

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ ИЗБЫТОЧНОЙ СИСТЕМОЙ МАХОВИКОВ

Введение

Рассматривается задача оптимальной стабилизации избыточной системой маховиков малогабаритного космического аппарата (КА) дистанционного зондирования Земли семейства Січ (Sich) [1]. Предлагается использование метода кососимметризации [2] матричного уравнения Ляпунова и критерия обобщенной работы А.А. Красовского [3] в совокупности с методами жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации [4].

Подобные КА — искусственные спутники Земли (ИСЗ), используются в рамках серии национальных космических программ Украины по развертыванию постоянно действующей орбитальной группировки космических аппаратов дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) с разным составом измерительных и зондирующих приборов.

1. Кинематическая задача стабилизация ИСЗ

Традиционно задачу стабилизации КА решают путем декомпозиции на кинематическую и динамическую задачи ориентации [5, 6].

Рассматривая сначала кинематическую задачу ориентации, используем три координатные базисы (три правые тройки взаимно ортогональных осей):

- ζ — традиционный инерциальный базис с началом в центре Земли и тремя осями: $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, причем для определенности орт ζ_3 направлен по оси суточного вращения Земли;
- ξ — базис, связанный с ИСЗ: его начало находится в центре масс ИСЗ, а оси ξ_1, ξ_2, ξ_3 совпадают с центральными осями инерции спутника;
- η — орбитальный базис с началом в центре масс ИСЗ и осями η_1, η_2, η_3 , причем орт η_1 направлен в плоскости орбиты в сторону движения КА; орт η_2 перпендикулярен плоскости орбиты и с его конца движение КА по орбите представляется происходящим против часовой стрелки; орт η_3 направлен по геоцентрической вертикали в Зенит.

Переход от инерциального базиса к орбитальному определим кватернионом \mathbf{L} , от орбитального к связанному — кватернионом $\mathbf{\Lambda}$, а прямой переход от инерциального базиса к связанному — кватернионом $\mathbf{\Pi}$.

Под кватернионом обычно понимается число, представленное в некотором четырехмерном пространстве \mathcal{K} с одной действительной единицей 1 , тремя мнимыми единицами $\mathbf{i}_s, s = \overline{1, 3}$, и с действительными элементами $\lambda_k, k = \overline{0, 3}$, которое имеет вид [7, 8]

$$\mathbf{\Lambda} = \lambda_0 1 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3. \quad (1)$$

Представим кватернион $\mathbf{\Pi}$ как произведение кватернионов [9] $\mathbf{\Pi} = \mathbf{L} \circ \mathbf{\Lambda}$.

Если продифференцировать его по времени и учесть кинематические кватернионные уравнения [9, 10] вида $\dot{\mathbf{L}} = 1/2 \mathbf{L} \circ \mathbf{\Omega}_\eta$ (здесь и далее точкой обозначается

операция дифференцирования по t), то после необходимых преобразований получим следующее кинематическое уравнение движения ИСЗ относительно орбитальной системы координат:

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}(\Lambda \circ \Omega_z - \Omega_\eta \circ \Lambda), \quad \Lambda(t_0) = \Lambda_0. \quad (2)$$

Здесь Ω_η — кватернионное отображение вектора орбитальной скорости ω_{orb} ИСЗ в проекциях на оси орбитальной системы η , Ω_ξ — кватернионное отображения вектора абсолютной угловой скорости ИСЗ ω_ξ в проекциях на оси связанной системы координат ξ (далее ω_ξ будем обозначать как ω), \circ — знак кватернионного умножения.

Следует отметить, что кватернионное отображение любого вектора, в частности ω , — это вырожденный кватернион с нулевой скалярной частью и векторной частью, компонентами которой являются составляющие этого вектора в обусловленной системе координат, так что $\Omega_\eta = \omega_{\eta_1} \mathbf{i}_1 + \omega_{\eta_2} \mathbf{i}_2 + \omega_{\eta_3} \mathbf{i}_3$, $\Omega_\xi = \omega_1 \mathbf{i}_1 + \omega_2 \mathbf{i}_2 + \omega_3 \mathbf{i}_3$, но записанные в кватернионном базисе.

