УДК 62-502

В.Б. Ларин

О РЕШЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ

Введение

Вопросы управления линейными стационарными системами в той или иной постановке продолжают привлекать внимание исследователей [1–4]. Естественно, что при этом обобщаются традиционные постановки задачи, в частности, рассматриваются вопросы построения решений более общих уравнений Риккати. Так, в [5] отмечается, что задача оптимизации стохастической системы

$$dx(t) = Ax(t)dt + Bu(t)dt + \sum_{i=1}^{N}\left[A_i x(t)dt + B_i u(t)dt\right]dw_i(t),\ \ x(0) = x_0$$

в соответствии с квадратичным критерием

$$J(x_0, u) \equiv E\int_0^\infty \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^{\mathrm T} T \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} dt,\ \ T \equiv \begin{bmatrix} Q & L \\ L^{\mathrm T} & R \end{bmatrix} \ge 0,$$

где $\{w_i(t)\}_{t\in R_+}$ — винеровский процесс, E — символ математического ожидания, сводится к построению решения стохастического уравнения Риккати:

$$C(X) \equiv A^{\mathrm T} X + XA + Q + \Pi_1(X) - S(X)R(X)^{\#} S(X)^{\mathrm T} = 0. \qquad (1)$$

Здесь и далее верхний индекс T означает транспонирование, # — операцию псевдообращения,

$$R(X) \equiv R + \Pi_2(X),\ \ S(X) \equiv L + XB + \Pi_{12}(X),$$

$$\Pi(X) \equiv \begin{bmatrix} \Pi_1(X) & \Pi_{12}(X) \\ \Pi_{12}(X)^{\mathrm T} & \Pi_2(X) \end{bmatrix},$$

$$\Pi_1(X) \equiv \textstyle\sum_{i=1}^N A_i^{\mathrm T} XA_i,\ \Pi_2(X) \equiv \sum_{i=1}^N B_i^{\mathrm T} XB_i,\ \Pi_{12}(X) \equiv \sum_{i=1}^N A_i^{\mathrm T} XB_i.$$

Аналогично в случае стохастической системы с дискретным временем

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + \sum_{i=1}^{N}\left[A_i x(t) + B_i u(t)\right]w_i(t)$$

при оптимизации функционала

$$J_d(x_0, u) \equiv E\sum_{t=0}^{\infty} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^{\mathrm T} T \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

задача сводится к построению решения дискретного стохастического уравнения Риккати:

$$D(X) \equiv A^{\mathrm{T}} XA - X + Q + \Pi_1(X) - \widetilde{S}(X)\widetilde{R}(X)^{\#}\widetilde{S}(X)^{\mathrm{T}} = 0, \tag{2}$$

$$\widetilde{R}(X) \equiv R + B^{\mathrm{T}} XB + \Pi_2(X)$$

$$\widetilde{S}(X) \equiv L + A^{\mathrm{T}} XB + \Pi_{12}(X).$$

Для построения решений уравнений (1), (2) авторы [5] используют метод гомотопии, который позволяет в качестве начального приближения выбирать решения (1), (2), соответствующие $\Pi = 0$.

Ниже рассматривается задача построения решения аналогов уравнений (1), (2) :

$$C(X) \equiv A^{\mathrm{T}} X + XA + Q + \Pi_1(X) - S(X)R(X)^{-1}S(X)^{\mathrm{T}} = 0, \tag{3}$$

$$D(X) \equiv A^{\mathrm{T}} XA - X + Q + \Pi_1(X) - \widetilde{S}(X)\widetilde{R}(X)^{-1}\widetilde{S}(X)^{\mathrm{T}} = 0. \tag{4}$$

Предполагая, что искомые решения (3), (4) удовлетворяют условиям

$$R(X) > 0, \quad \widetilde{R}(X) > 0,$$

для нахождения максимальных решений уравнений (3), (4) предлагается использовать, как и в [1], аппарат линейных матричных неравенств (ЛМН) [6]. Отметим, что в [3] рассматривались уравнения (3), (4), в которых $N = 1$, $L = 0$, $B_1 = 0$ (т.е. $\Pi_{12} = 0, \Pi_2 = 0$). В [1] рассматривалось уравнение (3) при $L = 0$, $N = 1$. Для нахождения максимального решения этого уравнения предлагалось использовать аппарат ЛМН. Естественно, что в случае необходимости, для уточнения полученных с помощью ЛМН решений (3), (4) можно использовать гомотопические методы [5].

1. Общие соотношения

Как отмечено в [6] (соотношения (2.3), (2.4)), матричное неравенство

$$\begin{bmatrix} M(X) & S(X) \\ S^{\mathrm{T}}(X) & R(X) \end{bmatrix} > 0, \tag{5}$$

где матрицы $M(X) = M^{\mathrm{T}}(X)$, $R(X) = R^{\mathrm{T}}(X)$, $S(X)$ линейно зависят от искомой матрицы X, эквивалентно следующим матричным неравенствам:

$$R(X) > 0, \quad M(X) - S(X)R^{-1}(X)S^{\mathrm{T}}(X) > 0. \tag{6}$$

Применительно к (5) можно рассмотреть стандартную задачу ЛМН на собственные значения, а именно, задачу минимизации линейной функции cx, например $cx = tr(X)$, где $tr(X)$ — след матрицы X.

