УДК 517.935;519.718

А.Г. Мазко, С.Н. Кусий

РОБАСТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ И ОЦЕНКА ВЗВЕШЕННОГО ПОДАВЛЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Введение

Задача стабилизации динамических систем по выходу — одна из главных задач теории управления. Полное решение этой задачи для класса линейных систем известно лишь в некоторых частных случаях [1, 2]. На практике уравнения движения управляемых объектов могут содержать неопределенные элементы (параметры, функции, внешние возмущения и т.п.). Для таких объектов возникают задачи синтеза законов управления, обеспечивающих робастную устойчивость состояний, а также оценку и оптимизацию интегральных показателей качества (см., например, [3–8]).

В теории H_∞-оптимизации линейных систем используется характеристика качества

$$J = \sup_{\|w\|\neq 0} \|z\|/\|w\| = \sup_{\omega}\|H(i\omega)\| = \|H\|_\infty,$$

где $H(s)$ — передаточная матрица объекта от входа w к управляемому выходу z, $\|\cdot\|$ — спектральная матричная норма. Данная характеристика описывает уровень гашения внешних возмущений w в линейной системе при нулевом начальном состоянии $x_0 = 0$. Задача H_∞-оптимального управления заключается в построении статического или динамического регулятора по наблюдаемому выходу y, обеспечивающего минимальное значение J и робастную устойчивость нулевого состояния системы с ограниченной неопределенностью $w(t)$, $t \geq 0$.

Отметим, что большинство известных методов решения упомянутых задач стабилизации и оптимизации систем сводится к решению линейных матричных неравенств (ЛМН). Для этого созданы достаточно эффективные средства LMI Toolbox компьютерной системы MATLAB [9].

В данной работе рассматриваются некоторые классы линейных и нелинейных систем с управляемыми и наблюдаемыми выходами. Продолжая исследования [10, 11] с использованием систем ЛМН, разрабатываются алгоритмы робастной стабилизации и достижения желаемой оценки некоторого обобщенного критерия качества, характеризующего взвешенный уровень подавления внешних и начальных возмущений.

Будем использовать следующие обозначения: I_n — единичная $n\times n$-матрица; $0_{n\times m}$ — нулевая $n\times m$-матрица; $X = X^{\mathrm{T}} > 0\ (\geq 0)$ — положительно (неотрицательно)-определенная симметричная матрица; $\operatorname{rank} A$, $\ker A$ и $\sigma(A)$ — соответственно ранг, ядро и спектр матрицы A; $\mathrm{i}(X)=\{\mathrm{i}_+,\mathrm{i}_-,\mathrm{i}_0\}$ — инерция матрицы $X=X^{\mathrm{T}}$, состоящая из количеств ее положительных, отрицательных и нулевых собственных чисел с учетом кратностей; $\|x\|$ — евклидова норма вектора x; $\mathrm{Co}\{A_1,\dots,A_\nu\}=$ $=\{\alpha_1A_1+\dots+\alpha_\nu A_\nu:\alpha_k\ge 0,\ k=\overline{1,\nu},\ \alpha_1+\dots+\alpha_\nu=1\}$ — выпуклый многогранник (политоп) с вершинами $A_1,\dots,A_r$ в пространстве матриц.

1. Вспомогательные утверждения

При исследовании матричных неравенств с блочно-матричными выражениями типа $M=\begin{bmatrix} A & B^{\mathrm{T}} \\ B & C\end{bmatrix}$ часто используется следующее утверждение.

Лемма 1 (лемма Шура [12]). Пусть диагональный блок A (C) матрицы M невырожденный. Тогда матричное неравенство $M\le 0$ равносильно соотношениям

$$A<0,\ M_A=C-BA^{-1}B^{\mathrm{T}}\le 0\ \ (C<0, M_C=A-B^{\mathrm{T}}C^{-1}B\le 0).$$

При этом $M<0\Leftrightarrow A<0,\ M_A<0\Leftrightarrow C<0,\ M_C<0.$

Лемма 2 [13]. Линейное матричное неравенство $A^{\mathrm{T}}XB+B^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}A<C$, где $A\in\mathrm{C}^{p\times n}$, $B\in\mathrm{C}^{q\times n}$ и $C=C^{\mathrm{T}}\in\mathrm{C}^{n\times n}$, имеет решение $X\in\mathrm{C}^{p\times q}$ в том и только в том случае, когда выполняется одно из условий:

а) $\operatorname{rank}A=n$, $\operatorname{rank}B=n$;

б) $\operatorname{rank}A<n$, $\operatorname{rank}B=n$, $W_A^{\mathrm{T}}CW_A>0$;

в) $\operatorname{rank}B<n$, $\operatorname{rank}A=n$, $W_B^{\mathrm{T}}CW_B>0$;

г) $\operatorname{rank}A<n$, $\operatorname{rank}B<n$, $W_A^{\mathrm{T}}CW_A>0$, $W_B^{\mathrm{T}}CW_B>0$,

где W_A и W_B — матрицы, столбцы которых составляют базисы соответствующих ядер $\ker A$ и $\ker B$.

В [14] при условиях леммы 2 приведено общее решение рассматриваемого матричного неравенства в параметрической форме.

