ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

УДК 519.9

А.Н. Воронин

КОНЦЕПЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СХЕМЫ КОМПРОМИССОВ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

Введение

Решение многокритериальных задач связано с четырьмя проблемами векторной оптимизации [1]: нормализация критериев, учет приоритетов, определение области Парето и выбор схемы компромиссов. Только одна из них, а именно определение области эффективных решений (области Парето), не зависит от предпочтений лица, принимающего решение (ЛПР), и имеет объективное научное обоснование. Остальные проблемы в той или иной мере требуют информации от ЛПР, и, следовательно, их решение субъективно.

Это особенно относится к проблеме выбора схемы компромиссов, так как компромисс по своей природе — прерогатива человека. Суть понятия «компромисс» заключается в ответе на вопрос: сколько единиц выигрыша по одному критерию мы готовы (по мнению ЛПР) заплатить за неизбежный проигрыш одной единицы по другому критерию (другим) в заданной ситуации? Если такой ответ получен, то следующим шагом будет выбор схемы компромиссов для данной конкретной многокритериальной задачи, что обусловит получение искомого решения.

Выбрав схему компромиссов в форме скалярной свертки частных критериев, можно перейти к построению конструктивного алгоритма решения многокритериальных задач. Скалярная свертка — это математический прием сжатия информации и количественной оценки ее интегральных свойств одним числом. Исторически эти вопросы рассматривал Паскаль, который считается основоположником теории принятия решений. Он еще в 1670 г. ввел два ключевых понятия теории: 1) частные критерии, каждый из которых оценивает какую-либо одну сторону эффективности решения; 2) принцип оптимальности, т.е. правило, позволяющее по значениям критериев вычислять некоторую единую числовую меру эффективности решения. В качестве такого правила Паскаль предложил мультипликативную скалярную свертку частных критериев.

Скалярная свертка как выражение схемы компромиссов — основа построения конструктивного аппарата решения многокритериальных задач. Существует большое разнообразие возможных схем компромиссов и, как следствие, скалярных сверток частных критериев. Выбор конкретной схемы зависит от ситуации принятия многокритериального решения и индивидуальных предпочтений ЛПР.

Возможность решения проблемы основана на гипотезе существования некоторой функции полезности [2], возникающей в сознании ЛПР при решении конкретной многокритериальной задачи. Схема компромиссов в форме скалярной свертки критериев рассматривается как математическая модель функции полезности. Практически все подходы к определению скалярной свертки критериев сводятся к построению той или иной математической модели функции полезности ЛПР. Для этого необходимо функцию полезности в заданных обстоятельствах формализовать, проанализировать и на основе анализа найти адекватную данной ситуации содержательную математическую модель (скалярную свертку критериев).

Формализация функции полезности

В общем виде функция полезности ЛПР может быть представлена как $\Phi[y(x), r]$, где $x = \{x_i\}_{i=1}^{n} \in X$ — вектор возможных решений, определенный в допустимой области *X*; $y = \{y_k\}_{k=1}^{s} \in M$ — вектор частных критериев, определенный в допустимой области $M = \{y \big| 0 \le y_k \le A_k,\ k \in [1, s]\}$; $A = \{A_k\}_{k=1}^{s}$ — вектор ограничений; $r \in R$ — вектор внешних условий, определенный на множестве возможных факторов *R*.

Ситуация принятия многокритериального решения зависит от факторов внешних условий *r*. Например, в условиях космического полета особое внимание уделяется критерию, отражающему экономичность расхода кислорода на борту. В условиях тропиков важен критерий, характеризующий качество работы системы охлаждения двигателя и т.п. Обычно при решении многокритериальных задач предполагается, что вектор *r* фиксирован и задан: $r = r^{\circ}$. Тогда функция полезности ЛПР может быть представлена в виде

$$\Phi[y(x), r]\big|_{r=r^{\circ}} = Y[y(x)]^{\circ},$$

где $Y[y(x)]^{\circ}$ — скалярная свертка, построенная по схеме компромиссов, адекватной заданной ситуации.

Чаще всего пользуются линеаризованной моделью

$$Y[y(x)] \approx \sum_{k=1}^{s} a_k^{\circ} y_k(x),$$

где a_k^{o} — весовые коэффициенты, которые назначает ЛПР в соответствии со своими индивидуальными предпочтениями в заданной ситуации.

Такой подход, обладая несомненным преимуществом простоты, характеризуется рядом недостатков, присущих методу линеаризации вообще. Так, линейная модель приводит к правильным результатам лишь в малых окрестностях рабочей точки, положение которой зависит от ситуации принятия многокритериального решения. Любое изменение ситуации влечет необходимость перерасчета весовых коэффициентов модели. Другие модели обладают своими преимуществами и недостатками. В настоящее время выбор схемы компромиссов не определяется теорией, а осуществляется эвристически, на основании индивидуальных предпочтений, профессионального опыта разработчика и сведений о ситуации, в которой принимается многокритериальное решение.

Проблема формализации выбора схемы компромиссов относится к классу слабоструктурированных задач и очень сложна в решении. При анализе возможностей формализации выбора схемы компромиссов предполагается существование некоторых инвариантов, правил, обычно являющихся общими для всех ЛПР независимо от их индивидуальных склонностей, которых они одинаково придерживаются в той или иной ситуации. Согласно [3] субъективность ЛПР имеет свои границы. В деловых решениях человек обязан быть рациональным, чтобы иметь возможность аргументировать мотивы выбора, логику субъективной функции полезности. Поэтому любые предпочтения ЛПР должны находиться в рамках определенной рациональной системы. Это и делает возможной формализацию.

