

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ И РЕЖИМОВ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ДВУНОГОГО ШАГАЮЩЕГО РОБОТА

### Введение

Среди показателей качества функционирования автономных шагающих роботов важное место занимает уровень энергопотребления. Ограниченность энергетических ресурсов при движении таких систем приводит к поиску рациональных параметров конструкций и режимов управления, обеспечивающих низкое энергопотребление [1]. Эффективным подходом, позволяющим обоснованно рассчитать указанные характеристики, является математическое моделирование и оптимизация (оптимизационное проектирование [2]). В связи с этим разработка математических моделей шагающих роботов и создание на их основе алгоритмов расчета конструкций и управлений являются актуальными задачами в области проектирования мобильных робототехнических комплексов.

Задачи оптимизации управляемых движений двуногих шагающих роботов в различных постановках исследовались в ряде работ [3–28]. В монографиях [3–7] отображены результаты разносторонних исследований проблем динамики и управления движением механических систем, моделирующих ходьбу двуногих роботов. В [11, 12] решена задача оптимального управления движением пятизвенного двуножного шагающего робота (без стоп). Оптимальное управление построено с помощью принципа максимума Понтрягина и численных процедур решения двухточечных краевых задач. Исследования [7, 13, 14] посвящены импульсным управлениям в задачах оптимизации ходьбы двуногих роботов. Здесь динамика роботов рассчитывается в рамках пятизвенной и семизвенной (с невесомыми стопами) моделей, учитываются одноопорные и мгновенные двухопорные фазы ходьбы, энергозатраты оцениваются интегралом от модулей механической мощности в шарнирах системы. Приведены оценки энергозатрат на перемещение системы при импульсных воздействиях. В [15] оптимальное управление ходьбой двуножного робота ищут в классе кусочно-постоянных функций. Предложен алгоритм построения программных управлений, которые при фиксированных длине и продолжительности фаз движения невесомых стоп перемещают систему с заданного начального положения в конечное состояние с минимизацией функционала энергозатрат. Алгоритм базируется на методике дискретизации времени движения системы, в результате чего исходная задача оптимального управления сводится к задаче нелинейного программирования. Аналогичный подход применен в [16] при решении задачи оптимального управления ходьбой двуножного робота. Здесь робот моделируется системой семи твердых тел (корпус и две трехзвенные нижние конечности), движение исследуют в сагиттальной плоскости, при этом учитываются одно- и двухопорные фазы перемещения однозвенных стоп. Оптимальное управление построено методами параметрической оптимизации: обобщенные координаты системы аппроксимируются сплайнами четвертого порядка с неизвестными коэффициентами, что сводит исходную задачу управления к задаче нелинейного программирования. Метод параметрической оптимизации (в классе кубических сплайнов) используется также в [17] для построения оптимальных режи-

мов движения четырехзвенной модели двуногого шагающего робота. Авторы статьи [18] оптимизацию ходьбы двуногого робота (корпус и две трехзвенные телескопические конечности) проводят с учетом динамики электромеханических приводов управления. Здесь в качестве управляющих воздействий используют электрические напряжения в обмотках двигателей, а критерий оптимальности выступает как максимальное значение тока. Оптимальное управление строится в два этапа: сначала в классе кусочно-постоянных функций ищут оптимальное программное управление, после чего методами периодической оптимизации синтезируют стабилизирующий регулятор. Алгоритм оптимизации управляемых движений двуногого электромеханического робота (в рамках шестизвенной модели) [19] базируется на методике параметризации обобщенных координат конечными рядами Фурье и численных процедурах нелинейного программирования. Здесь же предложен алгоритм решения задачи совместной оптимизации параметров пассивных приводов (торсионных пружин в шарнирах) робота и законов его движения. Исследованию задач совместной оптимизации конструктивных параметров и законов управления движением двуногих роботов посвящены статьи [20, 21]. В [20] численными расчетами показано, что при надлежащем выборе параметров пассивных приводов (последовательно соединенных пружин) в коленных шарнирах робота его ходьбу можно обеспечить активными управляющими воздействиями в тазобедренных и голеностопных шарнирах. В [21] робот моделируют плоской системой семи твердых тел, ходьбу исследуют в рамках симметричной походки с одноопорными фазами движения. Предполагается, что масса каждого звена сосредоточена в соответствующей точке, расстояние к которой используют в качестве оптимизируемого параметра. Угловые координаты звеньев робота параметризуют полиномами 4-го порядка, коэффициенты которых также оптимизируются. Для решения полученной задачи нелинейного программирования используют генетический алгоритм. В статье [22] исследуют задачу оптимизации масс-инерционных параметров двуногого шагающего аппарата, представленного в виде двух физических маятников с одной точкой подвеса (циркуль). Аппарат под действием сил тяжести перемещается по наклонной плоскости. В качестве целевой функции используют максимальное значение скорости и устойчивости. Методами численной оптимизации исследовано пространство параметров системы и определено их влияние на скорость, устойчивость и длительность цикла ходьбы.

Ниже исследуем задачу совместной оптимизации конструктивных параметров (длины и массы звеньев ног) и законов движения двуногого антропоморфного робота. Робот под действием управлений (моментов сил в шарнирах) шагает по неподвижной горизонтальной плоскости. Ходьбу робота моделируем на интервале двойного шага, при этом учитываем кинематические условия антропоморфного перемещения двухзвенных стоп: перекаат через пятку, опора на всю стопу, плюснефаланговый перекаат, перекаат через носок, перенос стопы над опорной плоскостью. На опорные реакции стоп накладываем двухсторонние нестационарные ограничения (антропоморфного характера). Звенья ног робота оптимизируем при условии постоянства длины и массы каждой ноги, в качестве критерия оптимальности используем квадратичный (по управлениям) функционал. Целью исследования является анализ влияния длины и массы звеньев ног робота на характеристики его движения. Построен алгоритм приближенного решения сформулированной задачи, основанный на параметризации обобщенных координат робота кубическими сглаживающими сплайнами и использовании численных процедур нелинейного программирования. Данная статья является дальнейшим развитием параметрической методики в задачах оптимизации шагающих антропоморфных систем [23–28].