Эта задача формулируется следующим образом (см. соотношение (2.9) [6]): необходимо минимизировать

$$cx = tr(X) \tag{7}$$

при выполнении условий (5) или (6).

Для ее решения можно использовать стандартную процедуру mincx.m пакета MATLAB [7].

2. Решения уравнений (3), (4)

Отметим, что искомые максимальные решения уравнений (3), (4) имеют максимальный след, поэтому описанную выше постановку задачи, которая позволяет использовать процедуру mincx.m, можно применить для нахождения максимальных решений уравнений (3), (4).

Так, в случае уравнения (3) матрицу $M(X)$ в (5) запишем

$$M(X) = XA + A^{\mathrm{T}} X + \Pi_1(X) + Q, \qquad (8)$$

выражения для матриц $S(X)$ и $R(X)$ совпадают с принятыми в (1). Аналогично (4) матрица $M(X)$ имеет вид

$$M(X) = A^{\mathrm{T}} XA - X + \Pi_1(X) + Q, \qquad (9)$$

а матрицы $S(X)$, $R(X)$ совпадают с матрицами $\widetilde{S}(X)$, $\widetilde{R}(X)$, которые фигурируют в (2).

В случае уравнения (3) задача нахождения максимального решения этого уравнения может быть сформулирована следующим образом. Необходимо минимизировать

$$cx = -\,tr(X) \qquad (10)$$

при выполнении условий (5), в которых матрица $M(X)$ определяется (8), а выражения для матриц $S(X)$ и $R(X)$ совпадают с принятыми в (1).

В случае уравнения (4) задача формулируется аналогично. Необходимо минимизировать (10) при выполнении условий (5), в которых матрица $M(X)$ определяется (9), а выражения для матриц $S(X)$ и $R(X)$ совпадают с выражениями для матриц $\widetilde{S}(X)$, $\widetilde{R}(X)$ в (2) соответственно.

3. Примеры

Проиллюстрируем эффективность сформулированных алгоритмов на примерах.

Пример 1. Пусть в уравнении (4) $N = 1$, $L = 0$, $B_1 = 0$ (т.е. $\Pi_{12} = 0, \Pi_2 = 0$). В этом случае уравнение (4) переходит в уравнение (2) [3]. Найдем максимальное решение этого уравнения при следующих значениях матриц, фигурирующих в (4):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0{,}1 \end{bmatrix},\ A_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0{,}2 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 20 \\ -20 \end{bmatrix},\ R = 0,\ Q = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

С помощью описанных выше алгоритмов (максимизация $tr(X)$ при выполнении условий (5)) получено следующее значение для искомого решения X:

$$X = 10^3 \begin{bmatrix} 0{,}2473 & 0{,}4870 \\ 0{,}4870 & 1{,}1780 \end{bmatrix},$$

которому соответствует величина невязки

$$\mathrm{nev} = \left\| A^{\mathrm{T}} XA - X + Q + \Pi_1(X) - \widetilde{S}(X)\widetilde{R}(X)^{-1}\widetilde{S}(X)^{\mathrm{T}} \right\| = 9{,}05 \cdot 10^{-10}.$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ — спектральная норма матрицы. Собственные значения матрицы X следующие: $\lambda_1 = 39{,}1, \lambda_2 = 1389$, т.е. $X > 0$.

В этом примере не нарушается предположение $\widetilde{R}(X) > 0$, несмотря на то, что $R = 0$. Здесь матрица замкнутой системы (см., например, (5.7) [8])

$$A - B(R + B^{\mathrm{T}} XB)^{-1} B^{\mathrm{T}} XA \qquad (11)$$

имеет следующие собственные значения: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0{,}9469$, которые лежат внутри окружности единичного радиуса.

В последующих примерах $N = 1$, $\Pi_{12} = 0$, $\Pi_2 = 0$ ограничения сняты.

Пример 2. Рассмотрим уравнение (3), в котором $L=0,\ \ N=2$. Матрицы, фигурирующие в (3), имеют вид

$$A=\begin{bmatrix}10 & 10\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ Q=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix},\ A_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0{,}2 & 1\end{bmatrix},$$

$$A_2=3\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ B_1=0{,}3\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ B_2=0{,}5\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

При этих исходных данных с помощью алгоритма, использованного в примере 1, получено следующее значение для матрицы X:

$$X=\begin{bmatrix}55{,}8357 & -28{,}2245\\ -28{,}2245 & 52{,}4267\end{bmatrix}.$$

Значению матрицы X соответствует величина невязки

$$\mathrm{nev}=\left\|A^{\mathrm{T}}X+XA+Q+\Pi_1(X)-S(X)R(X)^{-1}S(X)^{\mathrm{T}}\right\|=1{,}77\cdot 10^{-10}.$$

Отметим, что если в данном примере принять $A_2=0{,}395\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, то получим следующее значение для матрицы X:

$$X=10^3\begin{bmatrix}2{,}0360 & -1{,}4472\\ -1{,}4472 & 2{,}1203\end{bmatrix},$$

которой соответствует величина невязки $\mathrm{nev}=7{,}96\cdot 10^{-11}$.