В данном случае предметом исследования является такая тонкая субстанция, как воображаемая функция полезности, возникающая в сознании ЛПР при решении конкретной многокритериальной задачи. При этом у каждого ЛПР функция полезности своя. Тем не менее можно получить предпосылки для выявления вида содержательной модели функции полезности, если обнаружить и проанализировать некоторые общие закономерности, наблюдаемые в процессе принятия многокритериальных решений различными ЛПР в разных ситуациях.

Анализ функции полезности

В зависимости от вида многокритериальной задачи скалярная свертка $Y[y(x)]$ имеет различный физический смысл. В задаче векторного анализа эта свертка — оценочная функция, ее величина количественно выражает меру качества многокритериального объекта при заданных значениях аргументов *x*. В задаче векторной оптимизации скалярная свертка $Y[y(x)]$ имеет смысл целевой функции. В результате ее экстремизации получается компромиссно-оптимальный вектор аргументов x^*. Ниже будем рассматривать задачу векторной оптимизации, считая для определенности, что все критерии $y(x)$ требуют минимизации. Тогда математически задача векторной оптимизации представляется в виде

$$x^* = \arg\min_{x \in X} Y[y(x)] .$$

В дальнейшем удобно оперировать относительными значениями критериев. Если вектор критериев $y(x)$ пронормирован вектором ограничений *A*,

$$y_0(x) = \{y_k(x) / A_k\}_{k=1}^{s} = \{y_{0k}(x)\}_{k=1}^{s},$$

то применяется скалярная свертка $Y[y_0(x)]$.

Теперь нужно определиться с выбором принципа оптимальности. Нахождение экстремума взвешенной суммы частных критериев в теории принятия решений называется реализацией принципа Лапласа. Определение экстремума мультипликативной свертки осуществляется в соответствии с принципом Паскаля. Концепция Чарнза–Купера [4] требует минимизации расстояния от идеальной (утопической) точки до паретовской границы (принцип поближе к идеальной точке). Эти и другие принципы оптимальности имеют свои преимущества, но не содержат оценки соотношения частных критериев с их предельно допустимыми значениями (ограничениями).

Критерии имеют свои ограничения. При реализации известных принципов оптимальности не исключается возможность опасного приближения отдельных критериев к своим ограничениям, что весьма нежелательно. Чтобы избежать такой опасности, будем руководствоваться принципом «подальше от ограничений».

Введем понятие «напряженность ситуации» как меры близости относительных частных критериев к своему предельному значению (единице):

$$\rho_k = 1 - y_{0k}, \ \rho_k \in [0; 1], \ \ k \in [1, s], \ \rho = \{\rho_k\}_{k=1}^{s}.$$

Проанализируем логику функции полезности, которой руководствуются ЛПР, принимая решения при различных значениях параметра напряженности ситуации ρ.

Если считать, что многокритериальное решение принимается в напряженной ситуации, то это значит, что в заданных условиях один или несколько частных критериев в результате решения могут оказаться в опасной близости к своим предельным значениям ($\rho_k \approx 0$). И если один из критериев достигнет предела (или выйдет за него), то это событие не компенсируется возможным малым уровнем остальных критериев (обычно не допускается нарушение любого из ограничений).

В этой критической ситуации необходимо всемерно препятствовать опасному возрастанию наиболее неблагополучного (т.е. наиболее близкого к своему пределу) частного критерия независимо от поведения в это время остальных критериев. Поэтому в достаточно напряженных ситуациях (при малых значениях ρ_k) ЛПР если и допускает ухудшение максимального (наиболее важного в данных условиях) частного критерия на единицу, то только компенсируя это очень большим количеством единиц, которые улучшают остальные критерии. А в первом полярном случае ($\rho_k = 0$) ЛПР оставляет для рассмотрения только этот единственный, наиболее неблагополучный частный критерий, пренебрегая остальными. Следовательно, адекватным выражением схемы компромиссов в случае напряженной ситуации является минимаксная, чебышевская модель (эгалитарный принцип)

$$x^* = \arg\min_{x\in X} Y[y_0(x)]^{(1)} = \arg\min_{x\in X}\max_{k\in[1,\,s]} y_{0k}(x)\,.$$

В менее напряженных ситуациях необходимо одновременно удовлетворять и другим критериям с учетом противоречивых интересов и целей системы. При этом ЛПР варьирует свою оценку выигрыша по одним критериям и проигрыша по другим в зависимости от ситуации. В промежуточных случаях выбираются схемы компромиссов, дающие различные степени частичного выравнивания частных критериев. С уменьшением напряженности ситуации предпочтения по отдельным критериям выравниваются.

И, наконец, во втором полярном случае ($\rho_k \approx 1$) ситуация настолько спокойная, что частные критерии малы и не возникает никакой угрозы нарушения ограничений. Здесь ЛПР считает, что единица ухудшения любого частного критерия вполне компенсируется равнозначной единицей улучшения любого другого критерия. Этому случаю соответствует экономичная схема компромиссов, обеспечивающая минимальные для заданных условий суммарные потери по частным нормированным критериям. Такая схема выражается моделью интегральной оптимальности (утилитарный принцип)

$$x^* = \arg\min_{x\in X} Y[y_0(x)]^{(2)} = \arg\min_{x\in X}\sum_{k=1}^{s} y_{0k}(x)\,.$$

Таким образом, обнаружено две реперные точки (полярные значения параметра напряженности ситуации ρ), в которых функции полезности различных ЛПР совпадают.

Проведенный анализ выявляет закономерность, в силу которой ЛПР варьирует свой выбор от модели интегральной оптимальности в спокойных ситуациях до минимаксной модели в напряженных ситуациях. В промежуточных случаях ЛПР выбирает схемы компромиссов, дающие различные степени удовлетворения отдельным критериям согласно своим индивидуальным предпочтениям, но в соответствии с заданной ситуацией. Если принять выводы из проведенного анализа как логическую основу для формализации выбора схемы компромиссов, то можно предложить различные конструктивные концепции, одна из них — концепция нелинейной схемы компромиссов.