Поскольку произведение любых двух кватернионов $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ можно представить их кватернионными матрицами M, N и матрицами-столбцами a, b в виде [11–13]

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} \Leftrightarrow M(a)b = N(b)a, \quad (3)$$

то уравнение (2) в матричной форме переписывается следующим образом:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2}[N(\omega) - M(\omega_\eta)]\lambda, \quad \lambda(t_0) = \lambda^0. \quad (4)$$

Здесь также учтено известное свойство кососимметричных матриц $M^T(\omega) = -M(\omega)$ (T — знак транспонирования) и обозначено

$$M(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & U(\omega) \end{bmatrix}, \quad N(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & U^T(\omega) \end{bmatrix}, \quad U(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Зададим такую ориентацию ИСЗ, которая соответствует условию $\omega = \omega_s$, накладываемому на его угловую скорость. Тогда заданное программное движение ИСЗ будет определяться согласно (4) следующим уравнением (программные значения параметров движения КА будем обозначать нижним индексом s):

$$\dot{\lambda}_s = \frac{1}{2}[N(\omega_s) - M(\omega_\eta)]\lambda_s, \quad \lambda_s(t_0) = \lambda_s^0. \quad (6)$$

В кинематической задаче ориентации КА его угловую скорость можно интерпретировать как управление. Собственно, именно она является управляющим параметром ИСЗ и решение кинематической задачи позволяет синтезировать алгоритм ее изменения. Реализация же подобного алгоритма осуществляется в динамической задаче ориентации с учетом как динамики объекта, так и динамики исполнительных органов управления (в рассматриваемом случае — маховиков).

Перепишем уравнения (4), (6) так, чтобы они соответствовали системам с управляющими органами:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2}M^T(\omega_\eta)\lambda + \frac{1}{2}M(\lambda)\omega^0, \quad \lambda(t_0) = \lambda^0, \quad (7)$$

$$\dot{\lambda}_s = \frac{1}{2}M^T(\omega_\eta)\lambda_s + \frac{1}{2}M(\lambda_s)\omega_s^0, \quad \lambda_s(t_0) = \lambda_s^0. \quad (8)$$

Пусть в общем случае

$$\lambda = \lambda_s + x, \quad \omega^0 = \omega_s^0 + u, \quad (9)$$

где x — возмущения (отклонения от) заданной ориентации, u — управление угловой скоростью ИСЗ; ω^0, ω_s^0 — векторы четвертого порядка, аналогичные векторам ω, ω_s , но с дополнительным первым нулевым элементом.

Подставив равенства (9) в уравнение (7), после несложных преобразований с учетом (8) получим уравнение движения ИСЗ в отклонениях

$$\dot{x} = \frac{1}{2}[N(\omega_s) - M(\omega_\eta)]x + \frac{1}{2}M(\lambda)u, \quad x(t_0) = x_0. \quad (10)$$

Основная задача ориентации — синтезировать такое ограниченное управление

$$u = -C_\lambda x \in \mathbf{U}, \quad C_\lambda \in \mathbf{R}_{4 \times 4}, \quad (11)$$

из выпуклого множества \mathbf{U} , которое обеспечит $x \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \omega_s$.

Принимая во внимание (11), перепишем уравнение (10) в удобном для дальнейшего синтеза системы стабилизации виде

$$\dot{x} = \frac{1}{2}[N(\omega_s) - M(\omega_\eta) - M(\lambda)C_\lambda]x, \quad x(t_0) = x_0. \quad (12)$$

Будем решать задачу стабилизации ИСЗ, используя второй метод Ляпунова, когда синтез систем стабилизации приводит к рассмотрению матричного уравнения Ляпунова

$$\widehat{D}[N(\omega_s) - M(\omega_\eta) - M(\lambda)C_\lambda] + [N(\omega_s) - M(\omega_\eta) - M(\lambda)C_\lambda]^T \widehat{D} = -2\widehat{D}\widehat{Q}\widehat{D}, \quad (13)$$

в котором $\widehat{D} = \widehat{D}_* \widehat{D}_*^T = \text{const}$, $\widehat{Q}(x, t) = \widehat{Q}_* \widehat{Q}_*^T$ — жестко структурированные неособыми псевдотреугольными матрицами $\widehat{D}_*, \widehat{Q}_*$ матрицы коэффициентов положительно-определенных квадратичных форм $\widehat{V}(x) = x^T \widehat{D}x > 0$, $\widehat{W}(x, t) = 2x^T \widehat{D}\widehat{Q}(x, t)\widehat{D}x > 0$, удовлетворяющих условию $\dot{\widehat{V}} = -\widehat{W} < 0$ на любых траекториях нелинейной системы (12).

Применим к уравнению Ляпунова (13) метод кососимметризации [10], для этого перепишем его в виде

$$\widehat{D}[N(\omega_s) - M(\omega_\eta) - M(\lambda)C_\lambda + \widehat{Q}\widehat{D}] + [N(\omega_s) - M(\omega_\eta) - M(\lambda)C_\lambda + \widehat{Q}\widehat{D}]^T \widehat{D} = 0$$

и удовлетворим произвольной кососимметричной матрицей $\widehat{D}\widehat{S}\widehat{D}$.

