МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

УДК 681.5

Л.С. Житецкий

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕКОТОРЫМИ КЛАССАМИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОБЪЕКТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ*

Введение

Проблема робастного управления, гарантирующего его работоспособность при недостаточной априорной информации относительно модели объекта и характеристик неконтролируемых возмущений, с конца 1970-х гг. продолжает оставаться предметом пристального внимания отечественных и зарубежных исследователей. Основные результаты, полученные в течение последних двух десятилетий при решении задач анализа и синтеза робастных систем управления линейными объектами (в так называемых неадаптивной и адаптивной постановках), обобщены в [1–6].

Известно, что при управлении в условиях априорной неопределенности приходится иметь дело не с конкретными объектом и возмущением, а с некоторыми неодноточечными множествами (классами) объектов и возмущений. При этом априорные множественные оценки неизвестных параметров в принципе могут быть столь грубые, что решение задач робастного управления в неадаптивной постановке может отсутствовать; иначе говоря, не существует регулятора с фиксированными параметрами, способного робастно стабилизировать заданный класс объектов [4, с. 179]. В этом случае естественной представляется задача робастно-адаптивного управления (см., в частности, [4, п. 4.3]). В несколько более узком смысле робастность адаптивного управления связывают с представлением о способности регулятора справляться с так называемой немоделируемой динамикой, которая появляется при управлении по упрощенной (номинальной) модели объекта [1], или с неизмеряемым ограниченным возмущением неизвестного уровня [3, 7] (см. также [5, гл. 5, 6; 6, с. 32]).

Судя по доступным литературным источникам, в последнее время заметно увеличилось количество публикаций в области анализа и синтеза непрерывных и дискретных систем управления нелинейными объектами в условиях неопределенности. В рамках этих исследований возобновился интерес к построению систем управления неопределенными нелинейными объектами с использованием робастных моделей, имеющих линейную структуру [8]. В идейном плане это направление восходит к монографии [9]. К нему по существу примыкает и недавняя работа [10],

---

* Работа частично поддержана грантом NATO PST.CLG 976958 «Robust Adaptive Control of Partially Known and Unknown Nonlinear Systems» и представлена на XXII Международной конференции по автоматическому управлению «Автоматика – 2015».

в которой развивается предложенный в [11] подход к робастной неадаптивной стабилизации нелинейного многомерного статического объекта в дискретном времени по фиксированной линейной опорной модели.

В отличие от задач робастного управления нелинейными непрерывными объектами в адаптивной постановке, для решения которых удалось применить аппарат теории функций Ляпунова, решение задач робастного адаптивного управления нелинейными дискретными объектами оказалось более трудным. Трудности, как известно, состоят в том, что переменные в выражении производной функции Ляпунова входят линейно, тогда как зависимость первой разности этой функции от соответствующих переменных становится квадратичной. На этот досадный факт впервые, по-видимому, обращено внимание в работе [12], а затем в статье [13] и монографии [4, с. 120]. Упомянутые трудности удалось обойти в [13–15], отказавшись от предположения о наличии возмущений (помех) или сузив класс нелинейностей [12, 16, 17]. Между тем на предельные возможности робастного управления дискретными нелинейными динамическими объектами в условиях неопределенностей относительно нелинейностей и границ возмущений проливает свет фундаментальная работа [18], результаты которой докладывались недавно одним из ее авторов на пленарном заседании 19-го Всемирного конгресса ИФАК (г. Кейптаун, ЮАР, 2014 г.). В этой работе строго доказано, что даже в простейшем случае нелинейного по выходу дискретного динамического объекта первого порядка при наличии ограниченного возмущения неизвестного уровня любой регулятор (линейный, нелинейный, адаптивный, неадаптивный) с использованием всей предыстории процесса управления теоретически не может обеспечить робастность системы управления в условиях столь большой априорной неопределенности относительно нелинейности, когда класс возможных нелинейностей определяется всего лишь верхней границей константы Липшица L, а сама эта константа не меньше критического значения $3/2+\sqrt{2}$. Тем не менее, если в распоряжении конструктора имеется большая априорная информация о нелинейности, чем просто константа Липшица, то, как оказалось, в принципе можно построить робастные адаптивные системы управления нелинейными дискретными динамическими объектами при $L \geq 3/2+\sqrt{2}$ не только с нелинейными обратными связями, как в работах [12–17], но и с линейными обратными связями. А это в практическом плане представляется интересным.

В данной работе, которая развивает предложенные в [10, 17] подходы к решению задач управления дискретными нелинейными объектами, функционирующих в условиях нестохастической неопределенности, дается строгое обоснование возможности построения простых линейных регуляторов для робастной стабилизации определенных классов нелинейных многомерных статических и нелинейных одномерных динамических объектов при наличии ограниченных возмущений с неизвестными уровнями.

Базовые предположения. Постановка задачи

Рассматривается два класса стационарных нелинейных объектов с измеряемым выходом $y \in \mathbf{R}^m$, управлением $u \in \mathbf{R}^r$ и неизмеряемым аддитивным возмущением $v \in \mathbf{R}^m$, функционирующих в дискретном времени $n = 0, 1, 2, \ldots$ и допускающих описание уравнением

$$y_n = \Phi(y_{n-1}, \ldots, y_{n-N}, u_{n-1}) + v_{n-1}, \tag{1}$$

где $\Phi : \underbrace{\mathbf{R}^m \times \ldots \times \mathbf{R}^m}_{N} \times \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^m$ — априори неизвестный нелинейный оператор $(r \leq m)$. Эти классы включают класс нелинейных многомерных статических объектов (объектов без памяти), когда

$$\Phi(y_{n-1},\ldots,y_{n-N},u_{n-1})\equiv\varphi(u_{n-1}), \tag{2}$$

и класс нелинейных одномерных динамических объектов, когда

$$\Phi(y_{n-1},\ldots,y_{n-N},u_{n-1})\equiv f(y_{n-1},\ldots,y_{n-N})+bu_{n-1}, \tag{3}$$

где $\varphi:\mathbf{R}^r\to\mathbf{R}^m$ и $f:\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$ — неизвестные нелинейные операторы, удовлетворяющие определенным ограничениям, которые уточняются далее, а $b\in\mathbf{R}$ — неизвестное число $(0<|b|<\infty)$.

Предполагается, что $v:=v_0,v_1,v_2,\ldots$ — ограниченная последовательность, причем верхняя граница

$$\|v\|_\infty\le\varepsilon<\infty, \tag{4}$$

фигурирующая в оценке ее ℓ_∞-нормы $\|v\|_\infty:=\sup_{0\le n<\infty}\|v_n\|$ и равная ε, априори может быть неизвестной конструктору системы (и это существенно) [6, 7, 17, 18].

