УДК 517.977.56

Р.К. Тагиев, Р.С. Касымова

О ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА ПО ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений возникают, например, в оптимизационных задачах механики сплошных сред, проектировании конструкций, теории упругости, реакции конвекции–диффузии, экологического прогнозирования [1–3] и т.п. Особый интерес представляют задачи, в которых управляющие функции входят в коэффициенты уравнения для состояний, в том числе в коэффициенты при старших производных. При исследовании таких задач возникает ряд существенных трудностей, связанных с их невыпуклостью, сильной нелинейностью и некорректностью [4, 5].

Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах изучены в работах [4,6–14] и др. В них рассматриваемые критерии качества в основном интегральны по всей области. Однако часто удобнее вести наблюдения на границе области, и в таких случаях более естественными являются интегральные критерии по границе области. Такие задачи управления для эллиптических уравнений недостаточно изучены [4, 14].

В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления коэффициентами линейного эллиптического уравнения. Функционалом цели является сумма интегралов по области и по части ее границы. Исследованы вопросы корректности рассматриваемой задачи, доказана дифференцируемость по Фреше функционала цели, найдено выражение для его градиента и установлено необходимое условия оптимальности в форме вариационного неравенства.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega=\{x=(x_1,x_2): 0<x_i<\ell_i \ \ (i=1,2)\}$ — прямоугольник с границей Γ, $\Gamma_{-1}=\{s=(s_1,s_2): s_1=0,\ 0<s_2<\ell_2\}$ — левая вертикальная сторона прямоугольника Ω.

Пусть управляемый процесс описывается в Ω следующей смешанной краевой задачей для уравнения эллиптического типа:

$$-\sum_{i=1}^{2}(k_i(x)u_{x_i})_{x_i}+q(x)u=f(x),\ x\in\Omega, \tag{1}$$

$$-k_1(s)u_{x_1}(s)=g(s),\ \ s\in\Gamma_{-1}, \tag{2}$$

$$u(s)=0,\ s\in\Gamma\setminus\Gamma_{-1}, \tag{3}$$

где $f(x)\in L_2(\Omega)$, $g(s)\equiv g(s_2)\in W_2^1(0,\ell_2)$ — заданные функции, $\upsilon(x)=$ $=(k_1(x),k_2(x),q(x))$ — управление, $u(x)=u(x;\upsilon)$ — решение задачи (1)–(3), состояние процесса, соответствующее управлению $\upsilon=\upsilon(x)$.

Введем множество допустимых управлений

$$V=\prod_{i=1}^{3}V_i\subset H=W_2^1(\Omega)\times W_2^1(\Omega)\times L_2(\Omega) \tag{4}$$

при $V_i = \{k_i(x) \in W_2^1(\Omega): 0 < \nu_i \le k_i(x) \le \mu_i, \left| k_{ix_j}(x) \right| \le d_j^{(i)}\ (j=1{,}2)$ п.в.на $\Omega\}$ $(i=1{,}2)$,

$$V_3 = \{q(x) \in L_2(\Omega): 0 < q_0 \le q(x) \le q_1 \text{ п.в. на } \Omega\}. \tag{5}$$

Здесь $\mu_i \ge \nu_i > 0,\ d_j^{(i)} > 0\ (i,\ j = 1,2),\ q_1 \ge q_0 > 0$ — заданные числа, п.в.

Сформулируем задачу оптимального управления: на множестве V при условиях (1)–(3) минимизировать функционал

$$J(\upsilon) = \alpha_1 \int\limits_{\Omega} \left| u(x;\upsilon) - u_1(x) \right|^2 dx + \alpha_2 \int\limits_{\Gamma_{-1}} \left| u(s;\upsilon) - u_2(s) \right|^2 ds, \tag{6}$$

где $u_1(x) \in L_2(\Omega),\ u_2(s) \equiv u_2(s_2) \in L_2(0,\ \ell_2)$ — заданные функции, $\alpha_1, \alpha_2 = \text{const} >$ $> 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 > 0$. Эту задачу будем называть задачей (1)–(6).

Используемые в работе обозначения функциональных пространств и их норм соответствуют [15, с. 24–26]. Положительные постоянные, независящие от оцениваемых величин и допустимых управлений, обозначим $M_j\ (j = 1, 2, \cdots)$.