Лемма 3. Для заданных матриц $X>0$, $Y>0$ и числа $\gamma>0$ существуют матрицы $X_1\in\mathrm{R}^{r\times n}$, $X_2\in\mathrm{R}^{r\times r}$, $Y_1\in\mathrm{R}^{r\times n}$ и $Y_2\in\mathrm{R}^{r\times r}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\hat{X}=\begin{bmatrix} X & X_1^{\mathrm{T}} \\ X_1 & X_2\end{bmatrix}>0,\ \hat{Y}=\begin{bmatrix} Y & Y_1^{\mathrm{T}} \\ Y_1 & Y_2\end{bmatrix}>0,\ \hat{X}\hat{Y}=\gamma^2 I_{n+r}, \tag{1}$$

в том и только в том случае, когда

$$W=\begin{bmatrix} X & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y\end{bmatrix}\ge 0,\ \ \operatorname{rank}W\le n+r. \tag{2}$$

Доказательство. Из леммы 1 и формулы для ранга блочных матриц вытекает эквивалентность соотношений (2) и

$$Z=Y-\gamma^2X^{-1}\ge 0,\ \ \operatorname{rank}\mathrm{Z}\le r. \tag{3}$$

Используем формулу Фробениуса [12] для обращения блочной матрицы $\hat{X}$ в (1):

$$\frac{1}{\gamma^2}\begin{bmatrix} Y & Y_1^{\mathrm{T}} \\ Y_1 & Y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X^{-1}+X^{-1}X_1^{\mathrm{T}}H^{-1}X_1X^{-1} & -X^{-1}X_1^{\mathrm{T}}H^{-1} \\ -H^{-1}X_1X^{-1} & H^{-1}\end{bmatrix},$$

где $H=X_2-X_1X^{-1}X_1^{\mathrm{T}}$. Отсюда имеем $Z=\gamma^2X^{-1}X_1^{\mathrm{T}}H^{-1}X_1X^{-1}\ge 0$. Это означает, что (3) является следствием (1).

Покажем, что (1) — следствие (3), использующее разложение неотрицательно-определенной матрицы $Z = S^{\mathrm{T}} S \geq 0$, где $S \in \mathrm{R}^{r \times n}$ — любая матрица такая, что $\ker S = \ker Z$. Положим

$$X_1 = \frac{1}{\gamma} SX,\ \ X_2 = \frac{1}{\gamma^2} SXS^{\mathrm{T}} + I_r,\ \ Y_1 = -\gamma S,\ Y_2 = \gamma^2 I_r. \tag{4}$$

Тогда $H = I_r > 0$ и выполняются соотношения (1).

Лемма доказана.

Рассмотрим динамическую систему без управления:

$$\dot{x} = Ax + Bw,\ \ z = Cx + Dw,\ \ x(0) = x_0, \tag{5}$$

где $x \in \mathrm{R}^n$, $w \in \mathrm{R}^s$, $z \in \mathrm{R}^k$ — векторы соответственно состояния, ограниченных внешних возмущений и выхода системы, A, B, C и D — матрицы соответствующих размеров.

Определение 1 [11]. Система (5) называется неэкспансивной, если для любой ограниченной вектор-функции w ее вектор выхода z при любом $T > 0$ удовлетворяет условию

$$\int_0^T z^{\mathrm{T}} Qz dt \leq \int_0^T w^{\mathrm{T}} Pw dt + x_0^{\mathrm{T}} X_0 x_0,$$

где Q, P и X_0 — некоторые симметричные положительно-определенные матрицы.

Введем критерий качества для системы (5) относительно ее вектора выхода:

$$J = \sup_{0 < \|w\|_P^2 + x_0^{\mathrm{T}} X_0 x_0 < \infty} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^{\mathrm{T}} X_0 x_0}}, \tag{6}$$

где $\|z\|_Q^2 = \int_0^\infty z^{\mathrm{T}} Qz dt$ и $\|w\|_P^2 = \int_0^\infty w^{\mathrm{T}} Pw dt$. Значение J характеризует взвешенный уровень гашения внешних и начальных возмущений в данной системе. Критерий качества систем вида (6) рассматривался в [15] при $P = I_s$, $Q = I_k$ и $X_0 = \rho^2 I_n$. Система (5) неэкспансивна в том и только в том случае, когда $J \leq 1$ [11]. Через J_0 обозначим критерий J в случае нулевого начального вектора x_0. Очевидно, что $J_0 \leq J$, поскольку J_0 и J при $x_0 = 0$ совпадают. Если $P = I_s$ и $Q = I_k$, то J_0 совпадает с H_∞-нормой матричной передаточной функции $H(\lambda) = = C(\lambda I_n - A)^{-1} B + D$ системы (5) при $x_0 = 0$ [3].

Лемма 4 [11]. Пусть матрица A гурвицева. Тогда оценка $J_0 < \gamma$ выполняется в том и только в том случае, когда ЛМН

$$\Phi_\gamma = \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} X + XA + C^{\mathrm{T}} QC & XB + C^{\mathrm{T}} QD \\ B^{\mathrm{T}} X + D^{\mathrm{T}} QC & D^{\mathrm{T}} QD - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0 \tag{7}$$

имеет решение $X = X^{\mathrm{T}} > 0$. Для достижения оценки $J < \gamma$ необходимо и достаточно, чтобы была совместной система ЛМН (7) и

$$0 < X \leq \gamma^2 X_0. \tag{8}$$

Из леммы 4 следует, что критерии качества J_0 и J можно вычислить как решения соответствующих оптимизационных задач:

$$J_0 = \inf\{\gamma : \Phi_\gamma < 0,\ X > 0\},\ \ J = \inf\{\gamma : \Phi_\gamma < 0,\ 0 < X \leq \gamma^2 X_0\}. \tag{9}$$

Замечание 1. Если $J_0 < \gamma$, то система (5) с неопределенностью

$$w = \frac{1}{\gamma}\Theta z, \quad \Theta^{\mathrm{T}} P \Theta \le Q \tag{10}$$

робастно устойчива с общей квадратичной функцией Ляпунова $v(x) = x^{\mathrm{T}} X x$. Этот факт является следствием леммы 3 и теоремы 1 из [16].