Нелинейная схема компромиссов

Изложенный анализ дает возможность заменить задачу выбора схемы компромиссов эквивалентной задачей синтеза некоторой единой скалярной свертки частных критериев, которая в различных ситуациях выражала бы разные принципы оптимальности. Сформулируем требования к синтезируемой функции $Y(y_0)$:

- быть гладкой и дифференцируемой;
- в напряженных ситуациях выражать принцип минимакса;
- в спокойных условиях выражать принцип интегральной оптимальности;
- в промежуточных случаях приводить к парето-оптимальным решениям, дающим различные меры частичного удовлетворения критериям.

Такая универсальная свертка должна быть выражением схемы компромиссов, адаптирующейся к ситуации. Можно сказать, что адаптация и способность к адаптации — главная содержательная сущность исследования многокритериальных систем. Для придания способности к адаптации необходимо, чтобы синтезируемая скалярная свертка в явном виде включала характеристики напряженности ситуации ρ.

Рассмотрим несколько функций, удовлетворяющих изложенным выше требованиям, например,

$$Y(\alpha, y_0) = \sum_{k=1}^{s} [1 - y_{0k}(x)]^{-\alpha_k}; \ \alpha_k \geq 0, \ \sum_{k=1}^{s} \alpha_k = s,$$

$$Y(\alpha, y_0) = -\sum_{k=1}^{s} \alpha_k \log_a [1 - y_{0k}(x)]; \ 1 < a < \infty, \ \alpha_k \geq 0, \ \sum_{k=1}^{s} \alpha_k = 1,$$

и пр. Из возможных функций, отвечающих перечисленным требованиям, выберем простейшую:

$$Y(\alpha, y_0) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k [1 - y_{0k}(x)]^{-1}; \ \alpha_k \geq 0, \sum_{k=1}^{s} \alpha_k = 1, \tag{1}$$

где αk = const — формальные параметры, имеющие двоякий физический смысл. С одной стороны — это коэффициенты, выражающие предпочтения ЛПР по отдельным критериям, с другой — это коэффициенты регрессии содержательной регрессионной модели, построенной на основе концепции нелинейной схемы компромиссов.

Таким образом, нелинейной схеме компромиссов соответствует модель векторной оптимизации, в явном виде зависящая от характеристик напряженности ситуации ρ:

$$x^* = \arg \min_{x \in X} \sum_{k=1}^{s} \alpha_k [1 - y_{0k}(x)]^{-1}. \tag{2}$$

В отличие от линейной модели, определенной в малой окрестности рабочей точки, нелинейная модель функции полезности ЛПР определена на всей допустимой области решений X и не требует перерасчета коэффициентов α_k при изменении ситуации.

Из выражения (2) видно, что если какой-либо относительный частный критерий, например $y_{0i}(x)$, начнет приближаться к своему пределу (единице), т.е. ситуация становится напряженной, то соответствующий член $Y_i = \alpha_i / [1 - y_{0i}(x)]$ в минимизируемой сумме возрастает настолько, что проблема минимизации всей суммы сведется к минимизации только данного наихудшего члена, т.е. критерия $y_{0i}(x)$. Это эквивалентно действию минимаксной модели. (Для исключения возможности деления на нуль в напряженных ситуациях в алгоритме оптимизации по формуле (2) можно применить следующее правило: если $y_{0i}(x) \geq 0{,}95$, то принимают $y_{0i}(x) = 0{,}95$.)

Если же относительные частные критерии удалены от единицы, т.е. ситуация спокойная, то модель (2) действует эквивалентно модели интегральной оптимальности. В промежуточных ситуациях получаются различные степени частичного выравнивания критериев.

Предложенная нелинейная схема компромиссов обладает свойством адаптации к ситуации принятия многокритериального решения. При этом адаптация осуществляется непрерывно, в то время как традиционный выбор схемы компромиссов происходит дискретно, в результате к субъективным погрешностям добавляются ошибки, связанные с квантованием схем компромиссов.

Конструкция нелинейной схемы компромиссов удобна еще и тем, что не требует обязательной нормализации критериев. Эквивалентной формой скалярной свертки по нелинейной схеме компромиссов для минимизируемых критериев является

$$Y[y(x)]=\sum_{k=1}^{s}\alpha_k A_k[A_k-y_k(x)]^{-1}.$$

Более того, нелинейная схема не требует и обязательного приведения к единому способу экстремизации, например, к минимизации критериев. Для максимизируемых критериев формой скалярной свертки по нелинейной схеме компромиссов является

$$Y[y(x)]=\sum_{k=1}^{s}\alpha_k A_k[y_k(x)-A_k]^{-1}.$$

Если среди s критериев есть как минимизируемые, так и такие, что требуют максимизации, то скалярная свертка имеет вид

$$Y[y(x)]=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i A_i[A_i-y_i(x)]^{-1}+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j A_j[y_j(x)-A_j]^{-1},\ m+n=s,$$

где $y_i, i\in[1,m]$ — минимизируемые критерии; $y_j,\ j\in[1,n]$ — максимизируемые критерии; A_i — ограничения сверху для минимизируемых критериев; A_j — ограничения снизу для максимизируемых критериев.

В то же время независимо от вида скалярной свертки модель векторной оптимизации по нелинейной схеме компромиссов остается неизменной:

$$x^*=\arg\min_{x\in X} Y[y(x)].$$

Унификация алгоритма

Как отмечалось выше, выбор схемы компромиссов — прерогатива человека, отражение его субъективной функции полезности при решении конкретной многокритериальной задачи. Тем не менее удалось выявить некоторые закономерности и на этой объективной основе построить скалярную свертку критериев, вид которой определяется содержательными представлениями сути изучаемого явления. Феномен же индивидуальных предпочтений ЛПР формально представлен наличием вектора α в структуре содержательных моделей (1) и (2).