Под решением краевой задачи (1)–(3), соответствующим управлению $\upsilon \in V$, будем понимать обобщенное решение из $\overset{\circ}{W}{}_{2,0}^{1}(\Omega)$, т.е. функцию $u(x) =$ $= u(x;\upsilon) \in W_{2,0}^1(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{2} k_i(x) u_{x_i} \eta_{x_i} + q(x) u \eta \right) dx = \int\limits_{\Omega} f(x) \eta dx + \int\limits_{\Gamma_{-1}} g(s) \eta ds \tag{7}$$

для всех $\eta = \eta(x) \in W_{2,0}^1(\Omega)$. Здесь $W_{2,0}^1(\Omega)$ — подпространство пространства $W_2^1(\Omega)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega})$, равных нулю вблизи $\Gamma \setminus \Gamma_{-1}$.

Используя результаты из [15, с. 112–116; 16, с. 40–46], покажем, что при каждом заданном $\upsilon \in V$ существует единственное обобщенное решение $u(x) = u(x;\upsilon) \in W_{2,0}^1(\Omega)$ задачи (1)–(3) и справедлива оценка

$$\| u \|_{2,\Omega}^{(1)} \le M_1(\| f \|_{2,\Omega} + \| g \|_{2,\Gamma_{-1}}). \tag{8}$$

Более того, обобщенное решение из $W_{2,0}^1(\Omega)$ краевой задачи (1)–(3) принадлежит также пространству $W_{2,0}^2(\Omega) = W_2^2(\Omega) \cap W_{2,0}^1(\Omega)$ и справедлива оценка

$$\| u \|_{2,\Omega}^{(2)} \le M_2(\| f \|_{2,\Omega} + \| g \|_{2,\Gamma_{-1}}^{(1)}). \tag{9}$$

Известно [15, с. 84], что вложения $W_{2,0}^1(\Omega) \to C(\overline{\Omega}),\ W_2^1(\Omega) \to L_{r_1}(\Omega)$ ограничены при любом $r_1 \in [2;\infty]$. Поэтому из (9) следует справедливость оценки

$$\| u \|_{C(\overline{\Omega})} + \| u_x \|_{r_1,\Omega} + \| u_{xx} \|_{2,\Omega} \le M_3(\| f \|_{2,\Omega} + \| g \|_{2,\Gamma_{-1}}^{(1)}). \tag{10}$$

На практике задачи оптимального управления типа (1)–(6) возникают в разных областях. В качества примера рассмотрим задачу о положении равновесия неоднородной упругой мембраны из теории упругости [1]. Пусть мембрана, занимающая область Ω, ограниченную Γ, закреплена на части $\Gamma \setminus \Gamma_{-1}$ границы Γ. На внутренние точки мембраны действует внешняя сила $f(x)$, и на границе Γ_{-1} задано напряжение $g(s)$. Окружающая мембрану среда оказывает сопротивление на мембрану, пропорциональное смещению точек мембраны. Пусть функция $u(x)$ определяет прогиб мембраны в точке $x \in \Omega \cup \Gamma_{-1}$. В силу сделанных предположений состояние мембраны описывается краевой задачей (1)–(3) при $k_1(x) = k_2(x) = k(x)$. Роль управляющих функций выполняют: $k(x)$ — коэффициент натяжения мембраны и $q(x)$ — коэффициент упругости окружающей среды. Ограничения (5) на функции $k(x)$ и $q(x)$ характеризуют границы их допустимых изменений и учитывают недопустимость резких перепадов в изменении упругих характеристик материала. Целевой функционал (6) в случае $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ характеризует среднеквадратичное отклонение в нормах пространств $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma_{-1})$, прогиб мембраны от заданных прогибов $u_1(x)$ и $u_2(s)$.

2. Корректность постановки задачи

Для решения задачи (1)–(6) справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнены условия при постановке задачи (1)–(6). Тогда множество оптимальных управлений задачи (1)–(6) $V_* = \{\upsilon_* \in V : J(\upsilon_*) = J_* \equiv$ $\equiv \inf\{J(\upsilon) : \upsilon \in V\}\}$ непусто, V_* слабокомпактно в H и любая минимизирующая последовательность $\{\upsilon^{(n)}\} \subset V$ функционала (5) слабо сходится к множеству V_*.