Ставится задача синтеза робастных регуляторов, реализующих линейные обратные связи по y и обеспечивающих стабилизацию выхода $y:=y_1,y_2,\ldots$ объекта (1) в окрестности заданной точки $y^0\in\mathbf{R}^m$ $(\|y^0\|\ne0)$ при ограничениях (4) в условиях априорной неопределенности относительно нелинейности Φ для класса (2) нелинейных статических объектов (в неадаптивной постановке) и для класса (3) нелинейных динамических объектов (в адаптивной постановке). Более определенно, требуется построить линейное управление, гарантирующее предельную ограниченность y и u в форме [5, 6]

$$\limsup_{n\to\infty}(\|y_n\|+\tau\|u_n\|)<\infty,\quad \tau>0. \tag{5}$$

Робастное неадаптивное управление нелинейными статическими объектами

Пусть имеется нелинейный многомерный статический объект, описываемый уравнением

$$y_n=\varphi(u_{n-1})+v_{n-1}, \tag{6}$$

к которому приводится уравнение (1) в условиях (2). В этом уравнении $\varphi:(u)$ — некоторая априори неизвестная нелинейная вектор-функция, определяемая как

$$\varphi(u)=[\varphi^{(1)}(u),\ldots,\varphi^{(m)}(u)]^{\mathrm{T}}, \tag{7}$$

а $v_n=[v_n^{(1)},\ldots,v_n^{(m)}]^{\mathrm{T}}$ — m-мерный вектор аддитивных неконтролируемых возмущений.

Рассматривается случай, когда число r входных переменных $u_n^{(1)},\ldots,u_n^{(r)}$ не превышает числа m выходных переменных $y_n^{(1)},\ldots,y_n^{(m)}$:

$$r\le m. \tag{8}$$

Как и в работе [11], будем полагать, что каждая i-я компонента $\varphi^{(i)}(u)$ $(i=1,\ldots,m)$ в (7) является непрерывной дифференцируемой функцией переменных $u^{(1)},\ldots,u^{(r)}$. Дальнейшее предположение состоит в том, что частные производные $\partial\varphi^{(i)}(u)/\partial u^{(j)}$ остаются равномерно ограниченными на $\mathbf{R}^m$, сохраняя неизменными свои знаки для всех u из $\mathbf{R}^r$. А это означает, что

$$\underline{b}^{(ij)} \le \partial\varphi^{(i)}(u)/\partial u^{(j)} \le \overline{b}^{(ij)}, \ \ 0 < \underline{b}^{(ij)}\overline{b}^{(ij)} < \infty \ \ (i = 1,\ldots, m; \ j = 1,\ldots, r). \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что в условиях предположения (9) компоненты $\varphi(u)$ — бесконечно большие функции и

$$\inf_{u\in\mathbf{R}^r} \varphi^{(i)}(u) = -\infty, \quad \sup_{u\in\mathbf{R}^r} \varphi^{(i)}(u) = +\infty. \tag{10}$$

Примерами функций $\varphi^{(i)}(u)$ со свойствами (9) выступают, в частности, функции

$$\varphi^{(i)}(u) = \sum_{j=1}^{r} \varphi_{ij}(u^{(j)}) \quad (i = 1,\ldots, m)$$

со слагаемыми вида

$$\varphi_{ij}(u^{(j)}) = \mu_{ij}\frac{\alpha_{ij}u^{(j)} + [u^{(j)}]^3}{\beta_{ij} + \eta_{ij}[u^{(j)}]^2} + \rho_{ij}\operatorname{arctg} d_{ij}u^{(j)}$$

или

$$\varphi_{ij}(u^{(j)}) = \mu_{ij}\frac{\alpha_{ij}u^{(j)} + [u^{(j)}]^3}{\beta_{ij} + \eta_{ij}[u^{(j)}]^2} + \rho_{ij}\operatorname{th} d_{ij}u^{(j)}$$

при некоторых $\alpha_{ij} \ge 0$, $\beta_{ij} > 0$, $\eta_{ij} > 0$, $\mu_{ij}\rho_{ij} \ge 0$, $|\mu_{ij}| + |\rho_{ij}| \ne 0$ и произвольных $d_{ij} > 0$. Для иллюстрации того факта, что приведенные примеры функций действительно обладают такими свойствами, на рис. 1 показан график функции

$$\varphi^{(i)}(u^{(j)}) \equiv \varphi_{ij}(u^{(j)}) = -\frac{6u^{(j)} + [u^{(j)}]^3}{4 + 3[u^{(j)}]^2} - 3\operatorname{arctg}\frac{1}{2}u^{(j)}$$

этого класса и ее производная $\partial\varphi^{(i)}/\partial u^{(j)} \equiv d\varphi_{ij}/du^{(j)}$ $(r = 1)$. Как видно, последняя остается ограниченной и не изменяет свой знак для всех $u^{(j)} \in \mathbf{R}$.

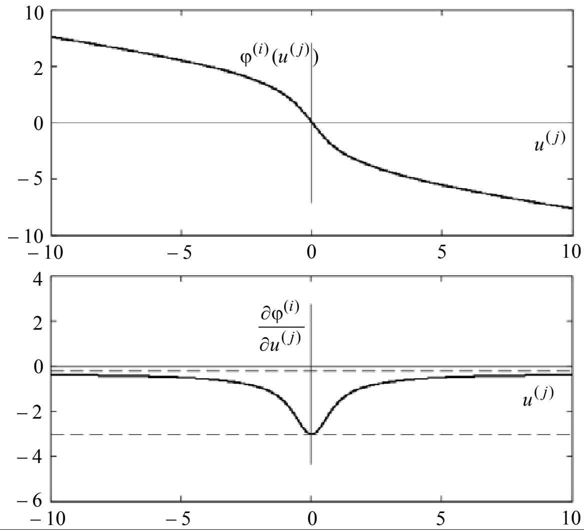

Рис. 1

Предполагается (это существенный момент), что все границы $\underline{b}^{(ij)}, \overline{b}^{(ij)}$, фигурирующие в (9), априори известны.

В силу общего предположения (4) имеем

$$\left| v_n^{(i)} \right| \le \varepsilon^{(i)} < \infty, \quad i = 1, \dots, m \quad (0 \le n < \infty). \tag{11}$$

(В обозначениях, принятых в современной теории управления, ограничение (11) позволяет записать

$$\{v_n\} \in \underbrace{\ell_\infty \times \dots \times \ell_\infty}_{m}. \tag{12}$$

Здесь ℓ_∞ — пространство всевозможных последовательностей ограниченных скалярных величин $x_n \in \mathbf{R}$ с ℓ_∞-нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{0 \le n < \infty} |x_n| < \infty$; см. [2, с. 29].)

