможность находить $(\theta_j)^k$ без предварительного определения коэффициентов a_{jk} полинома (10).

Условно можно считать, что приведенный выше алгоритм соответствует методу Прони, определяемому соотношениями (6), (9) (в том смысле, что позволяет находить значения θ_j). Руководствуясь соображениями, приведенными в разд. 2, целесообразно построить матричный пучок, позволяющий сразу вычислить θ_{jk} , т.е. построить аналог алгоритма, базирующегося на соотношениях (10), (11).

Простейший вариант такого обобщения может быть связан с построением матричного пучка, имеющего структуру, аналогичную (17), но матрица Z в этом случае заменена матрицей Z^k . Пучок, обладающий такими свойствами, может быть сформирован следующим образом. По элементам последовательности (4) формируются матрицы

$$X_{0k} = [x(\eta) \quad x(\eta-1) \quad \dots \quad x(0)], \quad \eta = L - k, \quad (24)$$

$$X_{1k} = [x(L) \quad x(L-1) \quad \dots \quad x(k)],$$

столбцы которых $(x(t))$ определяются соотношением, аналогичным (16). При $k = 1$ очевидно, что $X_{0k} = X_0$, $X_{1k} = X_1$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что матрицы X_{0k} и X_{1k} допускают представление

$$X_{0k} = Z_L R Z_{RK}, \quad X_{1k} = Z_L R Z^k Z_{RK},$$

где матрицы Z_L, R, Z совпадают с соответствующими матрицами, определяющими X_0 и X_1 , матрица Z_{RK} имеет следующую структуру:

$$Z_{RK} = \begin{bmatrix} \theta_1^\eta & \theta_1^{\eta-1} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \theta_n^\eta & \theta_n^{\eta-1} & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \eta = L - k.$$

Эти соотношения позволяют записать пучок $X_{1k} - \lambda X_{0k}$ в форме (17)

$$X_{1k} - \lambda X_{0k} = Z_L R (Z^k - \lambda I) Z_{RK}. \quad (25)$$

Соответствующая задача на собственные значения (аналог (18)) имеет вид

$$(X_{1k} - \lambda X_{0k})q = 0. \quad (26)$$

Сравнивая (17) и (25), можно утверждать, что значение $\lambda = \theta_{jk}$ будет уменьшать ранг пучка (25).

Умножив слева (26) на X_{0k}^\dagger , получим аналог (19)

$$X_{0k}^\dagger X_{1k} q = \lambda q, \quad (27)$$

т.е. отличные от нуля собственные значения матрицы $X_{0k}^\dagger X_{1k}$ будут соответствовать корням уравнения (10). Алгоритм определения этих значений аналогичен вышеописанному и включает следующие этапы.

Задавшись величиной k , формируются матрицы X_{0k} , X_{1k} согласно (24).

Используя сингулярное разложение матрицы X_{0k} ,

$$X_{0k} = U \Sigma V^T, \quad U U^T = I, \quad V V^T = I,$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_1 = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_n, 0, \dots, 0\} = \text{diag}\{\Sigma_0, 0\}, \quad \Sigma_0 = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\},$$

формируется аналогичное (21) представление матрицы X_{0k} :

$$X_{0k} = U_0 \Sigma_0 V_0^T. \quad (28)$$

Приняв во внимание (28), перепишем (27) в следующем виде:

$$\Sigma_0^{-1/2} U_0^T X_{1k} V_0 \Sigma_0^{-1/2} (\Sigma_0^{1/2} V_0^T q) = \lambda (\Sigma_0^{1/2} V_0^T q),$$

что позволяет находить величины $\theta_{jk} = e^{\mu_j k T_s}$ как собственные значения $n \times n$ -матрицы

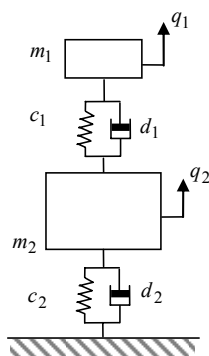
$$Z_{EK} = \Sigma_0^{-1/2} U_0^T X_{1k} V_0 \Sigma_0^{-1/2}.$$

О возможности повышения точности при использовании величин θ_{jk} для определения μ_j можно судить по примеру, рассмотренному в [7].