Доказательство. Покажем, что функционал (6) в H слабонепрерывен на V. Пусть $\upsilon = (k_1, k_2, q) \in V$ — некоторый элемент, $\{\upsilon^{(n)}\} = \{(k_1^{(n)}, k_2^{(n)}, q^{(n)})\} \subset V$ — произвольная последовательность такая, что $\upsilon^{(n)} \to \upsilon$ слабо в H при $n \to \infty$, т.е.

$$k_i^{(n)}(x) \to k_i(x) \;\; (i = 1{,}2) \text{ слабо в } W_2^1(\Omega), \tag{11}$$

$$q^{(n)}(x) \to q(x) \text{ слабо в } L_2(\Omega). \tag{12}$$

Из компактности вложения $W_2^1(\Omega) \to L_{r_1}(\Omega)$ при любом $r_1 \in [2, \infty)$ [15, с. 84] и (11) следует, что

$$k_i^{(n)}(x) \to k_i(x) \;\; (i = 1{,}2) \text{ сильно в } L_{r_1}(\Omega). \tag{13}$$

Кроме того, в силу однозначной разрешимости краевой задачи (1)–(3) каждому управлению $\upsilon^{(n)} \in V$ соответствует единственное решение $u^{(n)}(x) = u(x; \upsilon^{(n)})$ задачи (1)–(3) и справедлива оценка

$$\left\| u^{(n)} \right\|_{2,\Omega}^{(2)} \le M_4 \;\; (n = 1, 2, \cdots), \tag{14}$$

т.е. последовательность $\{u^{(n)}\}$ равномерно ограничена по норме пространства $W_{2,0}^2(\Omega)$. Тогда из компактности вложений $W_{2,0}^2(\Omega) \to W_{2,0}^1(\Omega)$, $W_{2,0}^2(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$ [15, с. 84] вытекает, что из последовательности $\{u^{(n)}\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{u^{(n_m)}\}$ такую, что

$$u^{(n_m)}(x) \to u(x) \text{ слабо в } W_{2,0}^2(\Omega), \text{ сильно в } W_{2,0}^1(\Omega) \text{ и } C(\overline{\Omega}), \tag{15}$$

где $u = u(x)$ — некоторый элемент из $W_{2,0}^2(\Omega)$.

Покажем, что $u(x)=u(x;\upsilon)$, т.е. $u(x)$ — решение задачи (1)–(3), соответствующее управлению $\upsilon \in V$. Справедливы тождества

$$\int_{\Omega}\left[\sum_{i=1}^{2} k_i^{(n_m)}(x)\, u_{x_i}^{(n_m)}\eta_{x_i} + q^{(n_m)}(x)\, u^{(n_m)}\eta\right]dx = \int_{\Omega} f(x)\eta\, dx + \int_{\Gamma_{-1}} g(s)\eta\, ds,$$

$$\forall \eta = \eta(x) \in W_{2,0}^{1}(\Omega)\ (n=1,2,\cdots). \tag{16}$$

Используя соотношения (13), (15), ограничения $0<\nu_i \le k_i(x) \le \mu_i$ п.в.на $\Omega\ (i=1,2)$, неравенство (1.8) из [17, с. 67] и оценку (10), имеем

$$\left|\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{2} k_i^{(n_m)}(x)u_{x_i}^{(n_m)}\eta_{x_i}\,dx - \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{2} k_i(x)u_{x_i}\eta_{x_i}\,dx\right| \le \left|\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{2} k_i^{(n_m)}(x)(u_{x_i}^{(n_m)} - u_{x_i})\eta_{x_i}\,dx\right| +$$
$$+\left|\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{2} (k_i^{(n_m)}(x) - k_i(x))u_{x_i}\eta_{x_i}\,dx\right| \le \sum_{i=1}^{2}\mu_i \left\|u_{x_i}^{(n_m)} - u_{x_i}\right\|_{2,\Omega}\left\|\eta_{x_i}\right\|_{2,\Omega} + \tag{17}$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\left\|k_{x_i}^{(n_m)} - k_i\right\|_{3,\,\Omega}\left\|u_{x_i}\right\|_{6,\,\Omega}\left\|\eta_{x_i}\right\|_{2,\,\Omega} \to 0.$$

Кроме того, из соотношений (12), (15), ограничения $0 \le q_0 \le q^{(n)}(x) \le q_1$ п.в.на Ω и неравенства Коши–Буняковского получаем

$$\left|\int_{\Omega} q^{(n_m)}(x)u^{(n_m)}\eta\, dx - \int_{\Omega} q(x)u\eta dx\right| \le \left|\int_{\Omega} q^{(n_m)}(x)(u^{(n_m)} - u)\eta dx\right| +$$
$$+\left|\int_{\Omega}[q^{(n_m)}(x) - q(x)]u\eta dx\right| \le q_1\left\|u^{(n_m)} - u\right\|_{2,\,\Omega}\left\|\eta\right\|_{2,\,\Omega} + \left|\int_{\Omega}(q^{(n_m)} - q)u\eta dx\right| \to 0, \tag{18}$$

$$\left|\int_{\Omega}[q^{(n_m)}(x) - q(x)]u\eta dx\right| \le q_1\left\|u^{(n_m)} - u\right\|_{2,\,\Omega}\left\|\eta\right\|_{2,\,\Omega} + \left|\int_{\Omega}(q^{(n_m)} - q)u\eta dx\right| \to 0.$$