Следуя [11], построим систему стабилизации выходных переменных $y_n^{(i)}$ на заданных уровнях $y^{0(i)}$ ($y^{0(i)} \equiv \mathrm{const}$ для всех $i = 1, \dots, m$) с использованием линейного регулятора

$$u_n = u_{n-1} + A e_n, \tag{13}$$

$$e_n := y^0 - y_n, \tag{14}$$

где A — постоянная $r \times m$-матрица перекрестных связей, определенным образом зависящая от некоторой матрицы B_0 так называемой линейной опорной модели нелинейности $\varphi(u)$ [11, с. 25], а $y^0 = [y^{0(1)}, \dots, y^{0(m)}]^{\mathrm{T}}$. (Выбор самой матрицы A, как и матрицы B_0, будет осуществлен позже.)

Без умаления общности считается, что компоненты вектора y^0 удовлетворяют требованию

$$|y^{0(1)}| + \dots + |y^{0(m)}| \ne 0,$$

которое интерпретируется по существу как требование $\|y^0\| \ne 0$. Более того, считается, что в случае $r = m$ непременно существует решение уравнения

$$\varphi(u) = y^0$$

относительно $u_n \in \mathbf{R}^r$ (свойство (10) как раз и определяет необходимое условие существования такого решения).

Обозначая $b^{(ij)}(u) := \partial\varphi^{(i)}(u) / \partial u^{(j)}$, введем матрицу

$$B(u) = \begin{pmatrix} b^{(11)}(u) & \dots & b^{(1r)}(u) \\ & \vdots & \\ b^{(m1)}(u) & \dots & b^{(mr)}(u) \end{pmatrix}, \tag{15}$$

представляющую собой $m \times r$-матрицу Якоби, элементы которой играют роль своеобразных динамических коэффициентов усиления от j-го управления $u_n^{(i)}$ к i-му выходу $y_n^{(i)}$ для каждого фиксированного $u_n \in \mathbf{R}^r$. В силу (9) ранг этой матрицы согласно (15) с учетом (8) удовлетворяет условию

$$1 \le \operatorname{rank} B(u) \le r. \tag{16}$$

ISSN 0572-2691

Пусть пара векторов u^e и $y^e = \varphi(u^e)$ определяет некоторое состояние равновесия $\{u^e,\ y^e\}$ замкнутой системы (6), (13), (14) при отсутствии возмущений. Вводя обозначение $0_k := [\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}]^{\mathrm{T}}$ k-мерного нуль-вектора, нетрудно убедиться, что u^e — решение $u = u^e$ уравнения

$$A(y^0 - \varphi(u)) = 0_r, \tag{17}$$

вытекающего из выражения (13) с учетом (6), (14) при $u_{n+1} = u_n (= u^e)$ и $v_n \equiv 0_m$.

Далее понадобится следующая лемма.

Лемма 1 [11]. Если положение равновесия $\{u^e,\ y^e\}$ существует, то достаточным условием асимптотической устойчивости нелинейной системы управления (6), (13), (14) при $v_n \equiv 0_m$ является требование

$$\sup_{u \in \mathbf{R}^r} \| I_r - AB(u) \| < 1 \tag{18}$$

для любой матричной нормы $\|\cdot\|$, где I_r — единичная $r \times r$-матрица.

В основу доказательства этой леммы положен известный принцип сжатых отображений и тот факт, что если $\varphi(u)$ — функция, дифференцируемая по компонентам $u^{(1)}, \ldots, u^{(r)}$ вектора u, то для ее приращения справедливо соотношение

$$\varphi(u_n) - \varphi(u^e) = \int_0^1 B(u^e + \overline{\tau}(u_n - u^e))(u_n - u^e)\, d\overline{\tau}, \tag{19}$$

в котором $B(u)$ — матрица Якоби вида (15) с элементами $b^{(ij)}(u) = \partial\varphi^{(i)}(u)/\partial u^{(j)}$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, r)$ (см. [19, с. 17]).

Следствие. Устойчивость замкнутой системы управления (6), (13), (14) не гарантируется, если матрица A или матрица $B(u)$ хотя бы для одного $u \in \mathbf{R}^r$ является матрицей неполного ранга, т.е. $\operatorname{rank} A < r$ или $\operatorname{rank} B(u) < r$.

В справедливости сформулированного следствия можно убедиться, используя некоторые замечательные свойства ранга, собственных значений и норм матриц, которые приведены в справочных источниках по теории матриц, а именно вытекающее из неравенства Фробениуса [20, ч. I, п. 2.17.1] свойство

$$\operatorname{rank} P_1 P_2 \le \min\{\operatorname{rank} P_1,\ \operatorname{rank} P_2\}$$

ранга произведения двух матриц и свойство

$$\lambda_i(\alpha I_r + \beta P) = \alpha + \beta\lambda_i(P) \quad (i = 1, \ldots, r)$$

любого i-го собственного значения $\lambda_i(\cdot)$ произвольной матрицы $P \in \mathbf{R}^{r \times r}$ при произвольных α, β из $\mathbf{R}$ [20, ч. I, п. 2.15.3], а также известное соотношение

$$\|P\| \ge \max_{1 \le i \le r} |\lambda_i(P)|$$

для любой матричной нормы [2, с. 260], вытекающее из теоремы Брауэра [20, ч. III, п. 1.6.5] и теоремы Брауна [20, ч. III, п. 1.5].

Замечание 1. Можно показать, что в рамках предположения (9) при $m = r$ требование $\operatorname{rank} B(u) = r$ для всех $u \in \mathbf{R}^r$ заведомо выполняется, если

$$\min\{|\underline{b}^{(jj)}|, |\overline{b}^{(jj)}|\} > \sum_{i \neq j} \max\{|\underline{b}^{(ij)}|, |\overline{b}^{(ij)}|\}, \quad \forall j = 1, \ldots, r. \tag{20}$$

Условия (20), которые нетрудно проверить при наличии априорной информации о границах элементов матрицы $B(u)$, выраженной в форме (9), получаются прямым применением теоремы Адамара, известной в западной литературе как теорема Леви–Деспланка [20, ч. III, п. 2.1], к матрице (15) (см. также [21, п. 16.27]).

Следуя работе [11], определим матрицу $D(u)$ относительных отклонений элементов $m \times r$-матрицы Якоби $B(u)$ от элементов некоторой фиксированной $m \times r$-матрицы $B_0 = (b_0^{(ij)})$ линейной опорной модели в такой форме:

$$B_0 D(u) = B(u) - B_0.$$

Тогда, как показано в [11, с. 27], при выборе в законе управления (13) матрицы A по формуле

$$A = (B_0^{\mathrm{T}} B_0)^{-1} B_0^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

гарантируется асимптотическая устойчивость рассматриваемой системы управления при максимально возможной степени неадекватности нелинейного объекта и его линейной модели, выраженной неравенством

$$\max_{u \in \mathbf{R}^r} \|D(u)\| < 1.$$

Формула (21) нуждается в одном существенном уточнении, касающемся ограничения на выбор матрицы B_0, указания на которое найти в [11], к сожалению, не удалось. Дело в том, что операция обращения произведения $B_0^{\mathrm{T}} B_0$, требуемая для определения матрицы A по этой формуле, допустима лишь при выполнении требования

$$\det (B_0^{\mathrm{T}} B_0) \neq 0,$$

налагаемого на $r \times r$-матрицу $B_0^{\mathrm{T}} B_0$. Но в условиях (8) это возможно, только если

$$\operatorname{rank} B_0 = r, \tag{22}$$

т.е. если B_0 — матрица полного ранга (см. [21, п. 4.41]).