Таким образом, описанные выше алгоритмы позволяют находить корни μ_j по результатам наблюдения переходных процессов (4). По этим корням строится оценка ХП \tilde{P} . Для определения векторов коэффициентов P_0, P_1, \dots, P_m ХП, которые соответствуют матрицам A_C^0, \dots, A_C^m , можно использовать стандартные вычислительные процедуры, например процедуру `poly.m` пакета MATLAB. По этим данным, используя соотношение (5), можно определить номер отказавшего ИУ.

Проиллюстрируем на примере возможность использования описанных выше процедур для определения номера отказавшего ИУ.

Пример. Рассмотрим двухмассовую систему, изображенную на рисунке.



Движение ее описывается следующим уравнением:

$$m\ddot{q} + d\dot{q} + cq = 0, \quad (29)$$

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} d_1 & -d_1 \\ -d_1 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} d_1 & -d_1 \\ -d_1 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}.$$

Здесь q_i, m_i, d_i, c_i ($i = 1, 2$) — обобщенные координаты, массы тел, коэффициенты демпфирования демпферов и жесткости пружин соответственно. Вводя фазовый вектор $x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$, систему (29) можно записать так:

$$\dot{x} = A_0 x, \quad A_0 = \begin{bmatrix} O & I \\ -m^{-1}c & -m^{-1}d \end{bmatrix}. \quad (30)$$

В (30) и далее O и I обозначают нулевую и единичную матрицы соответствующего размера. Рассматривая демпферы как ИУ, перепишем (30) в форме (1):

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (31)$$

$$A = \begin{bmatrix} O & I \\ -m^{-1}c & O \end{bmatrix}.$$

$$B = \begin{bmatrix} O \\ b \end{bmatrix}, \quad b = m^{-1} \begin{bmatrix} d_1 & O \\ -d_1 & -d_2 \end{bmatrix}, \quad u = Kx, \quad K = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Принимаются следующие значения параметров в (29):

$$m_1 = 1, m_2 = 10, d_1 = 0,5, d_2 = 1, c_1 = 3, c_2 = 10.$$

Системе со всеми работающими ИУ соответствует матрица B^0 , совпадающая с матрицей B , фигурирующей в (31). Если в матрице B^0 обнулен первый или второй столбец, то такую матрицу обозначим B^1, B^2 соответственно.

Далее вектор $x(0)$ и матрица C , фигурирующие в (3), принимаются в виде

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Полагаем, что интервал между измерениями $T_s = 0,05$, время наблюдения процесса $[0, 10]$, т.е. в (4) $n = 200$. Погрешности регистрации процесса (4), как и в [11, гл.IV, п.23], моделируется сохранением только конечного числа знаков после запятой. В рассматриваемом примере принято, что сохраняется только два знака после запятой (для этой цели используется процедура round.m пакета MATLAB). Для определения корней ХП по результатам наблюдений последовательности (4) использовались соотношения (8) и (23). Далее, по найденным таким образом корням μ_j , используя процедуру poly.m пакета MATLAB, определялся вектор оценки коэффициентов \tilde{P} ХП. Для определения векторов коэффициентов P_0, P_1, P_2 ХП, соответствующих матрицам A_r^C , определяемых (3) ($r = 0, 1, 2$), использовалась процедура poly.m пакета MATLAB.

При выбранных значениях параметров системы результаты решения с помощью описанных выше алгоритмов, рассматриваемой задачи определения отказавшего ИУ приведены в табл. 1. Здесь $\ell_r = \|P_r - \tilde{P}\| / \|P_0\|$.

Таблица 1

r	ℓ		
	ℓ_0	ℓ_1	ℓ_2
0	$8,7015 \cdot 10^{-4}$	0,0577	0,1352
1	0,0578	0,0029	0,0903
2	0,1356	0,0895	$6,6719 \cdot 10^{-4}$

Как следует из этой таблицы, минимальные значения ℓ_r (см. (5)) лежат на диагонали, это говорит о том, что предложенный алгоритм позволяет правильно определить отказавшее ИУ.