Замечание 2. Для класса нелинейных систем вида (5) с непрерывными матричными коэффициентами $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ и $D(x)$ выполнение условий (7) и (8) при $x \in \mathrm{R}^n$ обеспечивает оценку $J < \gamma$ [11]. При этом если матричное неравенство (7) выполняется при $x = 0$, то нулевое состояние системы (5) с неопределенностью (10) робастно устойчиво с общей функцией Ляпунова $v(x) = x^{\mathrm{T}} X x$.

2. Стабилизация по измеряемому выходу

Рассмотрим нелинейную систему управления

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u, \quad y = C(x)x + Du, \tag{11}$$

где $x \in \mathrm{R}^n$, $u \in \mathrm{R}^m$ и $y \in \mathrm{R}^l$ — векторы соответственно состояния, управления и измеряемого выхода системы, а $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ и D — матрицы соответствующих размеров. Предположим, что зависимости $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$ непрерывны, при этом $\operatorname{rank} B \equiv m$ и $\operatorname{rank} C \equiv l$ в некоторой окрестности $S_0 = \{x : \|x\| \le h\}$ точки $x = 0$, а D — постоянная матрица. Наряду с (11) рассматриваем линейную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \tag{12}$$

где $A = A(0)$, $B = B(0)$ и $C = C(0)$.

Сформулируем условия стабилизируемости нулевого состояния систем (11) и (12) с помощью динамического регулятора порядка $r \le n$

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky, \tag{13}$$

где $\xi \in \mathrm{R}^r$, Z, V, U и K — неизвестные матрицы. Соотношения (11) и (13) можно представить в виде системы управления в расширенном фазовом пространстве R^{n+r} со статическим регулятором [10]:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}(\hat{x})\hat{x} + \hat{B}(\hat{x})\hat{u}, \quad \hat{y} = \hat{C}(\hat{x})\hat{x} + \hat{D}\hat{u}, \quad \hat{u} = \hat{K}\hat{y}, \tag{14}$$

где

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \hat{y} = \begin{bmatrix} y \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \hat{u} = \begin{bmatrix} u \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}, \quad \hat{K} = \begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}(\hat{x}) = \begin{bmatrix} A(x) & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times n} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}, \hat{B}(\hat{x}) = \begin{bmatrix} B(x) & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times m} & I_r \end{bmatrix}, \hat{C}(\hat{x}) = \begin{bmatrix} C(x) & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times n} & I_r \end{bmatrix}. \hat{D} = \begin{bmatrix} D & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times m} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}.$$

При условии $\det(I_m - KD) \ne 0$ замкнутая линейная система (12), (13) имеет вид

$$\dot{\hat{x}} = \hat{M}\hat{x}, \quad \hat{M} = \hat{A} + \hat{B}\hat{D}(\hat{K})\hat{C}, \tag{15}$$

где $\hat{A} = A(0)$, $\hat{B} = B(0)$, $\hat{C} = C(0)$, $\hat{D}(\hat{K}) = (I_{m+r} - \hat{K}\hat{D})^{-1}\hat{K}$, при этом

$$\hat{D}(\hat{K}) = \begin{bmatrix} D(K) & (I_m - KD)^{-1}U \\ V(I_l - DK)^{-1} & Z + VD(I_m - KD)^{-1}U \end{bmatrix},$$

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} M & B(I_m - KD)^{-1}U \\ V(I_l - DK)^{-1}C & Z + VD(I_m - KD)^{-1}U \end{bmatrix}.$$

Систему (15) будем называть α-устойчивой, если спектр матрицы $\hat{M}$ расположен в полуплоскости $\mathrm{C}_{\alpha}^{-} = \{\lambda : \mathrm{Re}\lambda + \alpha < 0\}$, где $\alpha \ge 0.$ Спектральный запас устойчивости α-устойчивой системы не меньше α. Через $B^{\perp}$ и $C^{\perp}$ обозначим ортогональные дополнения соответственно столбцов матрицы B и строк матрицы C, т.е. $B^{\perp} = W_{B^{\mathrm{T}}}$ и $C^{\perp} = W_C^{\mathrm{T}}$.

Теорема 1 [7]. Следующие утверждения эквивалентны:

1) существует динамический регулятор (13) порядка $r \le n,$ обеспечивающий α-устойчивость замкнутой системы (15);

2) существуют матрицы X и X_0, удовлетворяющие соотношениям

$$B^{\perp\mathrm{T}}(AX + XA^{\mathrm{T}} + 2\alpha X)\, B^{\perp} < 0, \tag{16}$$

$$\mathrm{i}(\Delta_0) = \{l, n, 0\}, \;\; X \ge X_0 > 0, \;\; \mathrm{rank}\,(X - X_0) \le r, \tag{17}$$

где

$$\Delta_0 = \begin{bmatrix} AX_0 + X_0A^{\mathrm{T}} + 2\alpha X_0 & X_0C^{\mathrm{T}} \\ CX_0 & 0 \end{bmatrix};$$

3) существуют матрицы X и Y, удовлетворяющие соотношениям (16) и

$$C^{\perp}(A^{\mathrm{T}}Y + YA + 2\alpha Y)\, C^{\perp\mathrm{T}} < 0, \tag{18}$$

$$W = \begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \ge 0\,, \;\; \mathrm{rank}\, W \le n + r. \tag{19}$$

Отметим, что матрицы X и X_0 удовлетворяют утверждению 2) в том и только в том случае, когда матрицы X и $Y = X_0^{-1}$ удовлетворяют утверждению 3). Для выполнения условий (19) необходимо, чтобы матрицы X и Y были положительно-определенными. Ранговое ограничение в (19) всегда выполняется в случае $r = n$.