Затем, переходя к пределу при $n \to \infty$ в (16) и учитывая соотношения (17), (18), получаем, что $u(x)$ удовлетворяет тождеству (7), т. е. является обобщенным решением из $W_{2,0}^{1}(\Omega)$ задачи (1), (3), соответствующим управлению $\upsilon \in V$. Отсюда и из включения $u(x) \in W_{2,0}^{2}(\Omega)$ следует, что $u(x) = u(x;\upsilon)$.

Используя единственность решения задачи (1)–(3), соответствующее управлению $\upsilon \in V$, можно показать, что соотношение (15) справедливо не только для подпоследовательности $\{u^{(n_m)}\}$, но и для всей последовательности $\{u^{(n)}\}$, т.е. $u^{(n)}(x) = u(x;\upsilon^{(n)}) \to u(x) = u(x;\upsilon)$ слабо в $W_{2,0}^{2}(\Omega)$, сильно в $W_{2,0}^{1}(\Omega)$ и $C(\overline{\Omega})$.

Теперь покажем, что $J(\upsilon^{(n)}) \to J(\upsilon)$ при $n \to \infty$. Используя равенство (6), нетрудно убедиться в справедливости неравенства

$$\left|J(\upsilon^{(n)}) - J(\upsilon)\right| \le \alpha_1(\left\|u^{(n)}\right\|_{2,\,\Omega} + \left\|u\right\|_{2,\,\Omega} + 2\left\|u_1\right\|_{2,\,\Omega})\left\|u^{(n)} - u\right\|_{2,\,\Omega} +$$
$$+\alpha_2(\left\|u^{(n)}\right\|_{2,\,\Gamma_{-1}} + \left\|u\right\|_{2,\,\Gamma_{-1}} + 2\left\|u_2\right\|_{2,\,\Gamma_1})\left\|u^{(n)} - u\right\|_{2,\,\Gamma_{-1}}.$$

Из оценки (8), (10), неравенства (14) и соотношения (15) для последовательности $\{u^{(n)}\}$ получаем, что $J(\upsilon^{(n)}) \to J(\upsilon)$ при $n \to \infty$, т.е. функционал $J(\upsilon)$ в H слабонепрерывен на V. Кроме того, множество V ограничено, замкнуто и выпукло в гильбертовом пространстве H и поэтому слабокомпактно в H [18, с. 51]. Из результата [18, с. 49] следует справедливость утверждения теоремы 1.

Теорема доказана.

*Замечание 1***.** Из теоремы 1 следует существование решения задачи (1)–(6). Однако, как показывает следующий пример, решение задачи (1)–(4) может быть неединственным.

Пример 1. Пусть в задаче (1)–(6) $\nu_1 = \nu_2 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 2$, $d_j^{(i)} = 2 \quad (i, j = 1,2)$, $q_0 = 1$, $q_1 = 3\pi^2$, $l_1 = l_2 = 1$, $u_0(s) \equiv u_0(s_2) = 0$, $f(x) = -4\pi^2 \sin \pi x_1 \sin \pi x_2$, $g(s) \equiv$ $\equiv g(s_2) = \pi \sin \pi s_2$. Тогда нетрудно проверить, что минимальное значение функционала $J(\upsilon)$ достигается на двух допустимых управлениях $\upsilon_*^{(1)}(x) = (k_{1*}^{(1)}(x) = 1,$ $k_{2*}^{(1)}(x) = 1,\ q_*^{(1)}(x) = 2\pi^2)$, $\upsilon_*^{(2)}(x) = (k_{1*}^{(2)}(x) = 1,\ k_{2*}^{(2)}(x) = 2,\ q_*^{(2)}(x) = \pi^2$ и $J(\upsilon_*^{(1)}) =$ $= J(\upsilon_*^{(2)}) \equiv J_* = 0$, $u(x; \upsilon_*^{(1)}) = u(x; \upsilon_*^{(2)}) = -\sin \pi x_1 \sin \pi x_2$, $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, т.е. решение задачи (1)–(6) неединственно.