В результате получим равенство $\widehat{D}[N(\omega_s) - M(\omega_\eta) - M(\lambda)C_\lambda + \widehat{Q}\widehat{D}] = -\widehat{D}\widehat{S}\widehat{D}$, из которого нетрудно найти закон управления

$$C_\lambda = M^T(\lambda)[N(\omega_s) - M(\omega_\eta) + \widehat{Q} + \widehat{S}]. \quad (14)$$

В выражении (14) для упрощения принято $\widehat{D} = I_4$ — единичная матрица четвертого порядка, и учтено свойство кватернионных матриц $M(\lambda)$, соответствующих кватерниону (1): если $\lambda_k, k = \overline{0, 3}$, — параметры Родрига–Гамильтона, то

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

подобно матрице направляющих косинусов оказывается ортогональной, так что

$$M^{-1}(\lambda) = M^T(\lambda). \quad (16)$$

При этом следует учесть, что параметры Родрига–Гамильтона удовлетворяют условию нормировки $\lambda^T \lambda = 1$, $\dot{\lambda}^T \lambda = 0$.

Анализируя выражения (9) и (11), будем иметь

$$\omega^0 - \omega_s^0 = u = -C_\lambda x = -C_\lambda (\lambda - \lambda_s), \quad (17)$$

причем управление $u = -C_\lambda (\lambda - \lambda_s)$, следующее из (17), с матрицей усиления (14), удовлетворяя соответствующему кинематическому уравнению ИСЗ в отклонениях (12), гарантирует выполнение условия $x \rightarrow 0$ или согласно (9) $\lambda \rightarrow \lambda_s$.

Что касается программного значения ω_s абсолютной угловой скорости ИСЗ, то оно будет определяться выражением

$$\omega_s^0 = M^T(\lambda_s)[M(\omega_\eta)\lambda_s + 2\dot{\lambda}_s], \quad (18)$$

полученным из (8) при выполнении условия нормировки для λ_s и соотношения (16).

2. Динамическая задача стабилизация ИСЗ избыточной системой маховиков

Следует отметить, что для управления КА, решающих широкий спектр задач, часто используются системы ориентации с инерционными исполнительными органами — силовыми гироскопами: двухстепенными (гиродины [14, 15]) и одностепенными (маховики [16, 17]). Гиродины способны создавать большие управляющие моменты и выполнять быструю переориентацию КА. Маховики обычно используются для обеспечения прецизионной стабилизации КА. Трехстепенные гироскопы применяются в системах ориентации КА значительно реже.

Для повышения надежности работы системы ориентации ИСЗ в качестве его управляющей системы используются, как правило, ее избыточные варианты (при выходе из строя, в частности маховика, его ремонт на орбите невозможен — приходится заменять его из резервной группы). Здесь рассматривается схема минимально избыточной структуры управляющей системы, состоящей из четырех маховиков [6, 18].

Математическая модель ИСЗ как твердого тела с диагональным тензором инерции J и с четырьмя маховиками имеет вид

$$J\dot{\omega} + U(\omega)J\omega + \dot{q} + U(\omega)q = M_\xi^P, \quad \omega(t_0) = \omega_0, \quad q(t_0) = q_0. \quad (19)$$

в следующих обозначениях:

- $J = \text{diag}[J_1 J_2 J_3]$ — диагональный тензор инерции ИСЗ, в котором J_k , $k = \overline{1, 3}$, — главные центральные моменты инерции КА относительно осей связанного с ним координатного базиса ξ ;
- ω — по-прежнему, вектор абсолютной угловой скорости ИСЗ в проекциях на оси ξ ;
- $U(\omega)$ — кососимметрическая матрица из (5);
- q — вектор кинетического момента системы маховиков в проекциях на оси ξ (по аналогии с ω здесь и далее вместо q_ξ будем употреблять обозначение q);
- M_ξ^P — возмущающий момент в проекциях на оси ξ , составляющими которого являются момент сил светового давления Солнца и моменты влияния Земли — магнитный, гравитационный, аэродинамический (формулы для их вычисления можно найти в [14, 15, 18]).