Замечание 3. Из α-устойчивости линейной системы (15) следует асимптотическая устойчивость нулевого состояния нелинейной системы (14). Данный факт устанавливается методом квадратичных функций Ляпунова с учетом принятых предположений. В [11] на основе теоремы 1 сформулирован алгоритм построения динамического регулятора (13) порядка $r \le n,$ обеспечивающего α-устойчивость системы (15), а также асимптотическую устойчивость нулевого состояния замкнутой нелинейной системы (14).

3. Подавление ограниченных возмущений

Рассмотрим систему управления с постоянными матричными коэффициентами

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u, \;\; x(0) = x_0, \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u, \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u, \end{aligned} \tag{20}$$

где $x \in \mathrm{R}^n$, $u \in \mathrm{R}^m$, $w \in \mathrm{R}^s$, $z \in \mathrm{R}^k$ и $y \in \mathrm{R}^l$ — векторы соответственно состояния, управления, внешних возмущений, управляемого и наблюдаемого выходов. Нас интересуют законы управления, которые минимизируют критерий качества (6), а также гарантируют условия неэкспансивности системы (20) относительно вектора управляемого выхода z.

Если управление в системе (20) искать в виде статической обратной связи

$$u = Ky, \ \det(I_m - KD_{22}) \neq 0, \tag{21}$$

то замкнутая система примет вид

$$\dot{x} = Mx + Nw, \ \ z = Fx + Gw, \ \ x(0) = x_0, \tag{22}$$

где $M = A + B_2K_0C_2$, $N = B_1 + B_2K_0D_{21}$, $F = C_1 + D_{12}K_0C_2$, $G = D_{11} + D_{12}K_0D_{21}$, $K_0 = (I_m - KD_{22})^{-1}K$. Используя леммы 1 и 4 для системы (22), представим критерий выполнения оценки $J_0 < \gamma$ в виде

$$\begin{bmatrix} M^{\mathrm{T}}X + XM & XN & F^{\mathrm{T}} \\ N^{\mathrm{T}}X & -\gamma^2 P & G^{\mathrm{T}} \\ F & G & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

При этом матрица M должна быть гурвицевой. Данное соотношение можно переписать в виде ЛМН относительно K_0:

$$\hat{L}^{\mathrm{T}}K_0\hat{R} + \hat{R}^{\mathrm{T}}K_0^{\mathrm{T}}\hat{L} + \Omega < 0, \tag{23}$$

где $\hat{R} = [R, 0_{l\times k}]$, $R = [C_2, D_{21}]$, $\hat{L} = [L, 0_{m\times s}]\widetilde{X}$, $L = [B_2^{\mathrm{T}}, D_{12}^{\mathrm{T}}]$,

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_k \\ 0 & I_s & 0 \end{bmatrix}, \ \Omega = \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}X + XA & XB_1 & C_1^{\mathrm{T}} \\ B_1^{\mathrm{T}}X & -\gamma^2 P & D_{11}^{\mathrm{T}} \\ C_1 & D_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Если данное неравенство совместно, то всегда можно выбрать такое его решение K_0, что $\det(I_m - KD_{22}) \neq 0$, где

$$K = K_0(I_l + D_{22}K_0)^{-1}. \tag{24}$$

Применим утверждение б) леммы 2 к неравенству (23). Поскольку

$$W_{\hat{R}} = \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix}, \ W_{\hat{L}} = \widetilde{X}^{-1}\begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix},$$

то существование решения K_0 матричного неравенства (23) эквивалентно соотношениям

$$W_R^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}X + XA + C_1^{\mathrm{T}}QC_1 & XB_1 + C_1^{\mathrm{T}}QD_{11} \\ B_1^{\mathrm{T}}X + D_{11}^{\mathrm{T}}QC_1 & D_{11}^{\mathrm{T}}QD_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix}W_R < 0, \tag{25}$$

$$W_L^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} AY + YA^{\mathrm{T}} + B_1P^{-1}B_1^{\mathrm{T}} & YC_1^{\mathrm{T}} + B_1P^{-1}D_{11}^{\mathrm{T}} \\ C_1Y + D_{11}P^{-1}B_1^{\mathrm{T}} & D_{11}P^{-1}D_{11}^{\mathrm{T}} - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix}W_L < 0, \tag{26}$$

где $Y = \gamma^2 X^{-1}$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

 ISSN 0572-2691

Теорема 2. Для системы (20) существует статический регулятор (21), обеспечивающий оценку $J_0 < \gamma$ $(J < \gamma)$, в том и только том случае, когда для некоторой матрицы $X = X^{\mathrm{T}} > 0$ выполняется система соотношений (25) и (26) ((8), (25) и (26)). При этом система (22) с неопределенностью (10) робастно устойчива и имеет общую функцию Ляпунова $v(x) = x^{\mathrm{T}} X x,$ а матрицу регулятора K можно определить в виде (24), где K_0 — решение ЛМН (23).

Рассмотрим случай статической обратной связи по состоянию: $C_2 = I_n$, $D_{21} = 0$ и $D_{22} = 0$. Поскольку $XY = \gamma^2 I_n$ и $W_R = [0_{s\times n}, I_s],$ то в данном случае соотношения (8) и (25) приводятся к виду

$$\begin{bmatrix} X_0 & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0, \tag{27}$$

$$D_{11}^{\mathrm{T}} Q D_{11} - \gamma^2 P < 0. \tag{28}$$

Следовательно, для системы (20) существует статический регулятор по состоянию $u = Kx,$ обеспечивающий оценку $J_0 < \gamma$ $(J < \gamma),$ в том и только том случае, когда для некоторой матрицы $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0$ выполняется система соотношений (26) и (28) ((26)–(28)). При этом замкнутая система (22) с неопределенностью (10) робастно устойчива и имеет общую функцию Ляпунова $v(x) = \gamma^2 x^{\mathrm{T}} Y^{-1} x,$ а матрицу регулятора K можно определить в виде (24), где K_0 — решение ЛМН (23).