Примечательно, что при ограничениях (8), (22) правая часть (21) представляет собой не что иное, как так называемую обобщенную (псевдообратную) $m \times r$-матрицу $B_0^+ = (\beta^{(ij)})$, которая определяется так:

$$B_0^+ := (B_0^{\mathrm{T}} B_0)^{-1} B_0^{\mathrm{T}} \tag{23}$$

(см. [21, п. 6.46]); в частном же случае, когда $r = m$, эта правая часть становится просто обычной обратной матрицей, т.е. $B_0^+ = B_0^{-1}$.

Полагая $A = B_0^+$, приведем закон управления (13) к виду

$$u_n = u_{n-1} + B_0^+ e_n; \tag{24}$$

ISSN 0572-2691

при этом условие устойчивости (18) будет определяться соотношением

$$\sup_{u \in \mathbf{R}^r} \left\| I_r - B_0^+ B(u) \right\| < 1, \tag{25}$$

справедливым при выполнении (8), (22).

Нетрудно заметить, что матрица B_0^+ обладает свойством

$$B_0^+ B_0 = I_r, \tag{26}$$

в чем можно убедиться прямой подстановкой (23) в левую часть (26).

Введем далее матрицу $\Delta(u) = (\delta^{(ij)}(u))$ абсолютных отклонений элементов $B(u)$ от элементов B_0, определяемую разностью

$$\Delta(u) = B_0 - B(u). \tag{27}$$

Используя выражение (27) и учитывая (26), запишем условие устойчивости (25) следующим образом:

$$\sup_{u \in \mathbf{R}^r} \left\| B_0^+ \Delta(u) \right\| < 1. \tag{28}$$

На основании (27) с учетом (15) для элементов $\delta^{(ij)}(u)$ матрицы $\Delta(u)$ имеем

$$\delta^{(ij)}(u) = b_0^{(ij)} - b^{(ij)}(u). \tag{29}$$

Вспоминая, что $b^{(ij)} = \partial\varphi^{(i)}(u) / \partial u^{(j)}$, в силу ограничений (9) согласно (29) можно записать

$$\underline{\delta}^{(ij)} \le \delta^{(ij)}(u) \le \overline{\delta}^{(ij)}, \tag{30}$$

где

$$\underline{\delta}^{(ij)} = \underline{b}^{(ij)} - b_0^{(ij)}, \quad \overline{\delta}^{(ij)} = \overline{b}^{(ij)} - b_0^{(ij)}. \tag{31}$$

Поскольку в силу (30), (31) справедливо соотношение

$$\sup_{u \in \mathbf{R}^r} \left\| B_0^+ \Delta(u) \right\| \le q := \max_{\Delta : \delta^{(ij)} \in [\underline{\delta}^{(ij)},\, \overline{\delta}^{(ij)}]} \left\| B_0^+ \Delta \right\|, \tag{32}$$

в котором $\Delta = (\delta^{(ij)})$, то согласно (32) достаточное условие (28) асимптотической устойчивости замкнутой системы управления (6), (14), (24) будет заведомо выполняться, если

$$q = \max_{\Delta : \delta^{(ij)} \in [\underline{\delta}^{(ij)},\, \overline{\delta}^{(ij)}]} \left\| B_0^+ \Delta \right\|_1 < 1, \tag{33}$$

где $\| \cdot \|_1$ — обозначение строчной нормы матрицы.

Используя определение

$$\| P \|_1 := \max_{1 \le i \le r} \sum_{j=1}^{r} | p^{(ij)} |$$

самой строчной нормы некоторой $r \times r$-матрицы $P = (p^{(ij)})$, приведенное в [2, с. 259], а также тот факт, что каждый элемент любого i-го столбца $\delta^{(i)} = [\delta^{(1i)}, \ldots, \delta^{(mi)}]^{\mathrm{T}}$ матрицы Δ пробегает значения в интервале $\underline{\delta}^{(ji)} \le \delta^{(ji)} \le \overline{\delta}^{(ji)}$ независимо от того, какие значения принимают элементы остальных $r-1$ столбцов, условие (33) можно представить как

$$q < 1 \tag{34}$$

при

$$q := \max_{1 \le k \le r} \sum_{i=1}^{r} \max_{\delta^{(ij)} \in [\underline{\delta}^{(ij)},\, \overline{\delta}^{(ij)}]} \left| \sum_{j=1}^{m} \beta_0^{(kj)} \delta^{(ji)} \right|. \tag{35}$$

Тем самым устанавливается справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1. Зафиксируем произвольную матрицу B_0 полного ранга с элементами $b_0^{(ij)} \in [\underline{b}^{(ij)},\, \overline{b}^{(ij)}]$. Пусть далее выполнены базовые предположения (9) относительно нелинейности $\varphi(u)$. Тогда при отсутствии возмущений замкнутая система управления в составе нелинейного статического объекта (6) и линейного регулятора (14), (24) будет робастно устойчивой для класса нелинейностей, удовлетворяющих интервальным ограничениям (9), если существует положение равновесия $\{u^e,\, y^e\}$ этой системы и выполнено требование (34), в котором величина q определяется выражением (35).

Замечание 2. Для проверки достаточного условия робастной устойчивости, определяемого формулами (34), (35), удобно использовать прием, подобный предложенному в [2, п. 4.5], сведя такую проверку к решению серии довольно простых задач линейного программирования.

Утверждение 2 (о диссипативности). В условиях утверждения 1 и предположения (12) замкнутая нелинейная система управления (6), (14), (24) будет оставаться предельно ограниченной при $n \to \infty$ (диссипативной), если выполнено требование (34); при этом

$$\limsup_{n \to \infty} \| u_n - u^e \| \le \| B_0^{+} \| \varepsilon (1-q)^{-1} < \infty, \tag{36}$$

$$\limsup_{n \to \infty} \| y_n - y^e \| \le \| B_0^{+} \| \max_{B : \underline{b}^{(ij)} \le b^{(lj)} \le \overline{b}^{(lj)}} \| B \| \varepsilon (1-q)^{-1} < \infty, \tag{37}$$

где $B = (\beta^{(ij)})$.

Доказательство утверждения 2, которое опускается из-за ограниченного объема статьи, проводится по той же схеме, что и доказательство леммы 1 в [11]; при этом существенно используется соотношение (19).