Для пояснения величины q свяжем с ротором i -го маховика (его электродвигателя) оси Резаля ${}^i\tau$ так, что его собственное вращение будет осуществляться вокруг оси ${}^i\tau_3$. Тогда собственный кинетический момент i -го маховика будет определяться выражением

$${}^i q_\tau = [0 \ 0 \ {}^i q_{\tau_3}]^T, \quad {}^i q_{\tau_3} = {}^i q_3 = J_* \dot{\phi}_i, \quad i = \overline{1, 4}, \quad (20)$$

где $\dot{\phi}_i$ — угловая скорость i -го маховика, J_* — момент инерции маховика относительно оси ${}^i\tau_3$ его собственного вращения (все четыре маховика идентичны). При этом вектор кинетического момента системы четырех маховиков определится с учетом (20) следующим образом:

$$q_\tau = [{}^1 q_3, {}^2 q_3, {}^3 q_3, {}^4 q_3]^T. \quad (21)$$

Поскольку ориентация маховиков относительно корпуса ИСЗ при любом его движении остается неизменной, то положение каждого маховика внутри спутника (ориентацию оси ${}^i\tau_3$ его собственного вращения в связанных осях ξ) можно задать постоянной ортогональной матрицей ${}^i E(\alpha_i, \beta_i)$, зависящей от двух углов: α_i, β_i . В этом случае проекции собственного кинетического момента i -го маховика на оси ξ определятся в соответствии с (20) выражением

$${}^i q_\xi = {}^i E(\alpha_i, \beta_i) {}^i q_\tau = {}^i e_3 {}^i q_3, \quad (22)$$

если через ${}^i e_3$ обозначить третий столбец матрицы ${}^i E(\alpha_i, \beta_i)$.

Найдем сумму проекций кинетических моментов всех четырех маховиков на оси $\xi_k, k = \overline{1, 3}$. Будем иметь с учетом (21), (22)

$$q = \sum_{i=1}^4 {}^i e_3 {}^i q_3 = \Upsilon q_\tau. \quad (23)$$

Здесь

$$\Upsilon = [{}^1 e_3, {}^2 e_3, {}^3 e_3, {}^4 e_3] = \text{const} \in \mathbb{R}_{3 \times 4} \quad (24)$$

— матрица, составленная из третьих столбцов матриц ${}^i E(\alpha_i, \beta_i), i = \overline{1, 4}$. Поскольку предполагается пространственное расположение четырех маховиков, установленных на ИСЗ по стандартной схеме General Electric [19], то структура матрицы Υ в (24) будет иметь специфический вид, проиллюстрированный табл. 5.1 в работе [18].

В результате уравнение (19) может быть представлено в форме Коши

$$\dot{\omega} = J^{-1} U^T(\omega) J \omega + J^{-1} M_u + J^{-1} M_\xi^p, \quad \omega(t_0) = \omega_0, \quad (25)$$

если в нем формально принять [14]

$$M_u = -\dot{q} + U^T(\omega) q, \quad (26)$$

где M_u — вектор момента управления ИСЗ с использованием маховиков (тем самым учет влияния маховиков на динамику ИСЗ заменяется соответствующей реакцией связи M_u).

Рассмотрим для системы (25) задачу стабилизации угловой скорости ИСЗ. Для этого необходимо синтезировать в ней управление, которое обеспечивало бы стремление угловой скорости ω к ее некоторому программному значению ω^* . В качестве ω^* удобно выбрать программную величину угловой скорости ω_s из (8) в виде (18) и задать структуру управления следующим образом:

$$M_u = -C_\omega(\omega - \omega_s). \quad (27)$$

При $\omega = \omega_s$ в уравнении (25) управление (27) обратится в нуль, следовательно, будем иметь

$$\dot{\omega}_s = J^{-1}U^T(\omega_s)J\omega_s + J^{-1}M_{\xi}^P, \quad \omega_s(t_0) = \omega_{s0}. \quad (28)$$

Если в динамической задаче стабилизации обозначить

$$\omega - \omega_s = y, \quad (29)$$

затем подставить в уравнение (25) вместо вектора ω его выражение $\omega = \omega_s + y$ из (29), то, учитывая (27), (28), в результате получим следующее уравнение движения ИСЗ в отклонениях y :

$$\dot{y} = J^{-1}[U^T(\omega)J - C_{\omega}]y + J^{-1}U^T(y)J\omega_s, \quad y(t_0) = y_0. \quad (30)$$

Используем в нем известное свойство матрицы U из (5): для любых двух векторов x, y третьего порядка легко проверяется тождество

$$U(x)y \equiv U^T(y)x, \quad (31)$$

следующее из свойств векторного произведения $x \times y = -y \times x$, в котором матрица U выступает оператором векторного умножения.