Далее рассмотрим случай, когда регулируется не переходной процесс, соответствующий перемещению массы m_1 , а переходной процесс, соответствующий перемещению массы m_2 , т.е. фигурирующая в (3) матрица C имеет вид $C = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$. Результаты, приведенные в табл. 2, совпадают с принятыми в табл. 1.

Таблица 2

r	ℓ		
	ℓ_0	ℓ_1	ℓ_2
0	0,0138	0,0584	0,1364
1	0,0774	0,0377	0,0916
2	0,1366	0,0905	$9,0504 \cdot 10^{-4}$

Как видим, и в этой таблице минимальные значения ℓ_r находятся на диагонали. Это свидетельствует о том, что и в случае регистрации перемещения массы m_2 алгоритм позволяет правильно определить номер отказавшего ИУ.

Заключение

Используя для обработки результатов регистрации переходного процесса тот или иной алгоритм идентификации, определяются оценки корней характеристического уравнения системы и характеристический полином. Сравнивая полученный таким образом ХП с ХП, которые соответствуют системам тем или иным отказавшим ИУ, можно делать вывод об отказе того или иного ИУ. Такой подход позволяет использовать записи переходных процессов, соответствующих различным фазовым координатам системы. Эффективность алгоритма демонстрируется на примере.

V.B. Larin

ПРО ВИЗНАЧЕННЯ ВИКОНАВЧОГО ПРИСТРОЮ, ЩО ВІДМОВИВ

Розглянуто задачу визначення виконавчого пристрою системи, що відмовив. Використовуючи для обробки результатів реєстрації перехідного процесу той або інший алгоритм ідентифікації, визначаються оцінки коренів характеристичного рівняння системи і характеристичний поліном. Порівнюючи отриманий таким чином характеристичний поліном з характеристичними поліномами, які відповідають системам з тим або іншим виконавчим пристроєм, що відмовив, можна робити висновки про відмову того або іншого виконавчого пристрою. Такий підхід дозволяє використовувати записи перехідного процесу, які відповідають різним фазовим координатам системи. Ефективність алгоритму демонструється на прикладі.

V.B. Larin

ON FINDING THE ACTUATOR WHICH HAS FAULT

The problem of finding the actuator which has fault is considered. Using for processing the results of registration of transient this or that algorithm of identification, the estimations of roots of the characteristic equation of system are determined. Further, using this roots, the characteristic polynomial is determined. Comparing this characteristic polynomial with characteristic polynomials which correspond to the systems the actuator of which has fault, it is possible to do the conclusion about fault of this or that actuator. It is essential, that such approach allows to use records of the transient which is corresponding to various phase coordinates of system. Efficiency of algorithm is shown on the example.

1. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Deformation and long-term damage of physically nonlinear fibrous materials // Int. Appl. Mech. — 2014, — **50**, N 1. — P. 58–67.
2. *Larin V.B.* Algorithms for solving a unilateral quadratic matrix equation and the model updating problem // Ibid. — 2014. — **50**, N 3. — P. 321–334.
3. *Larin V.B.* On identification of faults of navigation measuring elements // Ibid. — 2015. — **51**, N 6. — P. 112–118.
4. *Franze G., Tedesco F., Famularo D.* Actuator fault tolerant control: a receding Horizon Set-Theoretic Approach // IEEE Trans. Automatic Control. — 2015. — **60**, N 8. — P. 2225–2230.
5. *Larin V.B., Tunik A.A.* Fault-tolerant strap-down inertial navigation systems with external corrections // Appl. Comput. Math. — 2015. — **14**, N 1. — P. 23–37
6. *Hua Y., Sarkar T.K.* Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped / undamped sinusoids in noise // IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Proc. 1990. — **38**, N 5. — P. 814–824.
7. *Larin V.B.* The use of matrix pencils in an identification problem // J. of Automat. and Inform. Sci. — 1996. — **28**(3&4), — P. 53–62.
8. *Larin V. B., Apostolyuk A. S.* Identification Problems of Linear Stationary Systems. Part I. Prony's Method // Ibid. — 2011. — **43**, N 8. — P. 1–18.
9. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. — М. : Наука, 1984. — 320 с.
10. *Форсайт Д., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. — М. : Мир, 1987. — 279 с.
11. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. — М. : Физматгиз, 1961. — 524 с.

Получено 12.11.2015