Построим закон управления для системы (20) в виде динамического регулятора (13) с нулевым начальным вектором $\xi(0) = 0$ при ограничении

$$\det(I_m - KD_{22}) \neq 0. \tag{29}$$

При этом замкнутая система (20), (13) будет иметь вид

$$\dot{\hat{x}} = \hat{M}\hat{x} + \hat{N}w, \quad z = \hat{F}\hat{x} + \hat{G}w, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \tag{30}$$

где

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \ \hat{M} = \begin{bmatrix} A + B_2 K_0 C_2 & B_2 U_0 \\ V_0 C_2 & Z_0 \end{bmatrix} = \hat{A} + \hat{B}_2 \hat{K}_0 \hat{C}_2,$$

$$\hat{N} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 K_0 D_{21} \\ V_0 D_{21} \end{bmatrix} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \hat{K}_0 \hat{D}_{21}, \ \hat{F} = [C_1 + D_{12} K_0 C_2, \, D_{12} U_0] = \hat{C}_1 + \hat{D}_{12} \hat{K}_0 \hat{C}_2,$$

$$\hat{G} = D_{11} + D_{12} K_0 D_{21} = D_{11} + \hat{D}_{12} \hat{K}_0 \hat{D}_{21},$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times n} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}, \ \hat{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times m} & I_r \end{bmatrix}, \ \hat{C}_2 = \begin{bmatrix} C & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times n} & I_r \end{bmatrix},$$

$$\hat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix}, \ \hat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{r\times s} \end{bmatrix}, \ \hat{D}_{21} = \begin{bmatrix} D_{21} \\ 0_{r\times s} \end{bmatrix}, \ \hat{C}_1 = [C_1, 0_{k\times r}], \ \hat{D}_{12} = [D_{12}, 0_{k\times r}].$$

Здесь неизвестными являются блоки матрицы $\hat{K}_0$

$$K_0=(I_m-KD_{22})^{-1}K,\ \ U_0=(I_m-KD_{22})^{-1}U,$$

$$V_0=V(I_l-D_{22}K)^{-1},\ \ Z_0=Z+VD_{22}(I_m-KD_{22})^{-1}U,$$

которые однозначно определяют искомые матрицы динамического регулятора (13):

$$\begin{gathered}K=(I_m+K_0D_{22})^{-1}K_0,\ \ U=(I_m+K_0D_{22})^{-1}U_0,\\ V=V_0(I_l+D_{22}K_0)^{-1},\ \ Z=Z_0-V_0D_{22}(I_m+K_0D_{22})^{-1}U_0.\end{gathered} \tag{31}$$

Воспользуемся утверждением леммы 4 для системы (30) и, учитывая лемму Шура, перепишем критерий достижения оценки $J_0<\gamma$ в виде

$$\begin{bmatrix}\hat{M}^{\mathrm{T}}\hat{X}+\hat{X}\hat{M} & \hat{X}\hat{N} & \hat{F}^{\mathrm{T}}\\ \hat{N}^{\mathrm{T}}\hat{X} & -\gamma^2P & \hat{G}^{\mathrm{T}}\\ \hat{F} & \hat{G} & -Q^{-1}\end{bmatrix}<0,\ \ \hat{X}=\begin{bmatrix}X & X_1^{\mathrm{T}}\\ X_1 & X_2\end{bmatrix}>0. \tag{32}$$

При этом матрица $\hat{M}$ должна быть гурвицевой. Поскольку критерий качества $\hat{J}$ типа (6) для системы (30) с начальным вектором $\hat{x}_0=[x_0^{\mathrm{T}},0]^{\mathrm{T}}$ совпадает с J, где X_0 — первый диагональный блок матрицы $\hat{X}_0$, то существование решения системы неравенств (32) при ограничении (8) эквивалентно неравенству $J<\gamma$ и в случае $\gamma=1$ обеспечивает свойства неэкспансивности системы (30) относительно критерия качества J.

Учитывая блочную структуру матриц в (30), перепишем первое соотношение (32) в виде ЛМН относительно $\hat{K}_0$:

$$\hat{L}^{\mathrm{T}}\hat{K}_0\hat{R}+\hat{R}^{\mathrm{T}}\hat{K}_0^{\mathrm{T}}\hat{L}+\hat{\Omega}<0, \tag{33}$$

где $\hat{R}=[\hat{R}_1,0_{l+r\times k}]$, $\hat{R}_1=[\hat{C}_2,\hat{D}_{21}]$, $\hat{L}=[\hat{L}_1,0_{m+r\times s}]\widetilde{X}$, $\hat{L}_1=[\hat{B}_2^{\mathrm{T}},\hat{D}_{12}^{\mathrm{T}}]$,

$$\widetilde{X}=\begin{bmatrix}\hat{X} & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_k\\ 0 & I_s & 0\end{bmatrix},\ \ \hat{\Omega}=\begin{bmatrix}\hat{A}^{\mathrm{T}}\hat{X}+\hat{X}\hat{A} & \hat{X}\hat{B}_1 & \hat{C}_1^{\mathrm{T}}\\ \hat{B}_1^{\mathrm{T}}\hat{X} & -\gamma^2P & D_{11}^{\mathrm{T}}\\ \hat{C}_1 & D_{11} & -Q^{-1}\end{bmatrix}.$$

Если данное неравенство совместно, то всегда существует его решение $\hat{K}_0$, удовлетворяющее условию (29).