Замечание 2. Из теоремы 1 следует, что задача(1)–(6) корректно сформулирована в слабой топологии пространства H. Однако она некорректна в метрике пространства H, т.е. могут существовать минимизирующие последовательности функционала $J(\upsilon)$, не сходящиеся к множеству V_* по норме пространства H. Следующий пример показывает, что минимизирующая последовательность функционала $J(\upsilon)$ может не иметь предела в пространстве H.

Пример 2. Рассмотрим задачу оптимального управления из примера 1. Тогда $\upsilon_*(x) = (k_{1*}(x) = 1, k_{2*}(x) = 1, q_*(x) = 2\pi^2) \in V$ — оптимальное управление и $u(x; \upsilon_*) =$ $= -\sin \pi x_1 \sin \pi x_2$, $x \in \Omega$, $J_* = J(\upsilon_*) = 0$.

Возьмем последовательность управлений $\upsilon^{(m)}(x) = (k_1^{(m)}(x) = 1,\ k_1^{(m)}(x) = 1,$ $q^{(m)}(x) = 2\pi^2 + \sin \pi m x_1) \in V \quad (m = 1,2,...)$, $x \in \Omega$. Тогда $\upsilon^{(m)}(x) \to \upsilon_*(x)$ слабо в H, и поэтому из соотношения (19) следует, что $J(\upsilon^{(m)}) \to J(\upsilon_*) = J_* = 0$, т.е. последовательность $\{\upsilon^{(m)}\}$ минимизирующая для функционала $J(\upsilon)$. Однако она не имеет предела в H, так как $\{\sin \pi m x_1\}$ сильно не сходится в $L_2(\Omega)$.

3. Дифференцируемость функционала цели и необходимое условие оптимальности

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу для определения функции $\psi(x) = \psi(x; \upsilon)$ из условий

$$-\sum_{i=1}^{2} (k_i(x)\psi_{x_i})_{x_i} + q(x)\psi = -2\alpha_1[u(x, \upsilon) - u_1(x)],\ x \in \Omega, \tag{19}$$

$$-k_1(s)_{x_1}(s) = 2\alpha_2[u(s; \upsilon) - u_2(s)],\ s \in \Gamma_{-1}, \tag{20}$$

$$\psi(s) = 0,\ s \in \Gamma \setminus \Gamma_{-1}. \tag{21}$$

Под решением краевой задачи (19)–(21), соответствующей управлению $\upsilon \in V$, будем понимать обобщенное решение из $W_{2,0}^1(\Omega)$, т.е. функцию $\psi(x) = \psi(x; \upsilon) \in W_{2,0}^1(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{2} k_i(x)\psi_{x_i}\eta_{x_i} + q\psi\eta \right) dx = -2\alpha_1 \int_{\Omega} (u - u_1)\eta dx - 2\alpha_2 \int_{\Gamma_{-1}} (u - u_2)\eta ds \tag{22}$$

для всех $\eta = \eta(x) \in W_{2,0}^1(\Omega)$.

Используя результаты из [15, с. 112–116; 16, с. 40–46], покажем, что при каждом заданном $\upsilon \in V$ существует единственное обобщенное решение $\psi(x) = \psi(x;\upsilon) \in W_{2,0}^1(\Omega)$ задачи (19)–(21) и справедлива оценка

$$\|\psi\|_{2,\Omega}^{(1)} \le M_5\left[\alpha_1 \|u-u_1\|_{2,\Omega} + \alpha_2 \|u-u_2\|_{2,\Gamma_{-1}}\right]. \tag{23}$$

Более того, обобщенное решение из $W_{2,0}^1(\Omega)$ краевой задачи (19)–(21) также принадлежит пространству $W_{2,0}^2(\Omega)$ и справедлива оценка [15, с. 125–134]

$$\|\psi\|_{2,\Omega}^{(2)} \le M_6\left[\alpha_1 \|u-u_1\|_{2,\Omega} + \alpha_2 \|u-u_2\|_{2,\Gamma_{-1}}^{(1)}\right].$$

Используя ограниченность вложений $W_{2,0}^2(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$, $W_2^1(\Omega) \to L_{r_1}(\Omega)$ ($r_1 \in [2,\infty)$) [15, с.84] и оценку (9), получаем

$$\|\psi\|_{C(\overline{\Omega})} + \|\psi_x\|_{r_1,\Omega} + \|\psi_{xx}\|_{2,\Omega} \le M_7\left[\|f\|_{2,\Omega} + \alpha_1\|u_1\|_{2,\Omega} + \alpha_2\|u_2\|_{2,\Gamma_{-1}}^{(1)} + \|g\|_{2,\Gamma_{-1}}^{(1)}\right]. \tag{24}$$

Для каждого фиксированного $i \in \{1,2\}$ поставим следующую краевую задачу об определении функции $\omega_i(x) = \omega_i(x;\upsilon)$ из условий:

$$-\sum_{j=1}^{2} \omega_{ix_j x_j} + \omega_i = u_{x_i}\psi_{x_i}, \quad x \in \Omega, \tag{25}$$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Gamma\,(i = 1,2), \tag{26}$$

где ν — внешняя нормаль к Γ.