## 1. Механико-математическая модель двуногого робота

Рассмотрим двуногой робот, шагающий по неподвижной горизонтальной плоскости. Ограничимся исследованием движений робота в вертикальной плоскости  $OXY$  в направлении оси  $OX$  (рис. 1). Для моделирования движений робота используем плоскую систему девяти твердых тел: корпус  $NG$  и две четырехзвенные нижние конечности, представленные телами  $NK_i$ ,  $K_iA_i$ ,  $A_iH_iM_i$ ,  $M_iS_i$ ,  $i = 1, 2$ . Тела связаны между собой идеальными цилиндрическими шарнирами  $N$ ,  $K_i$ ,  $A_i$ ,  $M_i$ ,  $i = 1, 2$ . Стопы считаем безынерционными, а их массы — сосредоточенными в шарнирах  $A_1, A_2$ . Движение системы происходит под действием управляющих моментов сил  $q_i$ ,  $u_i$ ,  $p_i$ ,  $w_i$ , приложенных в шарнирах  $N$ ,  $K_i$ ,  $A_i$ ,  $M_i$  соответственно, сил реакций опорной плоскости и силы тяжести,  $i = 1, 2$ .

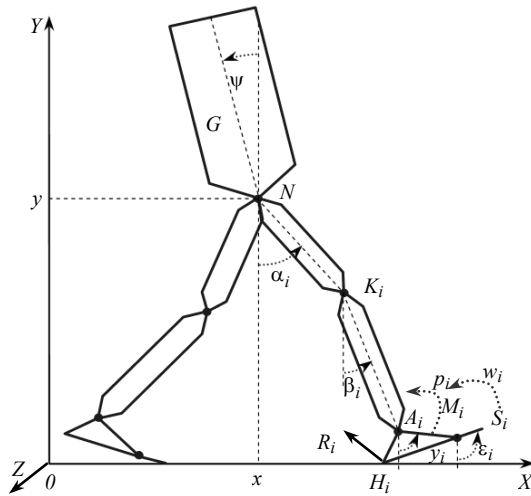


Рис. 1

$7 \times 11$ ,  $7 \times 11$ ,  $7 \times 12$ ,  $4 \times 12$  соответственно;  $\mathbf{g}$  — вектор размерности 7;  $\mathbf{b} = (\xi_1^2, \xi_2^2, \dots, \xi_{11}^2)$ ,  $\mathbf{f} = (q_1, q_2, u_1, u_2, p_1, p_2, w_1, w_2, R_{1x}, R_{1y}, R_{2x}, R_{2y})$ ;  $R_{ix}$ ,  $R_{iy}$ ,  $x_{Ri}$  — координаты главного вектора  $\mathbf{R}_i$  сил реакций опорной плоскости и абсцисса точки его приложения в системе отсчета  $OXY$ ,  $i = 1, 2$ . Компоненты матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{S}$  и вектора  $\mathbf{g}$  можно получить из приведенной в [23–26] развернутой записи соотношений (1), (2). Точкой сверху над переменными обозначено дифференцирование по времени  $t$ . Отметим, что векторное соотношение (1) — уравнения Лагранжа второго рода, описывающие динамику весомых звеньев двуногого робота [29]. Система алгебраических уравнений (2) выражает условия кинестатического равновесия безынерционных стоп.

Ходьбу робота исследуем на интервале двойного шага в предположении периодичности и антропоморфности походки. Обозначим  $T_i$  и  $L_i$  продолжительность и длину шага  $i$ -й ноги,  $i = 1, 2$ ;  $T = T_1 + T_2$  — продолжительность двойного шага. Требование антропоморфности походки приводит к естественной последовательности фаз движения стоп: перекал через пятку  $H_i$ , опора на всю стопу  $H_iM_iS_i$ , опора на фаланги  $M_iS_i$ , перекал через носок  $S_i$ , перенос стопы над опорной поверхностью. Зададим на интервале двойного шага  $[0, T]$  параметры

Уравнения движения робота можно представить в виде следующей системы дифференциальных и алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}(\xi)\ddot{\xi} + \mathbf{B}(\xi)\mathbf{b}(\dot{\xi}) + \mathbf{g}(\xi) = \mathbf{C}(\xi)\mathbf{f}, \quad (1)$$

$$\mathbf{S}(\xi, x_{R1}, x_{R2})\mathbf{f} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\xi = (x, y, \psi, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$  — вектор обобщенных координат механической системы ( $x, y$  — координаты точки  $N$  в инерциальной системе отсчета  $OXY$ ;  $\psi, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \varepsilon_i$  — углы отклонения тел  $NG, NK_i, K_iA_i, A_iH_iM_i, M_iS_i$  от вертикали);  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{S}$  — матрицы размерностей

длительности фаз для 1-й стопы:  $t \in [0, \tau_{h1})$  — перекал через пятку;  $t \in [\tau_{h1}, \tau_{m1})$  — опора на всю стопу;  $t \in [\tau_{m1}, T_1]$  — плюснефаланговый перекал;  $t \in (T_1, \tau_{s1})$  — перекал через носок;  $t \in [\tau_{s1}, T)$  — перенос стопы над поверхностью опоры. Аналогично определим фазы движения 2-й стопы:  $t \in (0, \tau_{s2})$  — перекал через носок;  $t \in [\tau_{s2}, T_1)$  — перенос стопы;  $t \in [T_1, \tau_{h2})$  — перекал через пятку;  $t \in [\tau_{h2}, \tau_{m2})$  — опора на всю стопу;  $t \in [\tau_{m2}, T]$  — плюснефаланговый перекал.

Антропоморфность походки робота накладывает ряд условий на движение стоп [30]:

а) ритмические условия на длительность фаз перемещения стоп

$$0 < \tau_{s2} < \tau_{m1} < T_1 < \tau_{s1} < \tau_{m2} < T; \quad (3)$$

б) кинематические условия контакта точек стопы  $H_i$ ,  $M_i$ ,  $S_i$  с опорной поверхностью

$$\begin{aligned} x_{hi}(t) &\equiv x_{hi}^0, \quad y_{hi}(t) \equiv 0, \quad y_{si} > y_{mi} > 0, \quad t \in [\tau_i, \tau_{hi}), \\ x_{hi}(t) &\equiv x_{hi}^0, \quad y_{hi}(t) \equiv y_{mi}(t) \equiv y_{si}(t) \equiv 0, \quad t \in [\tau_{hi}, \tau_{mi}), \\ x_{mi}(t) &\equiv x_{mi}^0, \quad y_{hi} > 0, \quad y_{mi}(t) \equiv y_{si}(t) \equiv 0, \quad t \in [\tau_{mi}, \tau_{1+i}], \\ x_{si}(t) &\equiv x_{si}^0, \quad y_{hi} > y_{mi} > 0, \quad y_{si}(t) \equiv 0, \quad t \in (\tau_{3-i}, \tau_{si}), \\ y_{hi} &> 0, \quad y_{mi} > 0, \quad y_{si} > 0, \quad t \in [\tau_{si}, \tau_{4-i}), \quad i = 1, 2; \end{aligned} \quad (4)$$