Поскольку

$$W_{\hat{R}}=\begin{bmatrix}W_{\hat{R}_1} & 0\\ 0 & I_k\end{bmatrix},\ W_{\hat{L}}=\widetilde{X}^{-1}\begin{bmatrix}W_{\hat{L}_1} & 0\\ 0 & I_s\end{bmatrix},$$

то существование решения $\hat{K}_0$ матричного неравенства (33) эквивалентно соотношениям (см. лемму 2)

$$W_{\hat{R}_1}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\hat{A}^{\mathrm{T}}\hat{X}+\hat{X}\hat{A}+\hat{C}_1^{\mathrm{T}}Q\hat{C}_1 & \hat{X}\hat{B}_1+\hat{C}_1^{\mathrm{T}}QD_{11}\\ \hat{B}_1^{\mathrm{T}}\hat{X}+D_{11}^{\mathrm{T}}Q\hat{C}_1 & D_{11}^{\mathrm{T}}QD_{11}-\gamma^2P\end{bmatrix}W_{\hat{R}_1}<0,$$

$$W_{\hat{L}_1}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \hat{A}\hat{Y} + \hat{Y}\hat{A}^{\mathrm{T}} + \hat{B}_1 P^{-1} \hat{B}_1^{\mathrm{T}} & \hat{Y}\hat{C}_1^{\mathrm{T}} + \hat{B}_1 P^{-1} D_{11}^{\mathrm{T}} \\ \hat{C}_1 \hat{Y} + D_{11} P^{-1} \hat{B}_1^{\mathrm{T}} & D_{11} P^{-1} D_{11}^{\mathrm{T}} - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_{\hat{L}_1} < 0,$$

где $\hat{Y} = \gamma^2 \hat{X}^{-1}$. Далее, используя блочные выражения

$$W_{\hat{R}_1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r \\ 0 & I_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_R \\ 0_{r \times n+s-\operatorname{rank} R} \end{bmatrix}, \ W_{\hat{L}_1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r \\ 0 & I_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_L \\ 0_{r \times n+k-\operatorname{rank} L} \end{bmatrix},$$

где $R = [C_2, D_{21}]$ и $L = [B_2^{\mathrm{T}}, D_{12}^{\mathrm{T}}]$, полученные соотношения примут вид (25) и (26), где X и Y — первые диагональные блоки матриц (1). В итоге с учетом леммы 4 имеем следующее утверждение.

Теорема 3. Для системы (20) существует динамический регулятор (13), обеспечивающий оценку $J_0 < \gamma$ $(J < \gamma)$, в том и только том случае, когда система соотношений (2), (25) и (26) ((2), (8), (25) и (26)) разрешима относительно $X = X^{\mathrm{T}} > 0$ и $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0$. При этом замкнутая система (30) с неопределенностью (10) робастно устойчива и имеет общую функцию Ляпунова $v(\hat{x}) = \hat{x}^{\mathrm{T}} \hat{X} \hat{x}$, где $\hat{X}$ — решение ЛМН (32).

Приведем алгоритм построения динамического регулятора, удовлетворяющего утверждениям теоремы 3:

1) вычисление матриц W_R и W_L, где $R = [C_2, D_{21}]$, $L = [B_2^{\mathrm{T}}, D_{12}^{\mathrm{T}}]$;

2) определение матриц $X = X^{\mathrm{T}} > 0$ и $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0$, удовлетворяющих соотношениям (2), (25) и (26);

3) построение разложения $Z = Y - \gamma^2 X^{-1} = S^{\mathrm{T}} S$, где $S \in \mathrm{R}^{r \times n}$, $\ker S = \ker Z$ и формирование блочной матрицы $\hat{X} = \begin{bmatrix} X & \gamma^{-1} X S^{\mathrm{T}} \\ \gamma^{-1} S X & \gamma^{-2} S X S^{\mathrm{T}} + I_r \end{bmatrix}$;

4) решение ЛМН (33) относительно $\hat{K}_0$ при ограничении (29);

5) вычисление матриц регулятора (13) по формулам (31).

Дополнительное ограничение (8) в п. 2) данного алгоритма обеспечивает оценку $J < \gamma$. При определении матриц $X = X^{\mathrm{T}} > 0$ и $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0$ в случае динамического регулятора полного порядка $r = n$ автоматически выполняется ранговое ограничение в (2) и необходимо решить лишь систему ЛМН. Остальные блоки матриц (1) могут быть определены с помощью соотношений (4).

Можно сформулировать аналоги теорем 2, 3 и соответствующие алгоритмы робастной стабилизации системы (20), в которых учитываются неопределенности матричных коэффициентов

$$A \in \mathrm{Co}\{A^1, ..., A^a\}, \ B_1 \in \mathrm{Co}\{B_1^1, ..., B_1^b\}, \ C_1 \in \mathrm{Co}\{C_1^1, ..., C_1^c\}, \ D_{11} \in \mathrm{Co}\{D_{11}^1, ..., D_{11}^d\}.$$

Кроме того, утверждения достаточности данных теорем можно обобщить на класс нелинейных систем вида (20) с непрерывными матричными коэффициентами $A(x)$, $B_1(x)$, $C_1(x)$ и $D_{11}(x)$ (см. замечание 2).