Возможны различные оценки роли субъективных факторов в решении многокритериальных задач. Субъективность допустима и даже желательна, если такая задача решается в интересах конкретного человека. Действительно, если человек-оператор в эргатической системе имеет возможность подстраивать параметры рабочего места под свои индивидуальные особенности, то это повышает качество управляемого процесса. Механизм индивидуальных предпочтений достаточно интенсивно применяется при решении многокритериальных задач.

Однако субъективность в их решении допустима и желательна лишь до тех пор, пока результат предназначается для конкретных ЛПР или узких коллективов людей со сходными предпочтениями. Если же он предназначен для общего использования, то обязан быть вполне объективным, унифицированным. В этих случаях механизм индивидуальных предпочтений из методики решения многокритериальных задач должен быть исключен во избежание произвола и неоднозначности результатов решения. По Гильберту общая задача науки состоит в том, чтобы «освободить нас от случайности, предвзятости личных настроений, привычек и защитить от субъективизма». Формализация качественных понятий исключает неизбежную на интуитивном уровне рассмотрения неоднозначность толкований и, что гораздо существеннее, позволяет исследовать эти понятия математическими методами, что, как правило, уже на первых шагах приносит новые важные результаты.

Когда результат решения многокритериальной задачи предназначается для широкого использования, то он унифицируется и индивидуальные предпочтения нивелируются по статистике; становится применимым принцип недостаточного основания Бернулли–Лапласа: если априорные вероятности возможных гипотез неизвестны, то их следует положить равными, т.е. все гипотезы следует считать равновероятными. Применительно к многокритериальной задаче это означает, что все весовые коэффициенты α_k, $k\in[1, s]$ в выражении для скалярной свертки нормированных минимизируемых критериев должны быть равными, если только нет никаких предварительных данных о разноценности критериев. Так как в постановке задачи рассматривались только критерии, одинаковые по важности, то при унификации должны приниматься все весовые коэффициенты равными: $\alpha_k\equiv 1/s$, $\forall k\in[1, s]$. Тогда

$$Y(\alpha, y_0) = \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}[1 - y_{0k}(x)]^{-1}.$$

Учитывая, что умножение на $1/s$ является монотонным преобразованием, которое, по теореме Гермейера, не изменяет результатов сравнения, переходим к унифицированному выражению для скалярной свертки критериев:

$$Y(y_0) = \sum_{k=1}^{s}[1 - y_{0k}(x)]^{-1}. \qquad (3)$$

Эту формулу рекомендуется применять во всех случаях, когда многокритериальная задача решается не в интересах какого-то одного конкретного ЛПР, а для широкого использования.

В [5] предлагается во всех случаях начинать многокритериальное решение с использования формулы (3). Полученный результат и соответствующие ему значения частных критериев предъявляются ЛПР для оценки. Если ЛПР считает, что полученное решение его не удовлетворяет и требуется коррекция согласно его индивидуальным предпочтениям, то организуется процедура определения весовых коэффициентов α_k, $k\in[1, s]$, и для оптимизации применяются формулы (1) и (2).

Учет предпочтений ЛПР

Если многокритериальная задача решается в интересах конкретного ЛПР, то в выражении скалярной свертки необходимо определить весовые коэффициенты α_{k}, $k\in[1, s]$, отражающие его индивидуальные предпочтения. Представим выражение для скалярной свертки по нелинейной схеме компромиссов в виде

$$Y(\alpha, y_0) = \sum_{k=1}^{s} Y_k(\alpha, y_0),$$

где $Y_k(\alpha, y_0) = \alpha_k[1 - y_{0k}(x)]^{-1}$. Выполнение условий $\alpha_k \ge 0,\ \sum_{k=1}^{s}\alpha_k = 1$ обеспечивает парето-оптимальность решений.

Если проанализировать зависимости $Y_k(y_{0k})$ при различных значениях коэффициента α_k, то наибольшее влияние коэффициенты α оказывают в «средних», промежуточных ситуациях. В полярных точках характеристик напряженности зависимости $Y_k(y_0)$ очень близки при любых значениях коэффициентов α. Это согласуется с выводами содержательного анализа. Действительно, в полярных точках представления различных ЛПР о схемах компромиссов совпадают (или достаточно близки), а в промежуточных ситуациях в наибольшей мере проявляются различия отдельных людей в индивидуальных предпочтениях.

Поэтому при экспериментальных оценках альтернатив нет смысла оперировать в очень напряженных или очень спокойных ситуациях, наиболее информативна средняя часть характеристики напряженности.

Для определения коэффициентов α можно применять различные подходы.

Дуальный подход

Практика решения многокритериальных задач показывает, что предположение о наличии с самого начала готовой и стабильной (хотя бы и в неявном виде) функции полезности у ЛПР справедливо не всегда. Решая многокритериальную задачу, ЛПР сравнивает совокупности конкретных значений критериев при различных альтернативах, делает пробные шаги, ошибается и осмысливает соотношение между своими потребностями и возможностями их удовлетворения заданным объектом в заданной ситуации. При противоречивых критериях это соотношение по своей природе компромиссно, однако осознанной априори схемы компромиссов у ЛПР пока нет. Обычно представление о схеме компромиссов, необходимое для решения задачи, возникает и постепенно совершенствуется лишь в результате попыток ЛПР улучшить многокритериальное решение в серии пробных шагов. Ясно, что подразумевается наличие интерактивной компьютерной технологии, так как в реальной жизни такая процедура обычно невозможна.

Таким образом, одновременно и взаимозависимо человек, с одной стороны, адаптируется к решаемой многокритериальной задаче, структурируя предпочтения и совершенствуя свое представление о функции полезности, а с другой — последовательно находит серию оптимальных в смысле текущей функции полезности решений. Взаимообусловленные процессы адаптации ЛПР к задаче и нахождения наилучшего результата носят дуальный характер и принципиально входят в методику человеко-машинного решения многокритериальных задач.