Замечание 3. Вычисление по формулам (36), (37) естественным образом предполагает, что нормы матриц B_0^{+} и B должны быть согласованными с нормами векторов u_n, y_n и v_n.

В рамках представлений, развиваемых в современной теории управления, оценки (36), (37) означают, что $\{u_n\} \in \underbrace{\ell_\infty \times \ldots \times \ell_\infty}_{r}$ и $\{y_n\} \in \underbrace{\ell_\infty \times \ldots \times \ell_\infty}_{m}$. А это дает в конечном счете решение задачи (5).

Робастное адаптивное управление нелинейными динамическими объектами

Рассмотрим теперь возможность построения линейного регулятора для управления классом нелинейных динамических объектов (1) с нелинейностями вида (3). В этом случае

$$y_n = f(y_{n-1}, \ldots, y_{n-N}) + b u_{n-1} + v_{n-1}. \tag{38}$$

Предполагается, что сама функция $f(x)$, зависящая от вектора $x = [x_1, \ldots, x_N]^{\mathrm{T}}$, может быть определена как сумма линейной составляющей и некоторой нелинейности:

$$f(x) = a^{\mathrm{T}} x + \Delta(x). \tag{39}$$

В этом выражении $a \in \mathbf{R}^N$ — неизвестный вектор, а нелинейная часть $\Delta(x)$ является произвольной функцией от $x \in \mathbf{R}^N$, ограниченной по модулю, т.е.

$$|\Delta(x)| \le D, \tag{40}$$

где D — априори неизвестное число.

В силу (39), (40) $f(x)$ удовлетворяет ставшему уже стандартным требованию «секторной» ограниченности [17]:

$$|f(x)| \le k_1 \|x\| + k_0 \tag{41}$$

с коэффициентами $k_1 = \|a\|$, $k_0 = D$.

Примером функций $f(x)$ со свойствами (39), (40) могут служить функции

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \frac{\alpha_i x_i + x_i^3}{\beta_i + \eta_i x_i^2} + \sum_{i=1}^{N} h_i \tag{42}$$

при $\alpha_i \ge 0$, $\beta_i, \eta_i > 0$ с произвольными μ_i из $\mathbf{R}$, где

$$h_i = \rho_i^{(1)} \sin d_i^{(1)} x_i + \rho_i^{(2)} \mathrm{arctg}\, d_i^{(2)} x_i + \rho_i^{(3)} \mathrm{th}\, d_i^{(2)} x_i$$

— взвешенная сумма некоторых тригонометрических функций, ограниченных при $|\rho_i^{(k)}| < \infty$, $|d_i^{(k)}| < \infty$, $k = 1, 2, 3$. В этом нетрудно убедиться, если учесть, что отклонение каждого слагаемого $\mu_i(\alpha_i x_i + x_i^3)/(\beta_i + \eta_i x_i^2)$, фигурирующего в первой сумме соотношения (42), от соответствующей линейной функции $\mu_i x_i / \eta_i$ остается ограниченным.

Для иллюстрации свойств (39), (40) на рис. 2 изображен график функции

$$f(x) = \frac{6x + x^3}{4 + 3x^2} + \mathrm{th}\, 2x \tag{43}$$

класса (42), а также ее нелинейная составляющая $\Delta(x)$ и производная $df(x)/dx$. Эта функция имеет константу Липшица $L = \max_{x \in \mathbf{R}} |d f(x)/dx| = 7/2 > 3/2 + \sqrt{2}$. (Заметим, что сама функция $f(x)$ в принципе не обязательно должна быть липшицевой.) Можно проверить, что для данной нелинейности $a = 1/3$, $D = \pi/2 + 1/3$ (см. рис. 2).

Как и в случае статических объектов, предполагается, что последовательность возмущений $\{v_n\} = v_0, v_1, \ldots$ ограничена:

$$|v_n| \le \varepsilon < \infty \quad \forall n. \tag{44}$$

Принципиальным моментом здесь является то, что оценка сверху ε уровня возмущения в (44) априори неизвестна.

Попытаемся построить замкнутую систему стабилизации выхода этого нелинейного объекта в некоторой окрестности точки $y^0 \in \mathbf{R}$ в условиях (39), (40) при наличии ограниченного возмущения v_n, используя линейный адаптивный регулятор вида

$$u_n = \frac{y^0 - a_n^{\mathrm{T}} x_{n-1}}{b_n} \tag{45}$$

с подстраиваемыми параметрами $a_n \in \mathbf{R}^N$ и $b_n \in \mathbf{R}$ $(b_n \neq 0)$, где $x_{n-1} = = [y_{n-1}, \ldots, y_{n-N}]^{\mathrm{T}}$.

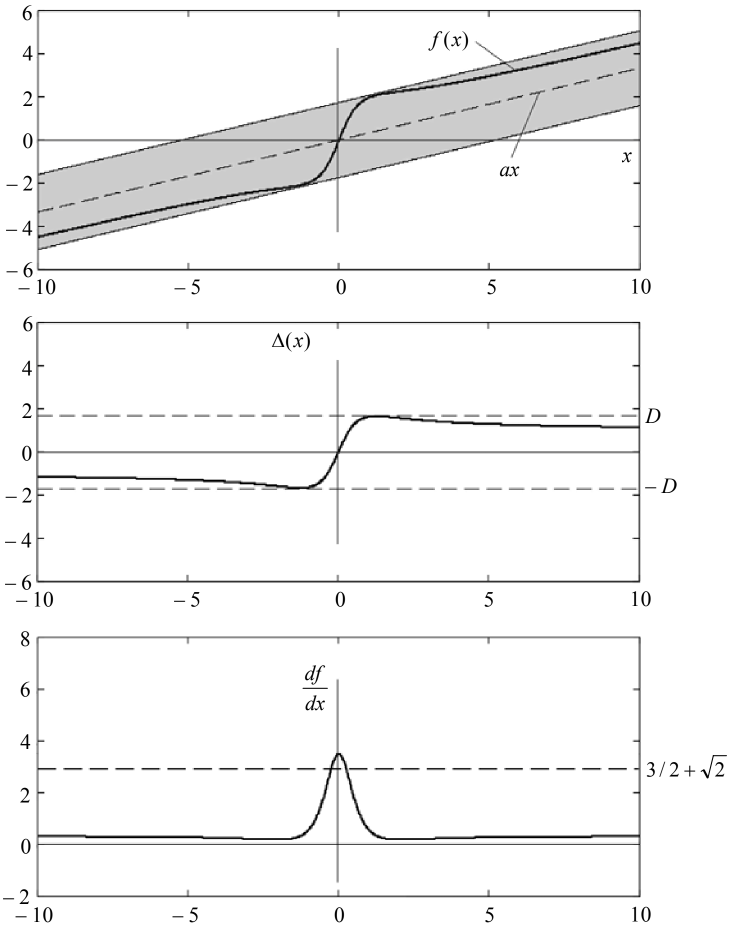

Рис. 2

Подобно тому, как это делается в работе [17], в качестве алгоритма адаптации возьмем рекуррентную процедуру точечного оценивания неизвестного вектора $\theta = [a^{\mathrm{T}},\ b]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{N+1}$ и неизвестного числа $\Lambda = \varepsilon + D$. Эта процедура формально получается последовательным решением бесконечной по n системы неравенств

$$\left| y_n - \tilde{a}^{\mathrm{T}} x_{n-1} - \tilde{b} u_{n-1} \right| \le \tilde{\Lambda}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{46}$$

относительно $(N+2)$-мерного вектора $\tilde{\theta} = [\tilde{a}^{\mathrm{T}},\ \tilde{b}, \tilde{\Lambda}]^{\mathrm{T}}$. (В силу (38)–(40) система неравенств (46) совместна: она имеет решение $\tilde{\theta} = [a^{\mathrm{T}},\ b, \Lambda]^{\mathrm{T}}$.)