в) условия динамического характера (свободное опирание, положение точки  $x_{Ri}$ , непроскальзывание стоп)

$$\begin{aligned} R_{iy} > 0, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \cup [\tau_{3-i}, \tau_{si}), \quad R_{iy}(t) \equiv R_{ix}(t) \equiv 0, \quad t \in [\tau_{si}, \tau_{4-i}), \\ x_{hi} \leq x_{Ri} \leq x_{si}, \quad t \in [\tau_i, \tau_{mi}), \quad x_{mi} \leq x_{Ri} \leq x_{si}, \quad t \in [\tau_{mi}, \tau_{1+i}) \cup [\tau_{3-i}, \tau_{si}), \\ |R_{ix}| \leq \chi |R_{iy}|, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $(x_{hi}, y_{hi})$ ,  $(x_{mi}, y_{mi})$ ,  $(x_{si}, y_{si})$  — координаты точек  $H_i$ ,  $M_i$ ,  $S_i$  в системе отсчета  $OXY$ ,  $x_{mi}^0 = x_{hi}^0 + l_1$ ,  $x_{si}^0 = x_{mi}^0 + l_2$ ,  $x_{h2}^0 = x_{h1}^0 + L_1$ ,  $l_1 = |H_1M_1| = |H_2M_2|$ ,  $l_2 = |M_1S_1| = |M_2S_2|$ ,  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = T_1$ ,  $\tau_3 = T$ ;  $\chi$  — коэффициент трения между стопой и опорной поверхностью.

Зададим условия периодичности движения системы, а также условия взаимного размещения стоп в начальный  $t = 0$  и конечный  $t = T$  моменты времени

$$\xi(T) = \xi(0) + \mathbf{L}, \quad \dot{\xi}(T) = \dot{\xi}(0),$$

$$x_{m2}(0) = x_{h1}^0 + l_1 - L_1, \quad y_{m2}(0) = 0, \quad x_{h1}(T) = x_{h1}^0 + L, \quad y_{h1}(T) = 0. \quad (6)$$

Здесь  $L = (L, 0, \dots, 0)$  — вектор размерности 11;  $L = L_1 + L_2$  — длина двойного шага.

Для определенности в соотношениях (4), (6) зададим  $x_{h1}^0 = 0$ .

## 2. Оптимизация параметров звеньев и законов движения робота

Рациональным подходом к снижению уровня потребляемой энергии при ходьбе рассматриваемого робота представляется оптимизация его конструктивных параметров и законов управления движением [2]. Задачу оптимизации параметров и законов управления двуногого робота исследуем в предположении, что звенья ног представляют собой полые цилиндры длиной  $a = |NK_1| = |NK_2|$ ,

$b = |K_1 A_1| = |K_2 A_2|$  с внутренними  $d_a, d_b$  и внешними  $D_a, D_b$  диаметрами и плотностью материалов  $\rho_a, \rho_b$  соответственно (ноги идентичны). Варьировать параметры звеньев будем при условии постоянства (для каждой ноги) их суммарных длины и массы, а также соотношений диаметров:

$$a + b = l^0, m_a + m_b = m^0, d_a / D_a = \omega_a^0, d_b / D_b = \omega_b^0. \quad (7)$$

Здесь  $m_a = \pi a \rho_a (D_a^2 - d_a^2) / 2$ ,  $m_b = \pi b \rho_b (D_b^2 - d_b^2) / 2$  — массы звеньев  $NK_1$  ( $NK_2$ ) и  $K_1 A_1$  ( $K_2 A_2$ );  $l^0, m^0, \omega_a^0, \omega_b^0$  — заданные величины. В качестве оптимизируемых переменных выберем безразмерные параметры  $\mu = a / l^0$ ,  $\nu = m_a / m^0$ , на которые наложим ограничения

$$\mu^0 \leq \mu \leq \mu^1, \nu^0 \leq \nu \leq \nu^1. \quad (8)$$

Здесь  $\mu^0, \mu^1, \nu^0, \nu^1$  — заданные безразмерные величины:  $0 < \mu^0 \leq \mu^1 < 1$ ,  $0 < \nu^0 \leq \nu^1 < 1$ . Заметим, что из (7) следуют выражения  $b = (1 - \mu)l^0$ ,  $m_b = (1 - \nu)m^0$ .

Предположим также, что заданы нестационарные ограничения на компоненты главного вектора опорных реакций  $\mathbf{R}_i$ :

$$R_{ix}^0(t) \leq R_{ix}(t) \leq R_{ix}^1(t), R_{iy}^0(t) \leq R_{iy}(t) \leq R_{iy}^1(t), t \in [0, T], i = 1, 2. \quad (9)$$

Здесь  $R_{ix}^{0,1}(t), R_{iy}^{0,1}(t)$  — заданные на  $[0, T]$  функции. С учетом требования антропоморфности походки робота эти функции могут быть построены, например, с помощью среднестатистических данных экспериментальных биомеханических исследований ходьбы человека [31].

Обозначим  $\mathbf{u} = (q_1, q_2, u_1, u_2, p_1, p_2, w_1, w_2)$  вектор управляющих воздействий робота,  $\mathbf{c} = (\mu, \nu)$  — вектор оптимизируемых конструктивных параметров,  $\mathbf{c} \in \Delta$ , где  $\Delta$  — множество допустимых значений параметров, удовлетворяющих ограничениям (7), (8). Пусть заданы длины  $L_1, L_2$  и продолжительности  $T_1, T_2$  односторонних шагов. Возможна постановка следующей задачи оптимизации.

**Задача 1.** Определить такие параметры системы  $\mathbf{c}^* \in \Delta$  и ее движение  $\xi^*(t)$  (а также соответствующее управление  $\mathbf{u}^*(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , которые с учетом уравнений (1), (2) и условий (3)–(6), (9) минимизируют функционал

$$P = \frac{1}{L} \int_0^T \left[ \sum_{i=1}^2 (q_i^2(t) + u_i^2(t) + p_i^2(t) + w_i^2(t)) \right] dt. \quad (10)$$

Квадратичный функционал (10) часто используют в задачах оптимального управления манипуляционными системами [2]. В случае, когда управление системой осуществляется с помощью электромеханических приводов (с электродвигателями постоянного тока с независимым возбуждением), функционал (10) характеризует количество тепла, которое выделяется в обмотках электродвигателей [32].