Представим схему нахождения эффективных решений в виде модели

$$x^{(\alpha)} = \operatorname*{argmin}_{x \in X} \sum_{k=1}^{s} \alpha_k [1 - y_{0k}(x_u)]^{-1}, \;\; \alpha \in X_\alpha.$$

Выбирая различные значения параметров α из допустимой области $X_\alpha = \left\{ \alpha \,\middle|\, \alpha_k \geq 0, \; \sum_{k=1}^{s} \alpha_k = 1 \right\}$, по этой схеме получаем различные паретовские решения $x^{(\alpha)}$. Задача заключается в такой организации интерактивной процедуры, чтобы последовательность генерируемых паретовских точек была улучшающейся с точки зрения ЛПР.

Как отмечалось, в начальной стадии процесса решения у ЛПР практически отсутствует не только аналитическое описание функции полезности, но и готовое априорное представление о ней. Поэтому интерактивная процедура должна быть организована как дуальная, а поисковый метод оптимизации должен допускать диалоговое программирование в порядковых шкалах и использовать минимальную информацию о функции полезности. Таким методом, основанным на сопоставлении предпочтений при специально рассчитываемых альтернативах, является порядковый аналог метода симплекс-планирования обычно в модификации Нелдера-Мида.

Дуальная процедура начинается с нахождения первого (общего) решения при $\alpha_k^0 = 1/s, \, k \in [1, s]$, что соответствует унифицированной модели

$$x^{(0)} = \arg \min_{x \in X} \sum_{k=1}^{s} [1 - y_0(x)]^{-1}.$$

Полученное решение и соответствующие ему значения частных критериев предъявляются ЛПР для оценки. Если ЛПР считает, что решение $x^{(0)}$ его не удовлетворяет и требуется коррекция согласно его индивидуальным предпочтениям, то организуется интерактивная процедура симплекс-планирования.

В каждой вершине исходного симплекса S_0, расположенного в окрестностях решения $x^{(0)}$, рассчитываются паретовские решения $x^{(\alpha)}$ и соответствующие им

 ISSN 0572-2691

значения частных критериев $y_0(x^{(\alpha)})$ предъявляются ЛПР для выбора наихудшей, с его точки зрения, вершины. Значение функции полезности с большой вероятностью улучшится, если найти решение в новой точке, прямо противоположной худшей вершине в смысле исходного симплекса. Механизм симплекс-планирования состоит в том, что на каждой итерации текущий симплекс заменяется новым: худшая вершина отбрасывается, и вместо нее в набор вводится новая, получаемая зеркальным отражением худшей точки относительно центра противоположной грани.

Так получается последовательность симплексов S_0, S_1, S_2,... Согласно изложенному последовательность генерируемых эффективных точек $x^{(\alpha)}$ улучшается с точки зрения ЛПР и сходится к наилучшему, по его мнению, решению $x^* = x^{(\alpha^*)}$. Одновременно определяется вектор α^*, отражающий предпочтения конкретного ЛПР.

Описанный прием, по сути, сводит исходную сложную задачу синтеза многокритериального решения к последовательности более простых задач анализа специально организованной серии альтернатив. Отметим, что дуальная интерактивная процедура требует от ЛПР не многокритериальных оценок по шкалам баллов и даже не ранжирования решений, а только выбора наихудшей из s альтернатив на каждом шаге итерации. С точки зрения дуального подхода, важно также, что данная процедура позволяет ЛПР возвращаться к предыдущим результатам и переосмысливать свои оценки и предпочтения. Поиск прекращается, когда ЛПР считает, что решения перестают существенно улучшаться.

Важным фактором, обусловливающим эффективность изложенного метода, представляется то, что начальная точка поиска выбирается не как произвольная точка в паретовском множестве, а как аксиоматически обоснованное решение, которое следует лишь скорректировать в соответствии с неформальными предпочтениями конкретного ЛПР. Процесс корректировки обеспечивает взаимную адаптацию: человек адаптируется к данной конкретной многокритериальной задаче, а модель нелинейной схемы компромиссов становится отражением индивидуальных предпочтений данного человека.

Фундаментальным отличием свертки по нелинейной схеме от других известных скалярных сверток является органическая связь с ситуацией принятия многокритериального решения. По сути, предложенная свертка представляет собой нелинейную функцию регрессии (линейную по параметрам), выбранную по физическим соображениям и поэтому эффективную. Коэффициенты α в выражении для нелинейной скалярной свертки имеют смысл параметров нелинейной содержательной функции регрессии, поэтому, будучи найденными, они не изменяются от ситуации к ситуации, как в случае линейной и других известных сверток, не адаптирующихся к ситуации.

Задача определения коэффициентов α в дуальной процедуре может рассматриваться как задача синтеза решающего правила, которое, будучи применено формально, отражает адекватным образом логику конкретного ЛПР в любой возможной ситуации. Такая задача возникает, например, когда многокритериальная система работает в режиме советчика оператора в условиях дефицита времени. Здесь желательно, чтобы система в любой ситуации принимала такое же решение, как и данный оператор, если бы у него была возможность спокойно подумать. С аналогичными проблемами сталкиваемся и при разработке решающей системы интеллектуального робота, функционирующего в изменяющихся и неопределенных динамических средах, если хотят, чтобы он поступал так же, как на его месте поступил бы обучивший его человек, и т.п.