Согласно [17] алгоритм адаптации определяется рекуррентным соотношением

$$\tilde{\theta}_n = \tilde{\theta}_{n-1} + \gamma_n \frac{f_0(\tilde{e}_n, \Lambda_{n-1})}{\| w_{n-1} \|_2^2} w_{n-1}. \tag{47}$$

В этом соотношении $\widetilde{\theta}_n = [a_n^{\mathrm{T}}, b_n, \Lambda_n]^{\mathrm{T}}$ — текущая точечная оценка неизвестного вектора $\theta \in \mathbf{R}^{N+2}$; $\|\cdot\|_2^2$ — обозначение квадрата евклидовой нормы вектора; функция

$$f_0(\widetilde{e}, \Lambda) = \begin{cases} |\widetilde{e}| - \Lambda, \text{ если } |\widetilde{e}| > \Lambda \ (\Lambda \geq 0), \\ 0 \qquad \text{в противном случае} \end{cases} \tag{48}$$

представляет собой неотрицательную функцию нечувствительности, которая зависит от ошибки параметрической идентификации линейной модели объекта

$$\widetilde{e}_n = y_n - a_{n-1}^{\mathrm{T}} x_{n-1} - b_{n-1} u_{n-1}, \tag{49}$$

а также от оценки Λ_{n-1} неизвестного Λ, выстроенной на предыдущем $(n-1)$-м шаге;

$$w_{n-1} = [\chi_{n-1}^{\mathrm{T}} \operatorname{sign} \widetilde{e}_n, \ 1]^{\mathrm{T}} \tag{50}$$

— $(N+2)$-мерный вектор измеряемых величин, в котором

$$\chi_{n-1} = [x_{n-1}^{\mathrm{T}}, u_{n-1}]^{\mathrm{T}}; \tag{51}$$

γ_n — число, свободно выбираемое в интервале

$$0 < \gamma' \leq \gamma_n \leq \gamma'' < 2 \tag{52}$$

таким образом, чтобы обеспечить выполнение требования $b_n \neq 0$.

С учетом определений (50) вектора w_{n-1} и векторов $\widetilde{\theta}_n$ и $\theta_n = [a_n^{\mathrm{T}}, b_n]^{\mathrm{T}}$ алгоритм (47) можно записать в такой форме:

$$\theta_n = \theta_{n-1} + \gamma_n \frac{f_0(\widetilde{e}_n, \Lambda_{n-1})}{1 + \| \chi_{n-1} \|_2^2} \chi_{n-1} \operatorname{sign} \widetilde{e}_n, \tag{53}$$

$$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} + \gamma_n \frac{f_0(\widetilde{e}_n, \Lambda_{n-1})}{1 + \| \chi_{n-1} \|_2^2}. \tag{54}$$

Соотношение (53) определяет процедуру точечного оценивания вектора параметров линейной части модели объекта, тогда как соотношение (54) определяет процедуру точечного оценивания «уровня» непараметрической неопределенности, вызванной появлением немоделируемой динамики и отсутствием априорной информации об уровне возмущения. Итак, закон управления (45) вместе с алгоритмом адаптации (53), (54) описывает линейный адаптивный регулятор.

Повторяя практически полностью выкладки, использованные при доказательстве леммы 1 в работе [17], можно доказать справедливость следующего предварительного результата, касающегося асимптотических свойств алгоритма адаптации.

Лемма 2. Пусть выполнены условия (39), (40) и предположение (44). Тогда при любых начальных $a_0 \in \mathbf{R}^N$, $b_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\Lambda_0 \geq 0$ алгоритм (47)–(52) обладает такими свойствами: а) последовательность $\{\Lambda_n\}$ неубывающая и при $n \to \infty$ сходится к некоторому конечному Λ_∞, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \Lambda_n = \Lambda_\infty < \infty$; б) $f_0(\widetilde{e}_n, \Lambda_{n-1}) / [1 + \| \chi_{n-1} \|_2^2]^{1/2} \in \ell_2$.

Основной результат, устанавливающий свойство робастности синтезируемой адаптивной системы управления, дает такое утверждение.

Утверждение 3. Для любого объекта класса (39), (40), (44) линейный адаптивный регулятор (45), (47)–(52) обеспечивает решение задачи (5) и $\lim_{n\to\infty}\sup|e_n|\le\Lambda_\infty$.

Доказательству этого утверждения предпосылается следующая базовая лемма, которая приводится в [22, p. 181] и повсеместно цитируется в западной литературе по адаптивному управлению как Key Technical Lemma.

Лемма 3. Пусть имеются некоторые последовательности скалярных величин $\{s_n\}$, $\{c_1(n)\}$, $\{c_2(n)\}$ и векторов $\{\sigma_n\}$. Предположим, что:

i) справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n^2}{c_1(n)+c_2(n)\|\sigma_n\|_2^2}=0; \tag{55}$$

ii) величины $c_1(n)$, $c_2(n)$ ограничены сверху равномерно по n, т.е.

$$0<c_1(n)\le K<\infty,\ \ 0<c_2(n)\le K<\infty\quad \forall n=1,2,\ldots;$$

iii) выполнено условие линейной ограниченности

$$\|\sigma_n\|\le C_1+C_2\max_{0\le\nu\le n}|s_\nu|\quad (0<C_1<\infty,\ \ 0<C_2<\infty). \tag{56}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}s_n=0, \tag{57}$$

и $\{\sigma_n\}$ — ограниченная последовательность: $\{\sigma_n\}\in\ell_\infty$.

Доказательство утверждения 3. На основании уравнения (38) с учетом ограничений (41), (44) можно записать соотношения

$$|u_{n-1}|=\frac{1}{b}|y_n-f(x_{n-1})-v_{n-1}|\le K_1|y_n|+K_2|x_{n-1}|_2+K_3, \tag{58}$$

в которых $K_1=|b|^{-1}$, $K_2=k_1|b|^{-1}$, $K_3=(D+\varepsilon)|b|^{-1}$.