Под решением краевой задачи (25), (26) при фиксированном $i \in \{1,2\}$ и заданном $\upsilon \in V$ будем понимать функцию $\omega_i(x) = \omega_i(x;\upsilon)$ из $W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{2} \omega_{ix_j}\eta_{x_j} + \omega_i\eta \right) dx = \int_\Omega u_{x_i}\psi_{x_i}\eta\, dx \quad (i = 1,2). \tag{27}$$

Из включений $u_{x_i}\psi_{x_i} \in L_4(\Omega)$ следует, что $u_{x_i}, \psi_{x_i} \in L_2(\Omega)$ $(i = 1,2)$. Поэтому из результатов [15, с. 200–202] следует, что краевая задача (25), (26) однозначно разрешима в $W_2^1(\Omega)$ и справедлива оценка

$$\|\omega_i\|_{2,\Omega}^{(1)} \le M_8 \left\| u_{x_i}\psi_{x_i} \right\|_{6/5,\Omega} \quad (i = 1,2).$$

Тогда, используя оценки (8), (24), имеем

$$\|\omega_i\|_{2,\Omega}^{(1)} \le M_9(\|f\|_{2,\Omega} + \|g\|_{2,\Gamma_{-1}})(\|f\|_{2,\Omega} + \|g\|_{2,\Gamma_{-1}} + \alpha_1\|u_1\|_{2,\Omega} + \alpha_2\|u_2\|_{2,\Gamma_{-1}}$$

$$(i = 1,2). \tag{28}$$

Для дифференцируемости функционала (6) справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнены условия при постановке задачи (1)–(6). Тогда функционал (6) непрерывно дифференцируемый по Фреше на V и его градиент в произвольной точке $\upsilon \in V$ определяется равенством

$$J'(\upsilon) = (\omega_1(x;\upsilon),\ \omega_2(x;\upsilon),\ u(x;\upsilon)\psi(x;\upsilon)). \tag{29}$$

Доказательство. Пусть $\upsilon, \upsilon+\Delta\upsilon \in V$ — произвольные управления, $\Delta\upsilon = (\Delta k_1, \Delta k_2, \Delta q)$ и $\Delta u = \Delta u(x) = u(x;\upsilon+\Delta\upsilon) - u(x;\upsilon)$. Из условий (1)–(3) следует, что Δu является решением из $W_{2,0}^2(\Omega)$ краевой задачи

$$-\sum_{i=1}^{2}((k_i+\Delta k_i)\Delta u_{x_i})_{x_i} + (q+\Delta q)\Delta u = \sum_{i=1}^{2}(\Delta k_i u_{x_i})_{x_i} - \Delta q u, \ \ x \in \Omega, \tag{30}$$

$$-(k_1+\Delta k_1)\Delta u_{x_1} = \Delta k_1 u_{x_1}, \ \ s \in \Gamma_{-1}, \tag{31}$$

$$\Delta u(s) = 0, \ \ s \in \Gamma \setminus \Gamma_{-1}. \tag{32}$$

Отсюда для функции Δu справедлива оценка [17, с. 200]

$$\| \Delta u \|_{2,\Omega}^{(1)} \le M_{10}\left[\sum_{i=1}^{2}\left\| \Delta k_i u_{x_i} \right\|_{2,\Omega} + \| \Delta q u \|_{6/5,\Omega}\right]. \tag{33}$$

Используя неравенство (1.8) из [17, с. 67], ограниченность вложения $W_2^1(\Omega) \to L_4(\Omega)$ и оценку (10), получаем следующие неравенства:

$$\sum_{i=1}^{2}\left\| \Delta k_i u_{x_i}\right\|_{2,\Omega} \le \sum_{i=1}^{2}\| \Delta k_i \|_{4,\Omega}\left\| u_{x_i}\right\|_{4,\Omega} \le M_{11}\sum_{i=1}^{2}\| \Delta k_i \|_{2,\Omega}^{(1)},$$

$$\| \Delta q u \|_{6/5,\Omega} \le \| \Delta q \|_{2,\Omega} \| u \|_{3,\Omega} \le M_{12} \| \Delta q \|_{2,\Omega}.$$