Парето-оптимальность

Покажем, что нелинейная схема компромиссов в унифицированной форме удовлетворяет условию парето-оптимальности. Дано:

1) множество допустимых решений $x \in X$, X, выпуклое в E^n;

2) решение по нелинейной схеме компромиссов

$$x^* = \left\{ x^* \middle| \, x^* \in X; \forall x \in X : \sum_{k=1}^{s} [1 - y_{0k}(x^*)]^{-1} \le \sum_{k=1}^{s} [1 - y_{0k}(x)]^{-1} \right\};$$

3) множество парето-оптимальных решений

$$X^K = \{x' \,|\, x' \in X; \ \ \forall x \in X : y_{0k}(x') \le y_{0k}(x), \ \ k \in [1, s]\},$$

причем хотя бы одно из указанных неравенств является строгим.

Требуется доказать, что $x^* \in X^K$.

Допустим обратное и положим, что решение x не принадлежит множеству X^K. Тогда найдется такое $x^{\sim} \in X$, что

$$y_{0k}(x^{\sim}) \le y_{0k}(x^*), \ \ k \in [1, s],$$

причем некоторые (по крайней мере одно) из этих неравенств строгие. Тогда при $x^{\sim} \in X$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{s} [1 - y_{0k}(x^{\sim})]^{-1} \le \sum_{k=1}^{s} [1 - y_{0k}(x^*)]^{-1},$$

что противоречит определению решения по нелинейной схеме компромиссов. Следовательно, $x^* \in X^K$, что и требовалось доказать.

По лемме Карлина, нелинейная схема компромиссов с весовыми коэффициентами тоже приводит к парето-оптимальному решению, если весовые коэффициенты определены на симплексе: $\alpha \in X_\alpha = \left\{ \alpha \middle| \sum_{k=1}^{s} \alpha_k = 1, \alpha_k \ge 0 \right\}$.

Аксиоматика

Сформулируем аксиоматику, на которой основывается концепция нелинейной схемы компромиссов. Основные системы аксиом, которым должна удовлетворять скалярная свертка в форме отношения порядка $Y(y)$, сформулированы Эрроу, Сеном, Нэшем, Милнором и Гурвицем. Классической принято считать аксиоматику Эрроу, другие системы аксиом разработаны главным образом вследствие необходимости разрешить так называемый парадокс Эрроу. Он состоит в том, что не существует порядка $Y(y)$, удовлетворяющего, казалось бы, очевидным пяти аксиомам Эрроу (приводятся на языке бинарных отношений):

- A1. Аксиома независимости от положительного линейного преобразования вектора эффективности:

$$Y(\{y_k(x)\}_{k=1}^{s}) \leftrightarrow Y(\{a_k y_k(x) + b_k\}_{k=1}^{s}),$$
$$\forall a_k > 0, \ \ b_k \in E^1.$$

- A2. Аксиома независимости от выбора элементов множества допустимых решений $x \in X$: если для двух допустимых векторов эффективности

$$y^1(x) = \{y_k^1(x)\}_{k=1}^{s^1}, y^2(x) = \{y_k^2(x)\}_{k=1}^{s^2}; \ \ y^1, y^2 \in F,$$

элементы $x^1, x^2 \in X$ таковы, что соблюдаются покомпонентные неравенства

$$y_k{}^1(x^1) \le y_k^1(x^2),\ \ \forall k \in [1, s^1],$$
$$y_k^2(x^1) \le y_k^2(x^2),\ \ \forall k \in [1, s^2]$$

и существуют компоненты, для которых эти неравенства строгие, то должны быть справедливы и выражения

$$x^1 Y(y^1) x^2,\ \ x^1 Y(y^2) x^2,$$

это означает, что решение x^1 предпочтительней решения x^2 в смысле отношений порядка как $Y(y^1)$, так и $Y(y^2)$.

• А3. Аксиома универсальности $Y(y)$ по $y \in F$: отношение порядка $Y(y)$ должно быть определено для любого допустимого вектора эффективности $y \in F$.

• А4. Аксиома отсутствия «диктатора»: не существует $l \in [1, s]$ такого, что

$$y_l(x^1) \le y_l(x^2) \to x^1 Y(y) x^2;\ \ x^1, x^2 \in X,$$

т.е. не допускается вывод $x^1 Y(y)\ x^2$ только на основании сравнения значений l-й компоненты вектора эффективности.

• А5. Аксиома ослабленной оптимальности по Парето:

$$y_k(x^0) \le y_k(x) \to x^0 Y(y) x;\ \ x^0, x \in X,\ \ k \in [1, s],$$

т.е. если решение $x^0 \in X$ недоминируемо по отношению ко всем $x \in X$ по каждому из частных критериев, то оно предпочтительно в смысле отношения порядка $Y(y)$.

Для разрешения парадокса Эрроу необходимо связать аксиоматику с напряженностью ситуации, в которой принимается многокритериальное решение. «Диктаторский» принцип согласования критериев не только допустим, но, и как следует из приведенного выше содержательного анализа, необходим в напряженных ситуациях. Поэтому вместо А4 сформулируем аксиому В4 следующим образом.

• В4. Аксиома необходимости «диктатора» в напряженных ситуациях: существуют $l \in [1, s]$ такие, что

$$y_{0l}(x) \le y_{0l}(x^0) \to x Y(y) x^0;\ \ x^0, x \in X,$$

если решение x^0 таково, что для максимальной компоненты нормализованного вектора эффективности

$$y_{0l}(x^0) = \max_{k \in [1, s]} y_{0k}(x^0)$$

справедливо неравенство $1 - y_{0l}(x^0) \le \varepsilon$, где ε — заданная малая величина.

Это значит, что в напряженных ситуациях вывод $x^1 Y(y) x^2$ должен быть обусловлен только l-й компонентой нормализованного вектора эффективности.

Учитывая, что парето-оптимальность нелинейной схемы компромиссов доказана, усилим аксиому А5 и сформулируем аксиому В5.

• В5. Аксиома оптимальности по Парето: если для $x^* \in X$ выполнено условие $x^* Y(y)\ x, x \in X$, то $x^* \in X^K$.

Аксиому А1 ослабим, видоизменим, и получим В1.