Сформулированная задача — задача совместной оптимизации параметров конструкции и законов управления движением, т.е. имеем задачу оптимального управления с параметрами. Отметим некоторые особенности этой задачи. Исследуемая механическая система характеризуется существенной нелинейностью

уравнений движения и взаимной зависимостью движений для различных обобщенных координат. Также на принятой последовательности ритмических фаз система имеет изменяемое число степеней свободы, а на двухпорных фазах ( $t \in \Lambda = [0, \tau_{s2}) \cup [T_1, \tau_{s1})$ ) она статически неопределима. Все это, а также наличие ограничений (3)–(6), (9) существенно усложняют непосредственное применение методов теории оптимального управления для решения этой задачи.

Эффективной в исследовании задачи 1 является методика параметрической оптимизации. Данная методика базируется на идее метода Ритца для вариационных задач, согласно которой задачу об отыскании минимума функционала заменяют более простой задачей минимизации функции конечного числа переменных [2]. Опишем отдельные процедурные моменты этой методики. Более детально разработанный алгоритм параметрической оптимизации управляемых движений антропоморфной локомоторной системы описан в [25].

В соответствии с числом степеней свободы системы (на фазах движения) вводим множество независимо варьируемых функций  $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_5\}$ :

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{x(t), x_g(t), \eta_{K1}(t), \eta_{K2}(t)\}, t \in [0, T], \\ \Omega_2 &= \{\alpha_2(t), \gamma_1(t)\}, t \in [0, T_1], \\ \Omega_3 &= \{\alpha_1(t), \gamma_2(t)\}, t \in [T_1, T], \\ \Omega_4 &= \{\gamma_2(t), \eta_{M2}(t)\}, t \in [\tau_{s2}, T_1], \\ \Omega_5 &= \{\gamma_1(t), \eta_{M1}(t)\}, t \in [\tau_{s1}, T],\end{aligned}\tag{11}$$

где  $x_g = x(t) - r \sin \psi(t)$  — абсцисса центра масс корпуса  $NG$ ;  $r$  — расстояние от центра масс корпуса до шарнира  $N$ ;  $\eta_{Mi} = \varepsilon_i(t) - \gamma_i(t) - \varphi_{Mi}$  — угол в шарнире  $M_i$  между прямыми  $A_iM_i$  и  $M_iS_i$ ,  $\varphi_{Mi} = \angle A_iM_iH_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Функции множеств  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  аппроксимируем (параметризируем) кубическими сглаживающими сплайнами с неизвестными значениями (параметрами) в узлах дискретизации интервала времени движения системы [32]. Известно, что кубический сглаживающий сплайн  $S^f(t)$ , аппроксимирующий функцию  $f(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , определяется набором точек дискретизации  $\{\sigma_0^f, \sigma_1^f, \dots, \sigma_{n_f}^f\}$  интервала  $[t_0, t_1]$ , значениями функции  $f(t)$  в точках дискретизации  $\{z_0^f, z_1^f, \dots, z_{n_f}^f\}$  с соответствующими коэффициентами сглаживания  $\{\rho_0^f, \rho_1^f, \dots, \rho_{n_f}^f\}$ , а также граничными условиями вида

$$\dot{S}^f(\sigma_0^f) = \dot{S}^f(\sigma_{n_f}^f), \quad \ddot{S}^f(\sigma_0^f) = \ddot{S}^f(\sigma_{n_f}^f)\tag{12}$$

или

$$\dot{S}^f(\sigma_0^f) = a^f, \quad \dot{S}^f(\sigma_{n_f}^f) = b^f,\tag{13}$$

где  $n_f + 1$  — количество точек дискретизации интервала  $[t_0, t_1]$ ,  $\sigma_0^f = t_0$ ,  $\sigma_{n_f}^f = t_1$ .

Для каждой функции  $f \in \Omega$  коэффициенты  $\rho_0^f, \rho_1^f, \dots, \rho_{n_f}^f$  принимают фиксированные значения и являются постоянными параметрами алгоритма. Величины  $z_0^f, z_1^f, \dots, z_{n_f}^f, a^f, b^f$  определяем в ходе решения задачи, при этом часть их на-

ходим, удовлетворяя условиям (4) (кроме трех последних неравенств), (6), остальные используем в качестве оптимизируемых переменных. Ритмическим условиям (3) удовлетворяем конструктивно при построении функций  $\gamma_i(t)$ ,  $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ ,  $i = 1, 2$  [25]. При параметризации функций множества  $\Omega_1$  используем сплайны с граничными условиями (12), множеств  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  — сплайны с условиями (13).

Функции множеств  $\Omega_4$ ,  $\Omega_5$  описывают движение стоп на фазе переноса. С учетом предположения о безынерционности стоп зададим их движение на фазе переноса в следующем виде:

$$\gamma_i(t) \equiv [\gamma_i(\tau_{4-i}) - \gamma_i(\tau_{si})] \frac{t - \tau_{si}}{\tau_{4-i} - \tau_{si}}, \quad \eta_{Mi}(t) \equiv \eta_{Mi}(\tau_{si}) \frac{\tau_{4-i} - t}{\tau_{4-i} - \tau_{si}},$$

$$t \in [\tau_{si} - \tau_{4-i}], \quad i = 1, 2,$$

где момент времени завершения двухопорной фазы  $\tau_{si}$  вычисляем из положения точек  $A_i$ ,  $M_i$ ,  $S_i$  относительно прямой  $OX$ .

Статическую неопределимость системы на двух опорных фазах решаем путем доопределения (с помощью кубических Эрмитовых многочленов) функций  $x_{R1}(t)$ ,  $x_{R2}(t)$  и при  $t \in \Lambda$ ,  $R_{ix}(t)$  и  $t \in [\tau_{3-i}, \tau_{si}]$ ,  $i = 1, 2$ , по их значениям и значениям их первых производных в граничных точках на сопредельных одноопорных фазах. Указанные производные также добавляем ко множеству оптимизируемых переменных.

Дальше, используя подход обратных задач динамики, из уравнений (1), (2) находим параметрическое семейство управлений  $\mathbf{u}(t, \mathbf{c}, \mathbf{z})$ , где  $\mathbf{z}$  — вектор оптимизируемых переменных. После подстановки  $\mathbf{u}(t, \mathbf{c}, \mathbf{z})$  в выражение для функционала (11) получаем функцию многих переменных  $P(\mathbf{c}, \mathbf{z})$ . Условиям (4) (последние три неравенства), (5), (9) удовлетворяем с помощью процедуры внешних штрафных функций, предварительно преобразовав ограничения вида  $v^0(t) \leq v(t) \leq v^1(t)$  в интегральную форму [25]

$$V = \int_0^T [(v - v^1)_+ + (v^0 - v)_+] dt, \quad (14)$$

где  $(w)_+ = w$  при  $w \geq 0$  и  $(w)_+ = 0$  при  $w < 0$ .