Учитывая (31), можно переписать уравнение (30) в виде

$$\dot{y} = J^{-1}[U^T(\omega)J + U(J\omega_s) - C_{\omega}]y, \quad y(t_0) = y_0. \quad (32)$$

Далее применим второй метод Ляпунова и выберем две положительно-определенные квадратичные формы: $V(y) = y^T D y > 0$, $W(y, t) = 2y^T D Q(y, t) D y > 0$, удовлетворяющие условию $\dot{V} = -W < 0$ на любых траекториях нелинейной системы (32). В результате получим уравнение Ляпунова, аналогичное (13), в котором также принято $D = \text{const}$ и из которого нетрудно получить методом кососимметризации матрицу управления

$$C_{\omega} = U^T(\omega)J + U(J\omega_s) + J(Q + S)D. \quad (33)$$

При учете соотношений (27) и (33) уравнение (25) перепишем следующим образом:

$$\dot{\omega} = -(Q + S)D\omega + [J^{-1}U(J\omega_s) + (Q + S)D]\omega_s + J^{-1}M_{\xi}^P, \quad \omega(t_0) = \omega_0. \quad (34)$$

Анализируя выражение (34), легко убедиться, что при $\omega \rightarrow \omega_s$ оно совпадает с уравнением (28).

Таким образом, в рассматриваемом случае управление (27) по невязке угловой скорости в задаче динамической стабилизации спутника обеспечивает выполнение условия $\omega \rightarrow \omega_s$, тем самым согласно (17) гарантирует и выполнение условия $\lambda \rightarrow \lambda_s$ в задаче его кинематической стабилизации.

3. Оптимальное управление спутником

Проблема оптимизации управления ИСЗ возникает при его ограниченных энергетических ресурсах, когда реализация управления определенной мощности в задаче стабилизации спутника оказывается невозможной. Тогда приходится мириться с остаточными погрешностями его ориентации.

По критерию обобщенной работы А.А. Красовского [3]

$$I(y, u, u_{\text{opt}}) = \int_{t_0}^{\infty} (y^T Q(y, t) y + u^T R^{-1} u + y^T D J^{-1} R J^{-1} D y) dt \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (35)$$

где $R = \text{diag}[r_1^2 \ r_2^2 \ r_3^2] > 0$ — заданная положительно-определенная матрица весовых коэффициентов, дополнительно приложим к спутнику [4] оптимальное управление

$$u_{\text{opt}} = -P(\omega - \omega_s), \quad P = -R J^{-1} D. \quad (36)$$

В результате получим суммарное управление

$$M_u = -(C_\omega + P)(\omega - \omega_s) \quad (37)$$

с матрицей усиления

$$C_\omega + P = U^T (\omega) J + U(J\omega_s) + [J(Q + S) + R J^{-1}] D, \quad (38)$$

которое обеспечивает оптимальную стабилизацию спутника, не нарушая его устойчивости.

Принимая во внимание (25), представим уравнение замкнутой системы ИСЗ с суммарным управлением. По аналогии с (34) запишем

$$\begin{aligned} \dot{\omega} = & -(Q + S + J^{-1} R J^{-1}) D \omega + [J^{-1} U(J\omega_s) + \\ & + (Q + S + J^{-1} R J^{-1}) D] \omega_s + J^{-1} M_z^p, \quad \omega(t_0) = \omega_0. \end{aligned} \quad (39)$$

4. Динамические уравнения движения системы маховиков

Запишем уравнение относительного движения i -го маховика, расположенного на ИСЗ, в проекции на ось ${}^i \tau_3$ его собственного вращения. В обозначениях (20), (22) получим [14]

$${}^i \dot{q}_3 + J_* {}^i e_3^T \dot{\omega} = {}^i M_3^e + {}^i M_3^r, \quad \omega(t_0) = \omega_0, \quad {}^i q_3(t_0) = {}^i q_3^0, \quad (40)$$

где ${}^i M_3^e$ — момент, развиваемый электродвигателем маховика; ${}^i M_3^r = -f {}^i q_3 - k \text{sign} {}^i q_3$ — момент сопротивления на оси ${}^i \tau_3$ собственного вращения маховика с использованием коэффициентов f, k соответственно моментов вязкого и сухого (кулоновского) трения в его подшипниках; ${}^i e_3^T \dot{\omega}$ представляет собой проекцию производной (по времени) абсолютной угловой скорости ИСЗ на ось собственного вращения i -го маховика.