Согласно (50), (51) по определению евклидовой нормы вектора имеем

$$\|\chi_{n-1}\|_2\le\|x_{n-1}\|_2+|u_{n-1}|,$$

откуда в силу (58) вытекает, что

$$\|\chi_{n-1}\|_2\le K_1|y_n|+K_2\|x_{n-1}\|_2+K_3. \tag{59}$$

Поскольку

$$\|x_{n-1}\|_2\le|y_{n-1}|+\ldots+|y_{n-N}|\le N\max_{n-N\le\nu\le n-1}|y_\nu|,$$

то неравенство (59) можно последовательно усилить следующим образом:

$$\|\chi_{n-1}\|_2\le K_3+K_4\max_{n-N\le\nu\le n-1}|y_\nu|\le K_3+K_4\max_{0\le\nu\le n-1}|y_\nu|\quad (K_4=K_1+NK_2). \tag{60}$$

Из (49) с учетом (45) находим $\tilde e_n=y_n-y^0=-e_n$, где e_n — ошибка замкнутой системы управления (38), (45). Отсюда $|y_n|\le|\tilde e_n|+|y^0|$, поэтому

$$\max_{0\le\nu\le n} |y_\nu| \le \max_{0\le\nu\le n} |\tilde{e}_\nu| + |y^0|. \quad (61)$$

В силу (61) последнее неравенство в цепочке (60) дает

$$\|\chi_{n-1}\|_2 \le K_5 + K_4 \max_{0\le\nu\le n} |\tilde{e}_\nu|, \quad (62)$$

где $K_5 = K_3 + |y^0|$.

Из определения (48) функции нечувствительности $f_0(\cdot,\cdot)$ следует неравенство

$$\tilde{e}_n \le f_0(\tilde{e}_n, \Lambda_{n-1}) + \Lambda_{n-1} \quad \forall n. \quad (63)$$

Поскольку $\sup\limits_{0\le n<\infty} \Lambda_n = \Lambda_\infty$ (в силу свойства а) алгоритма адаптации, установленного в лемме 2), неравенство (63) позволяет записать

$$\max_{0\le\nu\le n} |\tilde{e}_\nu| \le \max_{0\le\nu\le n} f_0(\tilde{e}_n, \Lambda_{n-1}) + \Lambda_\infty.$$

Отсюда на основании (62) получаем

$$\|\chi_{n-1}\|_2 \le K_6 + K_4 \max_{0\le\nu\le n} f_0(\tilde{e}_n, \Lambda_{n-1}), \quad (64)$$

где $K_6 = K_5 + \Lambda_\infty$.

В силу свойства б) алгоритма (47), которое устанавливается в лемме 2, справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_0^2(\tilde{e}_n, \Lambda_{n-1})}{1 + \|\chi_{n-1}\|_2^2} = 0. \quad (65)$$

Поскольку $f_0(\tilde{e}, \Lambda) \ge 0,$ то сравнение (65) с (55) и (64) с (56) показывает, что условия i)–iii) леммы 3 выполняются при $c_1(n) \equiv 1$, $c_2(n) \equiv 1$, $C_1 = K_6$, $C_2 = K_4$, если положить $s_n = f_0(\tilde{e}_n, \Lambda_{n-1})$, $\sigma_n = \chi_{n-1}$. Тем самым устанавливается, что $\{\chi_n\} \in \ell_\infty$. А это в силу определения (51) вектора χ_n означает, что выполняется требование (5). Используя теперь свойство (57) и определение (48) функции $f_0(\tilde{e}, \Lambda)$, а также тот факт, что $\Lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \Lambda_\infty$, убеждаемся в справедливости предельного соотношения для e_n, фигурирующего в утверждении.

Утверждение 3 доказано.

Для проверки работоспособности и эффективности предложенного алгоритма адаптивного управления проводилось моделирование замкнутой системы, содержащей объект (38) с нелинейностью (43) при $b = 2$, и адаптивный регулятор (45), (47). Последовательность $\{v_n\}$ моделировалась как последовательность псевдослучайных чисел, равномерно распределенных в интервале $[-1, 1]$. При проведении модельного эксперимента начальные оценки были взяты равными $a_0 = 1{,}5$, $b_0 = 0{,}01$.

Результаты моделирования при $y^0 = 2$, иллюстрирующие протекание процессов управления и адаптации, представлены на рис. 3. Они наглядно демонстрируют возможность достижения цели управления (5).

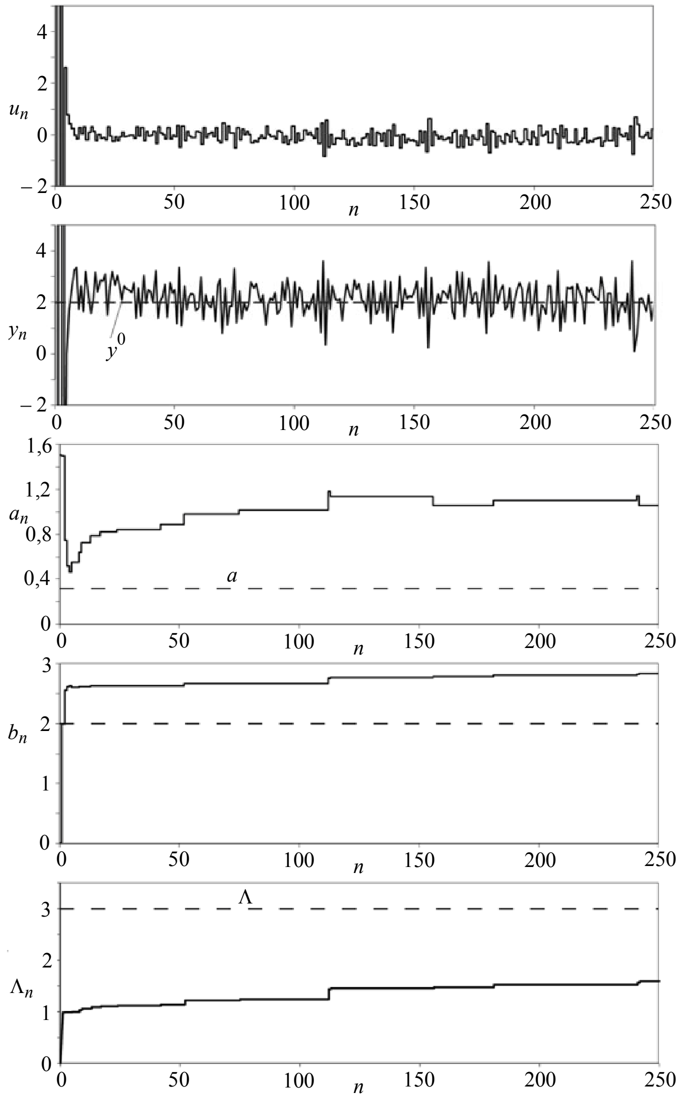

Рис. 3

Заключение

В настоящей работе установлено, что для определенного класса нелинейных многомерных статических объектов можно построить линейный неадаптивный регулятор, обеспечивающий робастную стабилизируемость замкнутой дискретной системы управления в условиях нестохастической неопределенности. Установлено также, что для определенного класса дискретных нелинейных одномерных динамических объектов в таких же условиях существует возможность достижения робастной стабилизируемости замкнутой системы управления с использованием линейного адаптивного регулятора.