4. Численный пример

Рассмотрим уравнение движения линейного осциллятора с демпфированием

$$\ddot{\varphi} + \delta\dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = u + w, \tag{34}$$

где ω_0 — собственная частота колебаний осциллятора, δ — коэффициент демпфирования, u — управление, w — ограниченное внешнее возмущение. Представим данное уравнение в виде системы (20), где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\delta \end{bmatrix},\ B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ C_2 = [1, 0],$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ D_{21} = D_{22} = 0\ ,\ x = \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}.$$

При этом $z = [\varphi, u]^{\mathrm{T}}$ — управляемый, а $y = \varphi$ — наблюдаемый выходы данной системы.

Для системы без управления $(u = 0)$ согласно (9) найдены соответствующие характеристики $J_0 = 1{,}001$ и $J = 1{,}289$ при таких значениях параметров:

$$\delta = 0{,}1,\ \ \omega_0 = 1,\ \ P = 1,\ \ Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix},\ X_0 = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix},$$

где $q_1 = 0{,}01$, $q_2 = 0{,}1$, $\rho_1 = \rho_2 = 0{,}04$. Изучена зависимость данных характеристик от δ и ω_0, а также диагональных элементов весовых матриц Q и X_0. Взвешенный уровень гашения внешних и начальных возмущений осциллятора уменьшается при увеличении его собственной частоты колебаний и почти не изменяется при увеличении коэффициента демпфирования.

Полагая $\gamma = 0{,}98$, с помощью вышеприведенного алгоритма построен динамический регулятор (13) полного порядка с матрицами

$$Z = \begin{bmatrix} -0{,}14289 & 0{,}68154 \\ -0{,}49336 & -0{,}58949 \end{bmatrix},\ V = \begin{bmatrix} 0{,}00869 \\ 0{,}07862 \end{bmatrix},\ U = [-\,0{,}64146\ \ 2{,}26665]\ ,$$

$$K = -0{,}14781\ ,$$

обеспечивающий оценку $J_0 \le \gamma < 1$, свойство неэкспансивности и робастную устойчивость системы (30), при этом спектр $\sigma(\hat{M}) = \{-\,0{,}14398; -0{,}14398; -0{,}27221; -0{,}27221\}$. Его применение существенно понижает характеристики J_0 и J (см. сравнение значений $J_0(q_1, q_2)$ и $J(\rho_1, \rho_2)$ для систем без управления (рис. 1, 3) и замкнутой системы (рис. 2, 4)). В частности, при выбранных значениях параметров $J_0 = 0{,}4272$ и $J = 0{,}8838 < 1$. Осциллятор с построенным регулятором сохраняет асимптотическую устойчивость при любой функции возмущений (неопределенности)

$$w(t) = \frac{1}{\gamma}(\theta_1\varphi + \theta_2 u),\ \ \frac{\theta_1^2}{q_1} + \frac{\theta_2^2}{q_2} \le 1,\ \ |w| \le \frac{1}{\gamma}\sqrt{q_1\varphi^2 + q_2 u^2}\,. \tag{35}$$

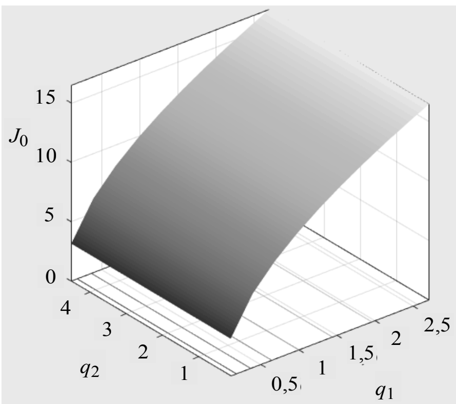

Рис. 1

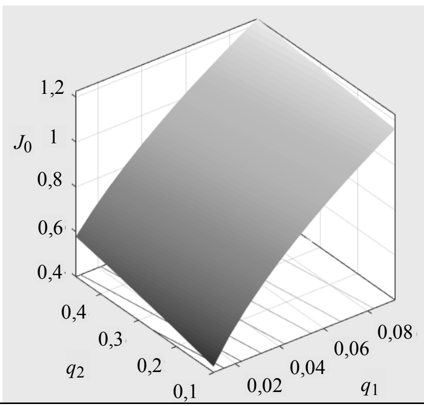

Рис. 2

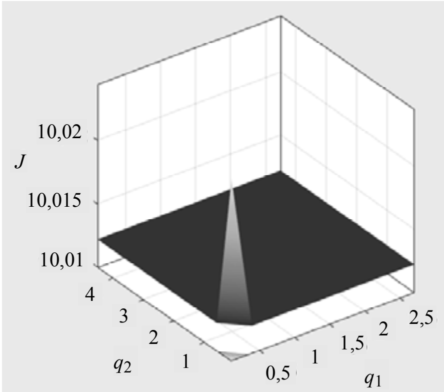

Рис. 3

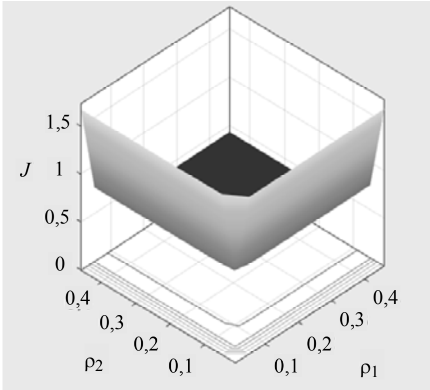

Рис. 4

На рис. 5 показано поведение решений системы (20) без управления с начальным вектором $x_0 = [1, -2]^{\mathrm{T}}$, а на рис. 6 — поведение решений замкнутой системы (30) с регулятором (13) и начальным вектором $\hat{x}_0 = [1, -2, 0, 0]^{\mathrm{T}}$. При этом функция возмущений w задана в виде (35) при $\theta_1 = \sqrt{q_1 / 2}$ и $\theta_2 = \sqrt{q_2 / 2}$.