Учитывая их и оценку (33), имеем

$$\| \Delta u \|_{2,\Omega}^{(1)} \le M_{13} \| \Delta\upsilon \|_H. \tag{34}$$

Приращение функционала (6) запишем

$$\begin{aligned} \Delta J(\upsilon) = J(\upsilon+\Delta\upsilon) - J(\upsilon) = 2\alpha_1 \int_{\Omega} [u(x;\upsilon) - u_1(x)]\Delta u(x)dx + \\ + 2\alpha_2 \int_{\Gamma_{-1}} [u(s;\upsilon) - u_2(s)]\Delta u(s)ds + \alpha_1 \| \Delta u \|_{2,\Omega}^2 + \alpha_2 \| \Delta u \|_{2,\Gamma_{-1}}^2. \end{aligned} \tag{35}$$

С помощью решений краевых задач (19)–(21) и (30)–(32) преобразуем приращение (35). Для решения краевой задачи (30)–(32) справедливо равенство

$$\int_{\Omega}\left[\sum_{i=1}^{2}(k_i+\Delta k_i)\Delta u_{x_i}\psi_{x_i} + (q+\Delta q)\Delta u\psi\right]dx = -\int_{\Omega}\left[\sum_{i=1}^{2}\Delta k_i u_{x_i}\psi_{x_i} + \Delta q u\psi\right]dx. \tag{36}$$

Если в тождестве (22) примем $\eta = \Delta u$ и полученное равенство вычтем из (36), то будем иметь

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 \int_{\Omega}(u-z_1)\Delta u dx + 2\alpha_2 \int_{\Gamma_{-1}}(u-z_2)\Delta u ds = \int_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{2}u_{x_i}\psi_{x_i}\Delta k_i + u\psi\Delta q\right)dx + \\ + \int_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{2}\Delta u_{x_i}\psi_{x_i}\Delta k_i + \Delta u\psi\Delta q\right)dx. \end{aligned}$$

Учитывая это равенство в (35), имеем

$$\Delta J(\upsilon) = \int_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{2}u_{x_i}\psi_{x_i}\Delta k_i + u\psi\Delta q\right)dx + R, \tag{37}$$

где

$$R = \alpha_1 \| \Delta u \|^2_{2,\,\Omega} + \alpha_2 \| \Delta u \|^2_{2,\,\Gamma_{-1}} + \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{2} \Delta u_{x_i} \psi_{x_i} \Delta k_i + \Delta u \psi \Delta q \right) dx . \qquad (38)$$

Полагая в тождестве (27) $\eta = \Delta k_i$, получаем равенство

$$\int\limits_{\Omega} \left(\omega_i \Delta k_i + \sum_{j=1}^{2} \omega_{ix_j} \Delta k_{ix_j} \right) dx = \int\limits_{\Omega} u_{x_i} \psi_{x_i} \Delta k_i dx, \ \ (i = 1, 2) ,$$

учитывая его в (37), имеем

$$\Delta J(\upsilon) = \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{2} \left(\omega_i \Delta k_i + \sum_{j=1}^{2} \omega_{ix_j} \Delta k_{ix_j} \right) + u \psi \Delta q \right] dx + R. \qquad (39)$$

Используя теорему вложения [15, с. 84], нетрудно показать, что интегральное слагаемое в правой части (39) при заданном $\upsilon \in V$ определяет линейный ограниченный функционал от $\Delta\upsilon \in H$.

Теперь проведем оценку (38). Используя ограниченность вложения $W_2^1(\Omega) \to L_4(\Omega)$ [15, с. 84], неравенство (1.8) из [17, с. 67] и оценки (23), (24), (34), имеем

$$\begin{aligned} &\left| \int\limits_{\Omega} (\sum_{i=1}^{2} \Delta u_{x_i} \psi_{x_i \Delta k_i} + \Delta u \psi \Delta q) dx \right| \le \sum_{i=1}^{2} \| \Delta u_{x_i} \|_{4,\,\Omega} \| \psi_{x_i} \|_{2,\,\Omega} \| \Delta k_i \|_{4,\,\Omega} + \\ &+ \| \Delta u \|_{4,\,\Omega} \| \psi \|_{4,\,\Omega} \| \Delta q \|_{2,\,\Omega} \le M_{14} \| \Delta\upsilon \|^2_H. \end{aligned} \qquad (40)$$

Учитывая оценки (34) и (40) в (38), получаем оценку $|R| \le M_{15} \| \Delta\upsilon \|^2_H$. Подставляя эту оценку в (37), заключаем, что функционал (6) дифференцируем по Фреше на V и его градиент определяется равенством (29). Из оценок (10), (24) и (28) следует, что отображение $J'(\upsilon) : V \to H$ непрерывно.