Если уравнение (40) записать для совокупности (21) четырех маховиков в проекциях их кинетических моментов на оси связанного трехгранника ξ , то, приняв во внимание выражения (23), (24), будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{q} + J_* \Upsilon \Upsilon^T \dot{\omega} = & \Upsilon (M_\tau^e + M_\tau^r), \quad \omega(t_0) = \omega_0, \quad q(t_0) = q_0, \\ M_\tau^e = & [{}^1 M_3^e \quad {}^2 M_3^e \quad {}^3 M_3^e \quad {}^4 M_3^e]^T, \quad M_\tau^r = [{}^1 M_3^r \quad {}^2 M_3^r \quad {}^3 M_3^r \quad {}^4 M_3^r]^T, \end{aligned} \quad (41)$$

а исключая в нем $\dot{\omega}$ с помощью соотношений (25), (27), получим искомое уравнение движения маховиков в осях, связанных с ИСЗ, с учетом моментов M_τ^e управления их электродвигателями

$$\dot{q} = \tilde{J} [U(\omega) J \omega + C_\omega (\omega - \omega_s) - M_\xi^p] + \Upsilon (M_\tau^e + M_\tau^r), \quad q(t_0) = q_0, \quad (42)$$

и с использованием обозначения $\tilde{J} = J_* \Upsilon \Upsilon^T J^{-1}$.

Еще одно уравнение, описывающее движение маховиков в режиме стабилизации ИСЗ, можно получить, воспользовавшись соотношениями (26), (27), в следующем виде:

$$\dot{q} = U^T(\omega)q + C_\omega(\omega - \omega_s), \quad q(t_0) = q_0. \quad (43)$$

Чтобы найти далее явные выражения моментов управления электродвигателями маховиков, достаточно в уравнении (42) исключить \dot{q} , воспользовавшись уравнением (43), и тогда эти моменты определяются формулой

$$\Upsilon(M_\tau^e + M_\tau^r) = U^T(\omega)q + \tilde{J}U^T(\omega)J\omega + \tilde{J}C_\omega(\omega - \omega_s) + \tilde{J}M_\xi^p, \quad (44)$$

где, помимо ранее принятых обозначений, используется $\tilde{J} = I_3 - \tilde{J}$ (здесь I_3 — единичная матрица третьего порядка).

Исключая же в уравнении (41) \dot{q} из (43) и затем вычитая из него уравнение (25) с учетом (27), в результате получим в окончательном виде закон движения ИСЗ, управляемого в режиме стабилизации избыточной системой маховиков:

$$\dot{\omega} = \tilde{J}^{-1}[U^T(\omega)(J\omega + q) + M_\xi^p - \Upsilon(M_\tau^e + M_\tau^r)], \quad \omega(t_0) = \omega_0. \quad (45)$$

Характерно, что уравнение (45) не зависит явно от структуры стабилизирующего регулятора (режим стабилизации спутника задается через моменты управления электродвигателями (44)) и с точностью до обозначений совпадает, что вполне естественно, с аналогичным уравнением в [17].

Уравнение (42), описывающее поведение маховиков в составе ИСЗ, а также моменты (44), определяющие работу их электродвигателей, наоборот, явно зависят от стабилизирующего регулятора и поэтому на разных режимах стабилизации выражаются несколько отличающимися формулами, в которых следует учитывать выражения (38) или (33) соответственно.

Чтобы завершить рассмотрение проблемы угловой стабилизации ИСЗ избыточной системой маховиков, представим математическую модель рассматриваемого КА уравнениями (7), (45), (42) и (44), причем в (7) величина ω^0 после несложного преобразования с учетом (9), (11) и (14) будет задаваться формулой

$$\omega^0 = \omega_s^0 - M^T(\lambda)[N(\omega_s) - M(\omega_\eta) + \hat{Q} + \hat{S}](\lambda - \lambda_s). \quad (46)$$

В случае оптимальной угловой стабилизации спутника в соотношениях (42), (44) матрицу C_ω из (33) следует заменить суммарной матрицей усиления $C_\omega + P$ согласно ее выражению (38).

5. Математическое моделирование движения спутника

При математическом моделировании поведения ИСЗ использовались параметры и условия работы спутника «Сич-2» [1] на круговой орбите, когда вектор угловой орбитальной скорости ω_η в уравнении (4) при выбранной ориентации орбитального трехгранника принимался в виде

$$\omega_\eta = [0 \quad -\omega_{\eta_2} \quad 0]^T, \quad \omega_{\eta_2} = \sqrt{\mu/r^3} = 1,069 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}, \quad (47)$$

причем $\mu = 398606 \text{ км}^3/\text{с}^2$ — гравитационная постоянная Земли, $r = R_E + h = 7,039 \cdot 10^3 \text{ км}$ — радиус орбиты ИСЗ, если $R_E = 6,371 \cdot 10^3 \text{ км}$ — радиус сферической Земли, $h = 668 \text{ км}$ — высота КА над земной поверхностью [20].