• В1. Аксиома независимости от положительного масштабного преобразования вектора эффективности:

$$Y(\{y_k(x)\}_{k=1}^s) \leftrightarrow Y(\{a_k y_k(x)\}_{k=1}^s),\ \ \forall a_k > 0.$$

Установлено, что рассмотренная скалярная свертка по нелинейной схеме компромиссов удовлетворяет модификации системы аксиом Эрроу, состоящей из аксиом В1-А2-А3-В4-В5.

Преимущество концепции нелинейной схемы компромиссов — возможность принятия многокритериального решения формально, без непосредственного участия человека. При этом на единой идейной основе решаются как задачи, имеющие значение для общего использования, так и те, основной содержательной сущностью которых является удовлетворение индивидуальных предпочтений ЛПР. Аппарат нелинейной схемы компромиссов, разработанный как формализованный инструмент для исследования систем управления с противоречивыми критериями, позволяет практически решать многокритериальные задачи широкого класса.

Вложенные скалярные свертки

Скалярная свертка по нелинейной схеме компромиссов адекватна при оценке качества функционирования иерархических структур, например система оценки альтернатив в теории принятия решений.

Задачу принятия решений в общем виде [1] представим схемой

$$\{\{x\},\ Y\} \to x^*,$$

где $\{x\}$ — множество объектов (альтернатив); Y — функция выбора (правило, устанавливающее предпочтительность на множестве альтернатив); x^* — выбранные альтернативы (одна или более).

В теории принятия решений различают два подхода к оценке объектов (альтернатив), подлежащих выбору. Один из них — оценка объекта в целом и выбор альтернативы по непосредственному сравнению объектов как гештальтов (целостного образа объекта без детализации свойств). Второй — детализация и оценка тех или иных векторов характеристик (свойств) объектов и принятие решений по результатам сравнения этих свойств.

Если целостный подход предусматривает выбор x^* непосредственно по функции выбора Y, то механизм векторного подхода требует осуществления декомпозиции (разложения) функции Y на совокупность (вектор) функций выбора y. Под декомпозицией функции выбора Y понимается ее эквивалентное представление с помощью определенной совокупности других функций выбора y, композицией которых выступает исходная функция выбора Y.

Выделение функций выбора y (свойств) альтернатив сопряжено с декомпозицией, приводящей к иерархической структуре свойств. Свойства первого иерархического уровня могут делиться на следующие наборы свойств и т.д. Глубина деления определяется стремлением дойти до тех свойств, которые удобно сравнивать между собой. Свойства, для которых существуют объективные численные характеристики, принято называть критериями. Более строго: критериями называются количественные показатели свойств объекта, числовые значения которых служат мерой качества объекта оценки по отношению к данному свойству. Получение набора критериев — конечный итог иерархической декомпозиции. Количество уровней зависит от требуемой глубины декомпозиции.

Подход сравнения по отдельным свойствам, при всей своей привлекательности, порождает серьезную проблему обратного перехода к требуемому сравнению альтернатив в целом. Эта проблема предполагает решение задачи композиции критериев по уровням иерархии, что достаточно непросто, особенно при значительной глубине декомпозиции свойств. В простейшем и наиболее распространенном случае (двухуровневая иерархия) задача композиции решается традиционным получением однократной скалярной свертки критериев. Но уже при наличии трехуровневой иерархии требуются другие подходы.

Для адекватной оценки альтернативы в целом нужно решить задачу композиции критериев по уровням иерархии, последовательно переходя от нижнего уровня до верхнего. Инструментом акта композиции может служить скалярная свертка критериев.

Качество альтернативы определяется иерархической системой векторов

$$y^{(j-1)} = \{y_i^{(j-1)}\}_{i=1}^{n^{(j-1)}}, \; j \in [2, m],$$

где $y^{(j-1)}$ — вектор критериев на (j–1)-м уровне иерархии, по компонентам которого оценивается качество свойств альтернативы на j-м уровне; m — количество уровней иерархии; $n^{(j-1)}$ — количество оцениваемых свойств (j–1)-го уровня иерархии. Численные значения n критериев $y^{(1)} = y$ первого уровня иерархии для данной альтернативы заданы. Ясно, что $n^{(1)} = n$ и $n^{(m)} = 1$.

Значимость каждой из компонент критерия (j-1)-го уровня при оценке k-го свойства j-го уровня характеризуется коэффициентом приоритета, совокупность которых составляет систему векторов приоритета

$$p_{ik}^{(j-1)} = \{p_{ik}^{(j-1)}\}_{k=1}^{n^{(j)}}, \; j \in [2, m].$$

Требуется найти аналитическую оценку y^* и качественную оценку данной альтернативы.

Для аналитической оценки эффективности иерархических структур применяется метод вложенных скалярных сверток. Композиция осуществляется по «принципу матрешки»: скалярные свертки взвешенных компонент векторных критериев низшего уровня служат компонентами векторных критериев высшего уровня. Скалярная свертка критериев, полученная на самом верхнем уровне, автоматически становится выражением для оценки эффективности всей иерархической системы в целом.

Алгоритм решения задачи методом вложенных скалярных сверток представляется последовательностью операций взвешенной скалярной свертки векторных критериев каждого уровня иерархии с учетом векторов приоритета на основе выбранной схемы компромиссов:

$$\{(y^{(j-1)}, \; p^{(j-1)}) \to y^{(j)}\}_{j \in [2, m]},$$

а поиск оценки эффективности всей иерархической системы в целом выражается задачей определения скалярной свертки верхнего уровня иерархии: $y^* = y^{(m)}$.