Окончательно получаем задачу нелинейного программирования [34]

$$P(\mathbf{c}, \mathbf{z}) + \langle \lambda, \mathbf{V}(\mathbf{c}, \mathbf{z}) \rangle \xrightarrow{\mathbf{c} \in \Omega, \mathbf{z}} \min. \quad (15)$$

Здесь  $\lambda$  — вектор заданных штрафных коэффициентов, компоненты вектор-функции  $\mathbf{V}(\mathbf{c}, \mathbf{z})$  строим на основании представлений соответствующих условий задачи в форме (14). Кроме того, вектор  $\mathbf{V}(\mathbf{c}, \mathbf{z})$  содержит модули величин разрыва функций  $\ddot{j}(t)$ ,  $\ddot{\alpha}_1(t)$ ,  $\ddot{\alpha}_2(t)$  в моменты времени  $t=0, T_1, T$ , а также штраф за нарушение монотонности функций  $x_{R1}(t)$ ,  $x_{R2}(t)$ . Для решения полученной задачи используем численные процедуры минимизации функций конечного числа переменных, в частности, генетический алгоритм с действительным кодированием (как в последовательном [35], так и параллельном [36] вариантах). Представленный алгоритм решения задачи 1 реализован в виде комплекса программ (в программной среде Borland Delphi 7.0 [37]).

### 3. Численное решение задачи оптимизации ходьбы и конструкции робота

Опишем отдельные результаты численного решения задачи 1. Ходьбу робота исследуем в классе симметричных походок, где на интервале двойного шага одна нога повторяет движение другой. Для симметричной походки справедливы следующие соотношения:  $T_1 = T_2 = T/2$ ,  $L_1 = L_2 = L/2$ ,  $\tilde{\xi}_i(T_1 + t) = \tilde{\xi}_{3-i}(t) + \mathbf{L}_1$ ,  $\dot{\tilde{\xi}}_i(T_1 + t) = \dot{\tilde{\xi}}_{3-i}(t)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $t \in [0, T]$ , где  $\tilde{\xi}_i = (x, y, \psi, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \varepsilon_i)$ ,  $\mathbf{L}_1 = (L_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ . Заметим, что условие симметричности походки существенно (почти в два раза) уменьшает количество оптимизируемых переменных в (15).

Введем ряд обозначений:  $m$ ,  $J$  — масса и момент инерции тела  $NG$  относительно точки  $N$ ,  $m_{fi}$  — сосредоточенная в шарнире  $A_i$  суммарная масса стопы,  $i = 1, 2$ . Расчеты проводятся при следующих значениях параметров:  $m = 46,7$  кг,  $r = 0,39$  м,  $J = 7,1$  Нм<sup>2</sup>,  $m_{f1} = m_{f2} = 1,2$  кг,  $l_1 = 0,19$  м,  $l_2 = 0,1$  м,  $|A_1M_1| = |A_2M_2| = 0,17$  м,  $\varphi_{M1} = \varphi_{M2} = 38^\circ$ ,  $\rho_a = \rho_b = 7850$  кг/м<sup>3</sup>,  $\omega_a = \omega_b = 0,85$ ,  $\chi = 0,9$ . Длина и продолжительность одинарных шагов —  $L_1 = L_2 = 0,755$  м,  $T_1 = T_2 = 0,57$  с. В ограничениях на оптимизируемые конструктивные параметры (7), (8) задано  $l^0 = 1$  м,  $m^0 = 12,5$  кг,  $\mu^0 = v^0 = 0,1$ ,  $\mu^1 = v^1 = 0,9$ . Границы  $R_{ix}^{0,1}$ ,  $R_{iy}^{0,1}$  областей допустимых значений опорных реакций представлены согласно [31]. Параметры сплайн-аппроксимации принимают следующие значения:  $n_x = n_{x_g} = 25$ ,  $n_{\alpha_1} = n_{\alpha_2} = 14$ ,  $n_{\gamma_1} = n_{\gamma_2} = 21$ ,  $n_{\eta_{K1}} = n_{\eta_{K2}} = 12$ ,  $\rho^x = \rho^{x_g} = \rho^{\alpha_1} = \rho^{\alpha_2} = \rho^{\gamma_1} = \rho^{\gamma_2} = 0,01$ ,  $\rho^{\eta_{K1}} = \rho^{\eta_{K2}} = 0,0001$ . Общее количество параметров оптимизации составляет 85. Выполняем одну итерацию метода внешних штрафных функций, при этом штрафные коэффициенты в (15) заданы равными  $\lambda_{y_{hi}} = \lambda_{y_{mi}} = \lambda_{y_{si}} = \lambda_\chi = 10^7$ ,  $\lambda_{x_{Ri}} = 10^4$ ,  $\lambda_{R_{ix}} = 3600$ ,  $\lambda_{R_{iy}} = 2400$ . Коэффициенты штрафа в точках разрыва функций  $\ddot{y}(t)$ ,  $\ddot{\alpha}_1(t)$ ,  $\ddot{\alpha}_2(t)$  равняются  $10^3$ , коэффициент штрафа за нарушение монотонности функций  $x_{R1}(t)$ ,  $x_{R2}(t)$  —  $10^5$ . Для минимизации целевой функции (15) применяется гибридный генетический алгоритм с действительным кодированием [35, 36], в соответствии с которым размер популяции задан равным 900 особям, максимальное количество генераций — 500 (фактическое количество — 308), вероятность скрещивания хромосом — 0,95, вероятность скрещивания мутаций — 0,85. Точность по значению целевой функции задана равной 0,1. Расчеты проводятся на компьютере с процессором Intel Core I7-3610QM (2,3 ГГц, 8 ГБ ОЗУ, Windows 10 Pro), при этом время решения задачи 1 составляет 55 мин. (8 потоков) — параллельный алгоритм, 250 мин. — последовательный алгоритм.

В результате решения задачи 1 получены оптимальные значения параметров  $\mu^* = 0,508$ ,  $v^* = 0,9$ , которым соответствуют линейные размеры звеньев ног:  $a^* = 0,508$  м,  $b^* = 0,492$  м,  $D_a^* = 0,11$  м,  $d_a^* = 0,094$  м,  $D_b^* = 0,038$  м,  $d_b^* = 0,032$  м. При этом минимальное значение функционала (10) равно  $P^* = 5239$ . Заметим, что в расчетных моделях опорно-двигательного аппарата человека часто используют следующие среднестатистические значения длины бедра и голени:  $a = 0,245 H$ ,  $b = 0,246 H$ , где  $H$  — рост человека, что приводит к безразмерной величине



$\bar{\mu} = a/(a+b) = 0,499$  [38]. Видим, что для рассматриваемой модели робота полученное оптимальное  $\mu^*$  близко (в пределах погрешности 1,8 %) к общепринятому значению  $\bar{\mu}$ . Добавим также, что в процессе минимизации функционала (10) его значение заметно уменьшилось (приблизительно в 5 раз), что свидетельствует о сравнительно сильной зависимости функционала от управляющих воздействий исследуемой системы.