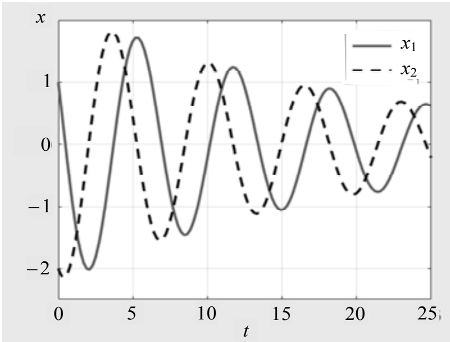

Рис. 5

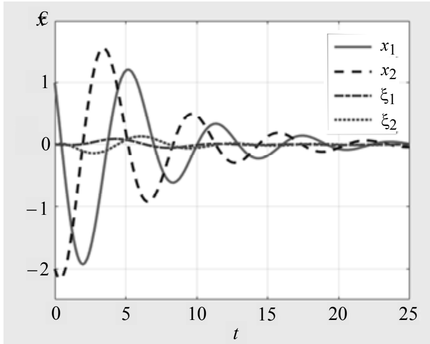

Рис. 6

Заключение

В настоящей работе для класса линейных систем с управляемыми и наблюдаемыми выходами разработаны методы построения статических и динамических регуляторов, обеспечивающих оценку взвешенного уровня подавления внешних и начальных возмущений, а также робастную устойчивость нулевого состояния относительно некоторого множества неопределенностей. Данные методы имеют большие возможности для обобщений, в частности, при определенных ограничениях они могут применяться к некоторым классам нелинейных систем, а также систем управления с дискретным временем.

Численная реализация предложенных законов управления в виде статических регуляторов по состоянию или динамических регуляторов полного порядка по наблюдаемому выходу сводится к решению систем линейных алгебраических матричных неравенств. Для этого могут использоваться, например, эффективные вычислительные средства LMI Toolbox системы MATLAB.

О.Г. Мазко, С.М. Кусій

РОБАСТНА СТАБІЛІЗАЦІЯ ТА ОЦІНКА ЗВАЖЕНОГО ГАСІННЯ ЗБУРЕНЬ У СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ

Сформульовано умови стабілізовності за виходом деякого класу нелінійних систем керування. Для систем з керованими і спостережуваними виходами запропоновано методи побудови статичних і динамічних регуляторів, які забезпечують задану оцінку зваженого рівня гасіння зовнішніх та початкових збурень. Реалізація даних методів з використанням статичних регуляторів за станом або динамічних регуляторів повного порядку базується на розв'язанні систем лінійних матричних нерівностей. Наведено приклад синтезу регулятора для лінійного осцилятора з демпфуванням.

A.G. Mazko, S.N. Kusii

ROBUST STABILIZATION AND EVALUATION OF THE WEIGHTED SUPPRESSION OF DISTURBANCES IN CONTROL SYSTEMS

Output feedback stabilizability conditions for certain class of nonlinear control systems are stated. Methods for constructing static and dynamic controllers that provide specified evaluation of the weighted damping level of external and initial perturbations are proposed for systems with controllable and observable outputs. The implementation of these methods with the use of a static state feedback or a full-order dynamic controllers based on the solution of linear matrix inequalities systems. An example of control system for a linear damped oscillator is given.

1. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 5. — С. 7–46.
2. *Алиев Ф.А., Ларин В.Б.* Задачи стабилизации системы с обратной связью по выходной переменной (обзор) // Прикладная механика. — 2011. — **47**, № 3. — С. 3–49.
3. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
4. *Кунцевич В.М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — Киев : Наук. думка, 2006. — 264 с.
5. *Губарев В.Ф., Гуммель, А.В., Жуков А.О.* Особенности и взаимосвязь задач идентификации и управления в условиях неопределенности // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2010. — № 1. — С. 50–62.
6. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — М. : Физматлит, 2007. — 280 с.
7. *Мазко А.Г.* Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств // Праці Інституту математики НАН України. — 2016. — **102**. — 332 с.
8. *Zhou K., Doyle J.C., Glover K.* Robust and optimal control. — Englewood : Prentice Hall, 1996. — 596 p.
9. *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.J, Chilali M.* The LMI control toolbox. for use with matlab. user's guide. — Natick, MA : The MathWorks, Inc., 1995. — 138 p.
10. *Мазко А.Г., Кусий С.Н.* Стабилизация по измеряемому выходу и оценка уровня гашения возмущений в системах управления // Нелінійні коливання. — 2015. — **18**, № 3. — С. 373–387.
11. *Мазко О.Г., Кусій С.М.* Задачі стабілізації і гасіння зовнішніх збурень в системах керування // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики. — 2015. — **12**, № 5. — С. 90–108.
12. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М. : Наука, 1988. — 552 с.
13. *Gahinet P., Apkarian P.* A linear matrix inequality approach to H_∞ control // Intern. J. of Robust and Nonlinear Control. — 1994. — **4**. — P. 421–448.
14. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Применение линейных матричных неравенств в синтезе законов управления. — Нижний Новгород : ННГУ, 2010. — 93 с.
15. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Обобщенное H_∞-оптимальное управление как компромисс между H_∞-оптимальным и γ-оптимальным управлениями // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 6. — С. 20–38.
16. *Мазко А.Г.* Робастная устойчивость и оценка функционала качества нелинейных систем управления // Там же. — 2015. — № 2. — С. 73–88.

Получено 07.07.2016