Если критерии (j-1)-го уровня нормированы по формуле $y_0 = y/A$, то выражение для оценки k-го свойства ситуации на j-м уровне иерархии с применением нелинейной схемы компромиссов имеет вид

$$y_k^{(j)} = \sum_{i=1}^{n_k^{(j-1)}} p_{ik}^{(j-1)} [1 - y_{0ik}^{(j-1)}]^{-1}, \; k \in [1, n^{(j)}], \; j \in [2, m],$$

где $y_{0ik}^{(j-1)}$ — компоненты нормированного вектора $y_0^{(j-1)}$, участвующие в оценке k-го свойства ситуации на j-м уровне иерархии; $n_k^{(j-1)}$ — их количество; $n^{(j)}$ — число оцениваемых свойств на j-м уровне.

Определение коэффициентов приоритета p на каждом уровне иерархии может быть выполнено методом экспертных оценок по шкале баллов.

Для того чтобы эта формула отражала идею метода вложенных скалярных сверток в соответствии с приведенной выше рекуррентной формулой, необходимо полученное выражение нормировать, т.е. получить относительный критерий $y_{0k}^{(j)} \in [0; 1]$ такой, чтобы он был минимизируемым, а его предельная величина была единицей. В работах [5, 6] рассмотрены вопросы такой нормировки и окончательное выражение для рекуррентной формулы расчета аналитических оценок свойств альтернатив на всех уровнях иерархии приобретает вид

$$y_{0k}^{(j)} = 1 - \{ \sum_{i=1}^{n_k^{(j-1)}} p_{ik}^{(j-1)} [1 - y_{0ik}^{(j-1)}]^{-1} \}^{-1}, \; k \in [1, n^{(j)}], \; j \in [2, m] .$$

Многокритериальные задачи оценивания

В отличие от задач оптимизации, многокритериальное оценивание относится к классу задач анализа. Здесь свертка (1) или (3) не целевая, а оценочная функция, и ее величина количественно выражает меру качества многокритериального объекта при заданных значениях аргументов x.

При многокритериальном оценивании альтернатив часто возникает необходимость получения не только аналитической, но и качественной оценки. Качественная (лингвистическая) оценка альтернативы получается сопоставлением нормированной аналитической оценки с вербально-числовой шкалой Харрингтона [7]. Шкала Харрингтона является характеристикой степени выраженности критериального свойства и имеет универсальный характер. Числовые значения градаций получены на основе анализа и обработки большого массива статистических данных. Вербально-числовая шкала Харрингтона представлена в таблице. Здесь показана связь между качественными градациями свойств объектов и соответствующими нормированными количественными оценками y_0.

Таблица

Описание градаций	Численное значение y_0
Очень высокая	0,8–1,0
Высокая	0,64–0,8
Средняя	0,37–0,64
Низкая	0,2–0,37
Очень низкая	0,0–0,2

Можно считать, что в терминах теории нечетких множеств [8] вербально-числовая шкала выступает как универсальная функция принадлежности для перехода от числа к соответствующей качественной градации и обратно. Осуществляется переход от лингвистической переменной (средняя, высокая оценка и пр.) к соответствующим количественным оценкам по шкале баллов, т.е. переход от нечетких качественных градаций к числам и обратно.

Оценка альтернатив по единой вербально-числовой шкале Харрингтона дает возможность решать многокритериальные задачи, кроме традиционных постановок, и в том случае, когда требуется выбрать альтернативу из множества неоднородных альтернатив, для которых нельзя сформулировать единое множество количественных критериев оценки, а также для оценки единственной (уникальной) альтернативы.

Изложенный материал представляет собой теоретическую основу концепции нелинейной схемы компромиссов. Использование ее в практических приложениях дает возможность решать многокритериальные задачи оптимизации и оценивания в различных предметных областях.

А.М. Воронін

КОНЦЕПЦІЯ НЕЛІНІЙНОЇ СХЕМИ КОМПРОМІСІВ В БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ЗАДАЧАХ

Викладено теоретичні основи концепції нелінійної схеми компромісів в багатокритеріальних задачах оцінювання і оптимізації. Запропоновано принцип оптимальності «подалі від обмежень» — розглядаються як бажані ті рішення, при яких часткові критерії найбільш віддалені від своїх гранично допустимих значень. На цій основі проблема вибору традиційних схем компромісів трансформується в необхідність побудови єдиної універсальної скалярної згортки критеріїв, адекватної заданій ситуації.

A.N. Voronin

THE CONCEPT OF NONLINEAR TRADE-OFF SCHEMES IN MULTICRITERIA PROBLEMS

The theoretical basis is considered of the concept of nonlinear trade-off scheme in multicriteria problems of estimation and optimization. The principle of optimality «out of limits» is proposed — those decisions are regarded as preferred in which the partial criteria are the furthest from their maximum permissible values. On this basis, the problem of selection of traditional schemes of compromise is transformed into the task of building a single universal scalar convolution of criteria appropriate to given situation.

1. *Губанов В.А., Захаров В.В., Коваленко А. Н.* и др. Введение в системный анализ. — Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1988. — 232 с.
2. *Фишберн П.С.* Теория полезности для принятия решений. — М.: Наука, 1978. — 352 с.
3. *Ларичев О.И.* Наука и искусство принятия решений. — М.: Наука, 1979. — 200 с.
4. *Charnes A., Cooper W.* Management models and industrial applications of linear programming. — New York: Wiley, 1961. — 240 p.
5. *Воронин А.Н., Зиатдинов Ю.К.* Теория и практика многокритериальных решений: модели, методы, реализация. — Lambert : Academic Publishing, 2013. — 305 с.
6. *Voronin A.N.* Hierarchy of emergent properties of alternatives in decision-making theory // International Journal for Research in Mathematics and Mathematical Sciences. — 2016. — **2**, N 3. — P. 1–18.
7. *Литвак Б.Г.* Экспертные технологии в управлении. — М.: Дело, 2004. — 400 с.
8. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. — М.: Мир, 1976. — 165 с.

Получено 08.04.2016