Построенный оптимальный закон движения робота характеризуется ритмическими параметрами:  $\tau_{h1} = 0,09T$ ,  $\tau_{m1} = 0,36T$ ,  $\tau_{s1} = 0,60T$ ,  $\tau_{h2} = 0,59T$ ,  $\tau_{m2} = 0,86T$ ,  $\tau_{s2} = 0,10T$ . Соответствующие графические зависимости (от времени  $t$ ) кинематических и динамических характеристик оптимального процесса изображены на рис. 2–9 (жирные линии). Здесь время  $t$  выражено в процентах относительно продолжительности двойного шага, углы — в градусах, динамические характеристики отнесены к суммарной массе робота (74,1 кг) и представлены так: моменты — в Нм/кг, реакции — в Н/кг. Для сравнения здесь же тонкими линиями приведены границы допустимых областей изменения соответствующих величин, характерные для ходьбы человека [31]. На рис. 2–4 показаны графики межзвенных углов  $\eta_{N1} = \alpha_1(t) - \psi(t)$ ,  $\eta_{K1} = \alpha_1(t) - \beta_1(t)$ ,  $\eta_{A1} = \gamma_1(t) - \beta_1(t) + \varphi_{M1} - 90^\circ$  в шарнирах  $N$ ,  $K_1$ ,  $A_1$ , на рис. 5–7 — графики моментов сил  $q_1$ ,  $u_1$ ,  $p_1$ , на рис. 8, 9 — графики опорных реакций  $R_{1x}$ ,  $R_{1y}$ . Из графиков видно, что полученные в результате решения задачи 1 моменты сил хорошо согласуются (в пределах относительной погрешности 5,3%) со среднестатистическими (антропометрическими) границами изменения этих величин. Здесь относительную погрешность в сравнении кривых вычисляем как отношение площади фигуры за пределами граничных кривых к площади соответствующей допустимой области. Заметим, что в задаче 1 ограничения (в виде двухсторонних границ) изначально накладывались только на опорные реакции  $R_{1x}$ ,  $R_{1y}$ , что проиллюстрировано на рис. 8, 9. Добавим также, что для межзвенных углов (рис. 2–4) относительная погрешность возрастает (по сравнению с динамическими характеристиками). Однако качественное поведение полученных кинематических характеристик ходьбы двуногого робота совпадает с поведением кинематических характеристик ходьбы человека.

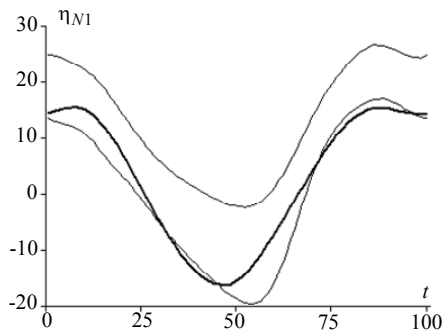


Рис. 2

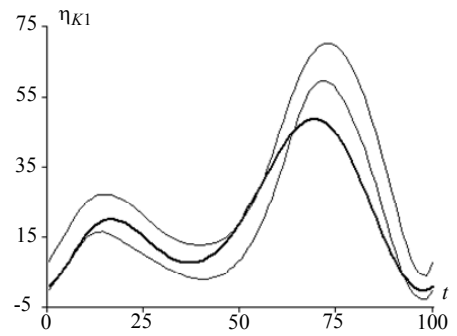


Рис. 3

Для исследования влияния конструктивных параметров звеньев ног робота на энергетические характеристики его движения проводилась минимизация функционала (11) при фиксированных значениях вектора параметров  $\mathbf{c} \in \Theta = \{(0,1j, 0,1k), j, k = 1, 2, \dots, 9\}$ . Рассматривалась следующая задача (в классе симметричных походок с заданными  $L_1$  и  $T_1$ ).

**Задача 2.** При фиксированных значениях  $\mathbf{c} \in \Theta$  определить движение системы  $\xi^*(t)$  (и соответствующее управление  $\mathbf{u}^*(t)$ ),  $t \in [0, T]$ , минимизирующее с учетом уравнений (1), (2) и ограничений (3)–(6), (9) функционал (10):  $\mathbf{P}_* = \min_{\xi(t)} \mathbf{P}$ .