Уравнения (34) и (39) движения спутника моделировались методом Рунге–Кутты в среде MatLab соответственно со стабилизирующим и оптимальным управлениями при начальных условиях $\omega(0) = [0,1; 0,1; 0,1]$, заданных угловых скоростях

$$\omega_s = [-0,01 - 0,02 - 0,03] \quad (48)$$

и следующих значениях коэффициентов:

$$J_1 = 30, J_2 = 35, J_3 = 40; D = \text{diag}[d_{11}^2, d_{22}^2, d_{33}^2], Q = \text{diag}[d_{11}^2 q_{11}^2, d_{22}^2 q_{22}^2, d_{33}^2 q_{33}^2],$$

причем

$$d_{11} = 0,5, d_{22} = 0,7, d_{33} = 0,9; q_{11} = 5, q_{22} = 7, q_{33} = 9; r_1 = 1,5, r_2 = 3,7, r_3 = 7,8.$$

Результаты моделирования компонент $\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)$ абсолютной угловой скорости ИСЗ представлены соответственно на рис. 1–3, причем на каждом из них поведение соответствующей компоненты в случае стабилизирующего неоптимального управления обозначено штрих-пунктиром, а в случае стабилизирующего оптимального управления — сплошной линией. Начальные условия $\omega_1(0) = \omega_2(0) = \omega_3(0) = 0,1$ принимались одинаковыми при заданных значениях $\omega_{si}, i = \overline{1, 3}$, из (48); моделирование компонент $\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)$ осуществлялось на различных временных интервалах: $\omega_1(t)$ — на интервале времени $t \in [0; 10]$, $\omega_2(t), \omega_3(t)$ — для $t \in [0; 1]$.

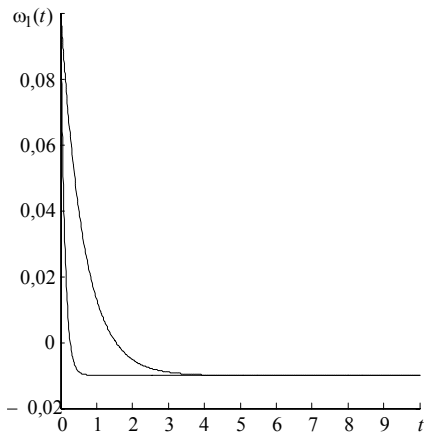


Рис. 1

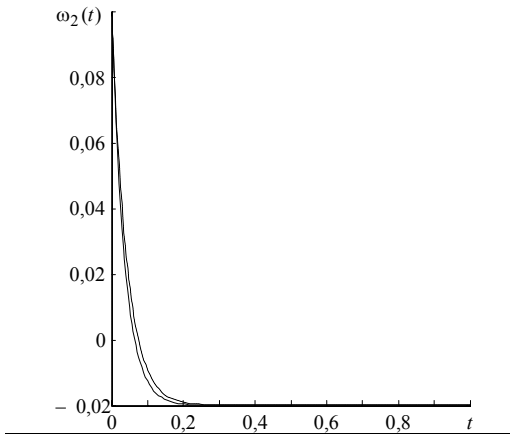


Рис. 2

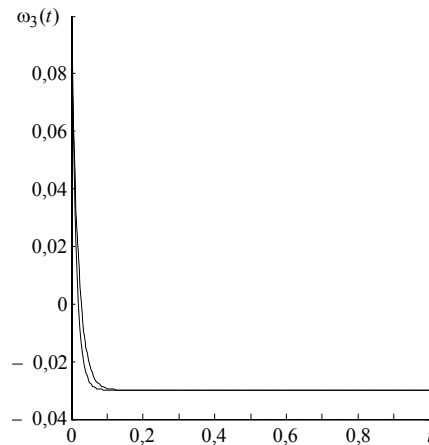


Рис. 3

Из рисунков следует, что полученное оптимальное управление ИСЗ обеспечивает стабилизацию системы значительно быстрее неоптимального.

Так, при оптимальной стабилизации отклонение угловой скорости ω_1 достигает заданного значения из (48) уже на 1-й секунде (см. рис. 1), отклонение угловой скорости ω_2 достигает значения $-0,02$ на $0,26$ с (см. рис. 2), отклонение угловой скорости ω_3 достигает заданного значения $-0,03$ из (48) на $0,09$ с (см. рис. 3).

При неоптимальном стабилизирующем управлении отклонения угловых скоростей $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ достигают тех же заданных значений (48) соответственно на $4,6$ с (см. рис. 1); $0,36$ с (см. рис. 2); $0,16$ с (см. рис. 3). Следовательно, оптимальное управление повышает качество стабилизации ИСЗ в среднем на 30% .