Необходимо заметить, что решение задачи робастного управления рассматриваемым классом нелинейных многомерных статических объектов с произвольными нелинейностями, у которых ранг матрицы Якоби стеснен общим условием (16), в отличие от подобной задачи в случае линейных многомерных статических объектов до сих пор неизвестно (если оно вообще существует). Открытым также пока остается поставленный в контексте нерешенных задач адаптивного управления нелинейными динамическими объектами вопрос о возможном расширении класса нелинейностей $f(x)$ в (38), допускающем достижение робастной устойчивости замкнутых систем управления [23].

В заключение автор выражает искреннюю признательность акад. НАН Украины В.М. Кунцевичу за ценные критические замечания и рекомендации при обсуждении отдельных результатов работы.

Л.С. Житецький

РОБАСТНЕ КЕРУВАННЯ ДЕЯКИМИ КЛАСАМИ НЕЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ ОБ'ЄКТІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ЛІНІЙНИХ РЕГУЛЯТОРІВ

Ставляться і розв'язуються задачі робастного дискретного керування двома класами нелінійних невизначених об'єктів за наявності довільних невимірюваних обмежених збурень з можливо невідомими межами та лінійним зворотним зв'язком, а саме, розглядаються задача побудови лінійного неадаптивного робастного регулятора для керування деяким класом нелінійних багатовимірних статичних об'єктів та задача побудови лінійного адаптивного робастного регулятора для керування деяким класом нелінійних одновимірних динамічних об'єктів. Встановлено достатні умови, що гарантують робастну стійкість систем керування, а також деякі асимптотичні властивості побудованих алгоритмів управління.

L.S. Zhiteckii

ROBUST CONTROL OF SOME CLASSES OF NONLINEAR DISCRETE-TIME PLANTS USING LINEAR CONTROLLERS

The problems of robust discrete-time control for two classes of nonlinear uncertain plants in the presence of arbitrary unmeasurable bounded disturbances with possibly unknown bounds via linear feedback are stated and solved. Namely, the problem of designing a linear nonadaptive robust controller for controlling a class of nonlinear multivariable static plants and the problem of designing a linear adaptive robust controller for controlling a class of nonlinear one-dimensional dynamic plants are considered. Sufficient conditions guaranteeing the robust stability of the control systems and also some asymptotic properties of designed control algorithms are established.

1. *Ioannou P.A., Sun J.* Robust adaptive control. — Upper Saddle River, NJ : Prentice-Hall, 1996. — 821 p.
2. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. — М. : Наука, 2002. — 303 с.
3. *Никифоров В.О.* Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. — СПб. : Наука, 2003. — 282 с.
4. *Кунцевич В.М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — Киев : Наук. думка, 2006. — 264 с.
5. *Житецкий Л.С., Скурихин В.И.* Адаптивные системы управления с параметрическими и непараметрическими неопределенностями. — Киев : Наук. думка, 2010. — 301 с.
6. *Соколов В.Ф.* Робастное управление при ограниченных возмущениях. — Сыктывкар : Коми научный центр УрО РАН, 2011. — 218 с.
7. *Feng G.* A robust discrete-time direct adaptive control algorithm // Systems and Control Letters. — 1994. — **22**. — P. 203–208.
8. *Афанасьев В.Н.* Концепция гарантированного управления неопределенными объектами // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2010. — № 1. — С. 24–31.
9. *Isidori A.* Nonlinear control systems II. — London : Springer-Verlag, 1999. — 293 p.

10. *Zhiteckii L.S., Azarskov V.N., Solovchuk K.Yu., Sushchenko O.A.* Discrete-time robust steady-state control of nonlinear multivariable systems: a unified approach // Prep. 19th IFAC World Congress. (Cape Town, South Africa, 2014.) — 2014. — P. 8140–8145.
11. *Катковник В.А., Первозванский А.А.* Методы поиска экстремума и задачи синтеза многомерных систем управления // Адаптивные автоматические системы. — М. : Сов. радио, 1972. — С. 17–42.
12. *Song Y., Grizzle J.W.* Adaptive output-feedback control of a class of discrete time nonlinear systems // Proc. 1993 American Control Conference (San Francisco, CA, USA, 1993). — 1993. — P. 1359–1364.
13. *Kanellakopoulus L.* A discrete-time adaptive nonlinear system // IEEE Trans. Automat. Control. — 1994. — **39**, N 11. — P. 2362–2365.
14. *Fabri S.G., Kadirkamanathan V.* Discrete-time adaptive control of nonlinear systems // Prep. IFAC Workshop «Adaptive Systems and Signal Processing» (University of Strathclyde, Glasgow, Scotland, UK, 26th–28th August, 1998). — 1998. — P. 153–158.
15. *Spooner J.T., Ordonez R., Passino K.M.* Stable direct adaptive control of a class of discrete time nonlinear systems // Proc. 13th IFAC World Congress (San Francisco, USA, 30th June – 5th July,1996). — 1996. — K. — P. 343–348.
16. *Yeh P.-C., Kokotovic P.V.* Adaptive control of a class of nonlinear discrete time systems // Int. J. Control. — 1995. — **62**, N 2. — P. 303–324.
17. *Zhiteckij L.S.* Singularity-free stable adaptive control of a class of nonlinear discrete-time systems // Proc. 15th IFAC World Congress. (Barcelona, Spain, 2002.) — 2002. — **M**. — P. 475–480.
18. *Xie L.-L., Guo L.* How much uncertainty can be dealt with by feedback? // IEEE Trans. Automat. Control. — 2000. — **45**, N 12. — P. 2203–2212.
19. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. — М. : Наука, 1983. — 384 с.
20. *Marcus M., Mink H.* A survey of matrix theory and matrix inequalities. — Boston : Allyn and Bacon, Inc., 1964. — Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. — М. : Наука. — 1972. — 232 с.
21. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. — М. : Наука, 1984. — 320 с.
22. *Goodwin G.C., Sin K.S.* Adaptive filtering, prediction and control. — Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1984. — 540 p.
23. *Zhiteckij L.S.* An open problem in adaptive nonlinear control theory // Unsolved problems in mathematical systems and control theory. — Princeton, USA: Princeton University Press, 2004. — P. 229–232.

Получено 03.11.2015