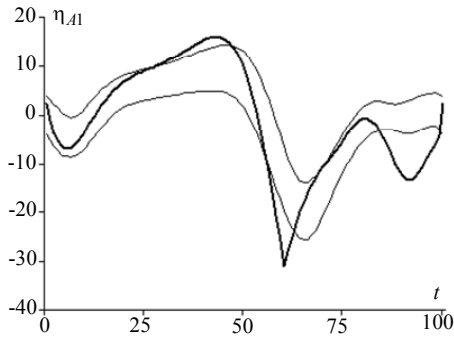


Рис. 4

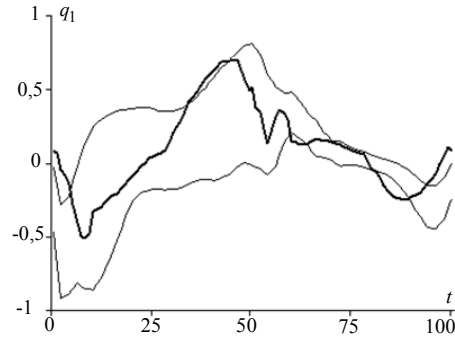


Рис. 5

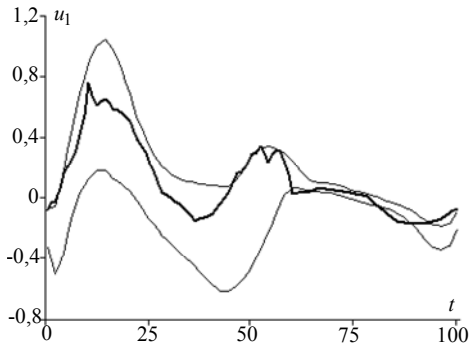


Рис. 6

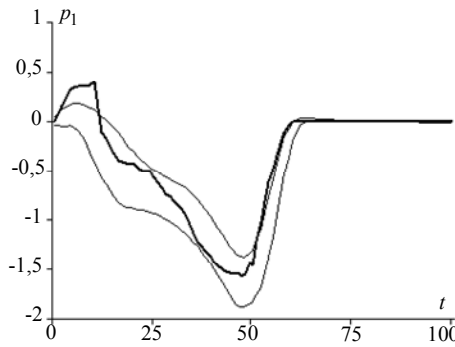


Рис. 7

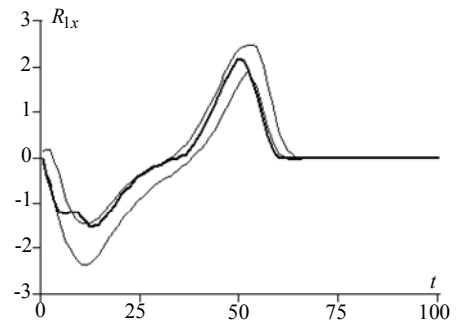


Рис. 8

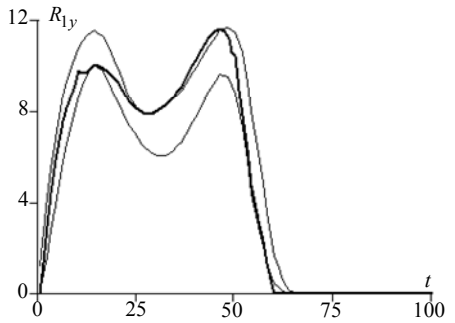


Рис. 9

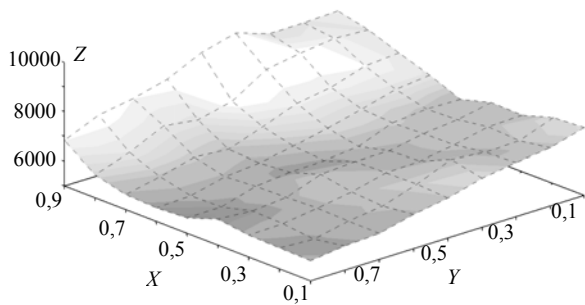


Рис. 10

Алгоритм решения задачи 2 аналогичен алгоритму решения задачи 1. На рис. 10 приведено распределение минимальных значений функционала (10) на дискретной сетке значений вектора параметров  $\mathbf{c} \in \Theta$ . Здесь в направлении оси  $X$  отмечены зна-

чения параметра  $\mu$ , в направлении оси  $Y$  — параметра  $\nu$ , в направлении оси  $Z$  — величины  $P_*$ . Как свидетельствуют расчеты, эти параметры существенно влияют на энергозатраты (10) при ходьбе двуногого робота. В частности, для рассматриваемого робота распределение минимальных энергозатрат  $P_*$  на сетке  $\Theta$  следующее: минимальное значение  $\min_{c \in \Omega} P_* = 5337$  достигается при  $\mu = 0,6$ ,  $\nu = 0,9$ ; максимальное значение  $\max_{c \in \Omega} P_* = 9224$  — при  $\mu = 0,9$ ,  $\nu = 0,4$ ; среднее значение  $\bar{P}_* = 6769$ ; медиана  $\tilde{P}_* = 6691$ . Полученные численные результаты показывают, что при распределении массы звеньев ног антропоморфного робота (на этапе его проектирования) целесообразно массу голени уменьшить.

### Заключение

Сформулирована задача совместной оптимизации конструктивных параметров и законов движения двуногого шагающего робота антропоморфного типа, предложен алгоритм построения субоптимального решения задачи, базирующийся на методике параметрической оптимизации. Алгоритм реализован в виде соответствующего программного комплекса, с помощью которого проведена серия численных экспериментов. На примере конкретной механической модели двуногого робота с помощью численных расчетов показано, что конструктивные параметры (в частности, длина и масса) звеньев ног существенно влияют на энергозатраты при ходьбе. Полученные данные свидетельствуют о целесообразности поиска рациональных параметров звеньев ног робота, что позволяет значительно понизить уровень энергозатрат при ходьбе. Предложенные математическая модель, алгоритм и программа могут быть использованы как элементы оптимизационных средств (обеспечения) в системах автоматизированного проектирования шагающих роботов.

Перспективным в дальнейших исследованиях представляется решение задач оптимизации двуногих шагающих роботов с учетом конкретизации моделей управляющих воздействий, например электромеханических приводов, пружинно-демпферных устройств (пассивные приводы), взаимодействий (и взаимозаменяемости) активных и пассивных приводов.

*М.В. Демидюк, Б.А. Литвин*

### ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ТА РЕЖИМІВ КЕРУВАННЯ РУХОМ ДВОНОГОГО КРОКУЮЧОГО РОБОТА

Досліджено задачу спільної оптимізації конструктивних параметрів (довжини та маси ланок) та законів руху двоногого антропоморфного робота. Робот під дією керуючих зусиль у шарнірах ніг крокує по нерухомій горизонтальній площині. Ходу робота змодельовано на інтервалі подвійного кроку (у класі симетричної ходи) із врахуванням основних ритмічних, кінематичних та динамічних обмежень антропоморфного переміщення. На опорні реакції стоп накладаємо двосторонні нестационарні обмеження. Ланки робота оптимізовано за умови сталості довжини й маси кожної ноги, за критерій оптимальності використано квадратичний функціонал. Побудовано алгоритм наближеного розв'язання досліджуваної задачі оптимального керування (з параметрами), який ґрунтується на параметризації узагальнених координат робота кубічними згладжувальними сплайнами та використанні чисельних процедур нелінійного математичного програмування.

## OPTIMIZATION OF THE PARAMETERS AND MOTION CONTROL MODES OF THE BILEGGED LOCOMOTION ROBOT

This study investigates the problem of joint optimization of the bipedal anthropomorphic robot's design parameters (length and masses of the links) and motion laws. The robot walks over a fixed horizontal plane under controlled force actions in the leg joints. The robot gait is modeled for a double stride period (in the class of symmetrical walking) with limitations, subject to the general rhythmic, kinematical and dynamical restrictions of the anthropomorphic movement. The robot's links are optimized for the given constant length and mass of each leg, using the quadratic functional as the optimality criteria. The bilateral nonstationary restrictions are subjected to the ground reaction forces. An algorithm for approximate solving of the considered optimal control problem (with parameters) that is based on the parameterization of the robot's generalized coordinates utilizing cubic smoothing splines and numerical nonlinear mathematical programming procedures is built.