Заключение

В результате рассмотрения задачи оптимальной стабилизации избыточной системой маховиков малогабаритного КА дистанционного зондирования Земли было построено методом кососимметризации матричного уравнения Ляпунова стабилизирующее управление, оптимальное по критерию обобщенной работы А.А. Красовского в совокупности с методами жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации.

Показано с использованием математического моделирования в среде MatLab, что полученное оптимальное управление ИСЗ повышает качество его стабилизации в среднем на 30% .

С.М. Онищенко

ОПТИМАЛЬНА СТАБІЛІЗАЦІЯ ШТУЧНОГО СУПУТНИКА ЗЕМЛІ НАДЛИШКОВОЮ СИСТЕМОЮ МАХОВИКІВ

Розглянуто задачу оптимальної стабілізації надлишковою системою маховиків малогабаритного космічного апарата дистанційного зондування Землі сімейства Січ. Показано, що отримане оптимальне управління супутником підвищує якість його стабілізації в середньому на 30% .

S.M. Onishchenko

OPTIMAL STABILIZATION OF THE EARTH ARTIFICIAL SATELLITE WITH REDUNDANT FLY-WHEELS

The problem of the Earth remote probe compact spacecraft of the family Sich optimal stabilization with redundant fly-wheels is considered. It is shown that the resulting optimal control of satellite has in the average 30% improvement in the quality of its stabilization

1. https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D1%87-2#.D0.91.D0.BE.D1.80.D1.82.D0.BE.D0.B2.D0.B0.D1.8F_.D0.B0.D0.BF.D0.BF.D0.B0.D1.80.D0.B0.D1.82.D1.83.D1.80.D0.B0
2. *Онищенко С.М.* Модальный подход к синтезу нелинейных систем стабилизации // Проблемы управления и информатики. — 1996. — № 6. — С. 5–19.

3. *Красовский А.А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. — М. : Наука, 1973. — 560 с.
4. *Онищенко С.М.* Жесткая оптимальная стабилизация нелинейных динамических систем // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2014. — № 4. — С. 32–46.
5. *Левский М.В.* К проблеме восстановления программного движения космического аппарата при осуществлении пространственного разворота по результатам телеизмерений // Вестн. Москов. гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. — 2001. — № 3. — С. 53–70.
6. *Волосов В.В., Хлебников М.В., Шевченко В.Н.* Алгоритм прецизионного управления ориентацией космического аппарата при действии неконтролируемого возмущения // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2011. — № 2. — С. 114–121.
7. *Hamilton W.R.* Lession on quaternions. — Dublin : Holdes and Smith, 1853. — 382 p.
8. *Hamilton W.R.* Elements of quaternions. — New York : Chelsea publ. co, 1969. — 369 p.
9. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. — М. : Наука, 1973. — 320 с.
10. *Голдстейн Г.* Классическая механика. — М.: Наука, 1975. — 415 с.
11. *Икес Б.П.* Новый метод выполнения численных расчетов, связанных с работой системы управления ориентацией, основанный на использовании кватернионов // Ракетная техника и космонавтика. — 1970. — 8, № 1. — С. 13–19.
12. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. — М. : Физматгиз, 1961. — 824 с.
13. *Онищенко С.М.* Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Автономные системы. — Киев : Наук. думка, 1983. — 208 с.
14. *Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н.* Управление ориентацией космических аппаратов. — М. : Наука, 1974. — 600 с.
15. *Волосов В.В., Куценко И.А., Попадинец В.И.* Математические модели вращательного движения космических аппаратов с избыточными системами гироскопов и маховиков и задачи управления их ориентацией. Часть 1 // Проблемы управления и информатики. — 2003. — № 1. — С. 101–116.
16. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. — М. : Наука, 1975. — 496 с.
17. *Волосов В.В., Куценко И.А., Попадинец В.И.* Математические модели вращательного движения космических аппаратов с избыточными системами гироскопов и маховиков и задачи управления их ориентацией. Часть 2 // Проблемы управления и информатики. — 2003. — № 3. — С. 109–116.
18. *Лебедев Д.В., Ткаченко А.И.* Навигация и управление ориентацией малых космических аппаратов. — Киев : Наук. думка, 2006. — 300 с.
19. *Dodds S.J., Walleer A.B.* Sliding-mode control system for the three-axis attitude control of rigid-body spacecraft with unknown dynamics parameters // International Journal of Control. — 1991. — 54, N 4. — P. 737–761.
20. *Абалакин В.К.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. — М. : Наука, 1976. — 864 с.

Получено 17.06.2015