Можно констатировать значительный рост решения (3) при сравнительно малом изменении матрицы A_2. Если же принять $A_2=4\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, то в этом случае не будет получено решение ($\mathrm{nev}=4{,}3\cdot 10^{7}$).

Пример 3. Рассмотрим уравнение (4), в котором $L=0,\ \ N=2$. В примере матрицы, определяющие уравнение (4), имеют вид

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0{,}1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ R=1,\ Q=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix},\ A_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0{,}2 & 1\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ B_1=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ B_2=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

При этих исходных данных с помощью алгоритма, использованного в примере 1, получено следующее значение для матриц X:

$$X=\begin{bmatrix}374{,}8574 & -16{,}8548\\ -16{,}8548 & 722{,}2443\end{bmatrix},$$

которому соответствует следующая величина невязки:

$$\mathrm{nev}=\left\|A^{\mathrm{T}}XA-X+Q+\Pi_1(X)-\widetilde{S}(X)\widetilde{R}(X)^{-1}\widetilde{S}(X)^{\mathrm{T}}\right\|=4{,}48\cdot 10^{-11}.$$

В данном примере матрица замкнутой системы (11) имеет следующие собственные значения: $\lambda_1 = 0{,}0010$ $\lambda_2 = 0{,}0470$, которые лежат внутри окружности единичного радиуса.

Если при приведенных выше исходных данных снять условие $L = 0$ и принять, $L = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, то получим следующее значение для X:

$$X = \begin{bmatrix} 271{,}4849 & -12{,}6341 \\ -12{,}6341 & 522{,}1718 \end{bmatrix},$$

которому соответствует величина невязки $\mathrm{nev} = 3{,}12 \cdot 10^{-11}$.

Таким образом, в данном примере при $L = 0$ и $L = [1 \quad 2]^{\mathrm{T}}$ величина невязки имеет одинаковый порядок.

Заключение

Приведены базирующиеся на процедурах линейных матричных неравенств алгоритмы нахождения максимальных решений обобщенных уравнений Риккати, возникающих как в задачах с непрерывным, так и с дискретным временем. На примерах иллюстрируется эффективность предложенных алгоритмов.

В.Б. Ларін

ПРО РОЗВ'ЯЗОК УЗАГАЛЬНЕНИХ РІВНЯНЬ РІККАТІ

Розглянуто процедури, що виникають при синтезі оптимального керування стаціонарними лінійними системами. Наведено алгоритми знаходження максимальних рішень узагальнених рівнянь Ріккаті, що виникають як в задачах з безперервним, так і з дискретним часом, які базуються на процедурах лінійних матричних нерівностей.

V.B.Larin

ON SOLUTION OF GENERALIZED RICCATI EQUATIONS

The algorithms of finding the maximal solutions of the generalized Riccati equations arising both in the problems with continuous, and with discrete time are presented. These algorithms are based on the procedures of linear matrix inequalities.

1. *Rami M.A., Zhou X.Y.* Linear matrix inequalities, Riccati equations, and indefinite stochastic linear quadratic control // IEEE Trans. Automat. Control. — 2000. — 45, N 6. — P. 1131–1142.
2. *Ivanov I.G.* Accelerated LMI solvers for the maximal solution to a asset of discrete-time algebraic Riccati equations // Appl. Math. E-Notes. — 2012. — **12**. — P. 228–238.
3. *Ivanov I.G., Hasanov V.I.* Perturbation estimates for the two kinds of algebraic Riccati equations arising in stochastic control // J. of Numer. Math. and Stochastics. — 2014. — **6(1)**. — P. 1–20.
4. *Prach A., Tekinalp O., Bernstein D. S.* Infinite-horizon linear-quadratic control by forward propagation of the differential Riccati equation // IEEE Control Systems Magaz. — 2015. — P. 78–93.
5. *Zhang L., Fan H-Y., Chu E K.-W., Wei Y.* Homotopy for rational Riccati equations arising in stochastic optimal control // SIAM J. Sci. Comput. — 2015. — **37**, N 1. — P. B103 — B125.
6. *Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E., Balakrishnan V.* Linear matrix inequalities in system and control theory. — Philadelphia: SIAM, 1994. — 193 p.
7. *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.J., Chilali M.* LMI control toolbox users guide. — The MathWorks Inc., 1995. — 306 p.
8. *Lee R.C.K.* Optimales estimation, identification, and control. — Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1964. — 176 p.

Получено 27.04.2016