1. *Павловский В.Е.* О разработках шагающих машин // Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2013. — № 101. — 32 с.
2. *Болотник Н.Н., Черноусько Ф.Л.* Оптимизация управления манипуляционными роботами // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1990. — № 1. — С. 189–238.
3. *Белецкий В. В.* Двухногая ходьба : модельные задачи динамики и управления. — М. : Наука, 1984. — 228 с.
4. *Бербюк В.Е.* Динамика и оптимизация робототехнических систем. — Киев : Наук. думка, 1989. — 188 с.
5. *Бордюг Б.А., Ларин В.Б., Тимошенко А.Г.* Задачи управления шагающими аппаратами. — Киев : Наук. думка, 1985. — 263 с.
6. *Вукобратович М.* Шагающие роботы и антропоморфические механизмы. — М. : Мир, 1976. — 541 с.
7. *Формальский А.М.* Перемещение антропоморфных механизмов. — М. : Наука, 1982. — 368 с.
8. *Vukobratović M., Borovac B., Surla D., Stokić D.* Biped locomotion: dynamics, stability, control and application. — Berlin : Springer-Verlag, 1990. — 349 p.
9. *Feedback control of dynamic bipedal robot locomotion / E.R. Westervelt, J.W. Grizzle, C. Chevallereau, J.H. Choi, B. Morris.* — Boca Raton, Taylor & Francis /CRC Press, 2007. — 528 p.
10. *Chevallereau C., Bessonnet G., Abba G., Austin Y.* Bipedal robots : modeling, design and building walking robots. — Wiley-ISTE, 2013. — 328 p.
11. *Chessé S., Bessonnet G.* Optimal dynamics of constrained multibody systems. Application to bipedal walking synthesis // Proc. of 2001 IEEE Int. conf on Robotics & Automation. — 2001. — P. 2499–2505.
12. *Jamshidi N., Rostami M.* Gait optimization of biped robot during double support phase by pure dynamic synthesis // American Journal of Applied Sciences. — 2008. — 5, N 9. — P. 1175–1181.
13. *Formal'sky A.M.* Ballistic locomotion of a biped. Design and control of two biped machines // Human and Machine Locomotion. — International Centre for Mechanical Sciences, CISM Courses and Lectures. — Wien; New York : Springer-Verlag, 1997. — N 375. — P. 191–229.
14. *Chevallereau C., Formal'sky A., Perrin B.* Low energy cost reference trajectories for a biped robot // Proc. of the 1998 IEEE Int. conf. on Robotics & Automation. — 1998. — P. 1398–1404.
15. *Roussel L., Canudas-de-Wit D., Goswami A.* Generation of energy optimal complete gait cycles for biped robots // Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics & Automation. — 1998. — P. 2036–2041.
16. *Bessonnet G., Seguin P., Sardain P.* A Parametric optimization approach to walking pattern synthesis // The Int. J. of Robotics Research. — 2005. — 24, N 7. — P. 523–536.
17. *Mummolo C., Mangialardi L., Kim J.H.* Concurrent contact planning and trajectory optimization in one step walking motion // ASME 2015 Int. Design Engineering Technical Conf. and Computers and Information in Engineering Conf. / Vol. 8 : 27th Conf. on Mechanical Vibration and Noise. — Boston, USA, August 2–5, 2015.

18. Бордюг Б.А., Ларин В.Б. Моделирование движения электромеханического шагающего аппарата // Проблемы управления и информатики. — 1995. — №4. — С.115–119.
19. Cabodevila G., Abba G. Quasi optimal gait for a bipedal robot using genetic algorithm // Proc. of IEEE conf. on System, Man and Cybernetics (Orlando (USA)). — 1997. — 4. — P. 3960–3965.
20. Endo K., Herr H. A Model of muscle-tendon function in human walking // IEEE International Conference on Robotics and Automation. — 2009. — P. 1909–1915.
21. Park J.H., Choi M. Generation of an optimal gait trajectory for biped robots using a genetic algorithm // JSME Int. J. Series C. — 2004. — 47, N 2. — P. 715–721.
22. Hass J., Herrmann J.M., Geisel T. Optimal mass distribution for passivity-based bipedal robots // The Int. J. of Robotics Research. — 2006. — 25, N 11. — P. 1087–1098.
23. Berbyuk V., Boström A., Lytwyn B., Peterson B. Energy-optimal control of bipedal locomotion systems // J. Stability and Control : Theory and Application (SACTA). — 2002. — 4 (2). — P. 74–89.
24. Бербюк В.С., Демидюк М.В., Литвин Б.А. Параметрична оптимізація ходи та пружних характеристик пасивних приводів двоногого крокуючого робота // Вісник Київ. ун-ту. Сер. Кібернетика. — 2002. — № 3. — С. 17–20.
25. Бербюк В. С., Демидюк М. В., Литвин Б. А. Математическое моделирование и оптимизация ходьбы человека с протезированной голенью // Проблемы управления и информатики. — 2005. — № 3. — С. 128–144.
26. Демидюк М.В., Литвин Б.А., Голуб Б.М. Параметрична оптимізація ходи двоногого робота // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2005. — 48, № 3. — С. 162–171.
27. Демидюк М.В., Литвин Б.А. Математичне моделювання ходи людини з екзоскелетом // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2014. — Вип. 12. — С. 120–129.
28. Демидюк М.В. Литвин Б.А. Математическое моделирование ходьбы человека с голеностопным шарнирным ортезом // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2015. — № 2. — С. 46–57.
29. Лурье А.И. Аналитическая механика. — М. : Физматгиз, 1961. — 824 с.
30. Скворцов Д. В. Клинический анализ движений. Анализ походки. — Иваново : Изд-во НППЦ “Стимул”, 1996. — 344 с.
31. Winter D.A. The biomechanics and motor control of human gait: normal, elderly and pathological. 2th edition. — University of Waterloo Press, Waterloo, Canada, 1991. — 140 p.
32. Аветисян В.В., Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Оптимизация режимов управления манипуляционными роботами с учетом энергозатрат // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1987. — № 3. — С. 100–107.
33. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. — М. : Наука, 1980. — 352 с.
34. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование : Теория и алгоритмы. — М. : Мир, 1982. — 583 с.
35. Литвин Б.А. Про одну модифікацію гібридного генетичного алгоритму з дійсним кодуванням у задачах оптимізації // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикладна математика та інформатика. — 2009. — Вип. 15. — С. 313–324.
36. Литвин Б. Модифікація паралельного генетичного алгоритму з дійсним кодуванням // Там же. — 2012. — Вип. 18. — С. 229–239.
37. Кэнту М. Delphi 7 для профессионалов. — СПб. : Питер, 2004. — 1101 с.
38. Winter D.A. Biomechanics and motor control of human movement. 4th edition. — John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2009. — 384 p.

Получено 29.02.2016