Теорема доказана.

Необходимое условие оптимальности в задаче (1)–(6) устанавливает следующая теорема

Теорема 3. Пусть выполнены условия при постановке задачи (1)–(6). Тогда для оптимальности управления $\upsilon_* = (k_*, q_*) \in V$ в задаче (1)–(6) необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{2} \left(\omega_{i*} \left(k_i - k_{i*} \right) + \sum_{j=1}^{2} \omega_{i*x_j} \left(k_{ix_j} - k_{i*x_j} \right) \right) + u_* \psi_* \left(q - q_* \right) \right] dx \ge 0 \qquad (41)$$

для любого $\upsilon = (k_1, k_2, q) \in V$, где $u_* = u_*(x) = u(x; \upsilon_*)$, $\psi_* = \psi_*(x) = \psi(x; \upsilon_*)$, $\omega_{i*} = \omega_{i*}(x) = \omega_i(x; \upsilon_*)$ $(i = 1, 2)$ — решения задач (1)–(3); (19)–(21) и (25), (26) при $\upsilon = \upsilon_*$ соответственно.

Доказательство. Множество V определяемое равенствами (4), (5), выпукло в H. Кроме того, согласно теореме 2 функционал (6) непрерывно дифференцируемый по Фреше на V. В силу теоремы 5 из [18, с. 28] на элементе $\upsilon_* \in V$ необходимо выполнить неравенство $< J'(\upsilon_*),\ \upsilon - \upsilon_* >_H \ge 0$ при всех $\upsilon \in V$. Отсюда и из (29) следует справедливость неравенства (41).

Теорема доказана.

В работе доказано, что задача оптимального управления коэффициентами линейного эллиптического уравнения корректно поставлена в слабой топологии пространства управлений. Полученная в работе формула для градиента целевого функционала и необходимое условие оптимальности могут использоваться при разработке численных методов решения рассматриваемой задачи.

Р.К. Тагієв, Р.С. Касимова

ПРО ЗАДАЧУ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ КОЕФІЦІЄНТАМИ ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ З ІНТЕГРАЛЬНИМ КРИТЕРІЄМ ЯКОСТІ ВЗДОВЖ МЕЖІ ОБЛАСТІ

Розглянуто задачу оптимального керування коефіцієнтами лінійного еліптичного рівняння. Досліджено питання коректності постановки задачі, доведено диференційність за Фреше функціонала мети, знайдено вираз для його градієнта і встановлено необхідну умову оптимальності.

R.K. Tagiyev, R.S. Kasymova

ON OPTIMAL CONTROL PROBLEM OF ELLIPTICAL EQUATION COEFFICIENTS WITH INTEGRAL QUALITATIVE CRITERION

The problem of optimal control of the coefficients of an elliptic equation with integral quality criteria by the boundary of the domain is considered. There are studied the questions of the correctness of the problem statement, the differentiability by Frechet of the purpose functional is proved, the expression for its gradient is found and a necessary condition of optimality is established.

1. *Лурье К.А.* Оптимальное управления в задачах математической физики. — М. : Наука. 1975. — 480 с.
2. *Литвинов В.Г.* Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. — М.: Наука. 1987. — 386 с.
3. *Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. — М.: Наука. 1982. — 320 с.
4. *Лионс Ж.Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир. 1972. — 416 с.
5. *Murat F.* Contre–exemples pour divers problems oú le contróle intervient dans les coefficients // Ann. Mat. Pura et Appl. — 1977. — **112.** — P. 49–68.
6. *Zolezzi T.* Necessary conditions for optimal control of elliptic or parabolic problems // SIAM J. Control. — 1972. — **4**, N 2. — P. 594–602.
7. *Мадатов М.Д.* О задачах с управлениями в коэффициентах эллиптических уравнений // Мат. заметки. — 1983. — **34**, вып. 6. — С. 873–882.
8. *Райтум У.Е.* Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений. — Рига : Зинатне. 1989. — 277 с.
9. *Tagiyev R.K.* Optimal control problems for elliptic equation with controls in coefficients // Transact. NAS of Azerbaijan, Isc. Math.–Mech. — 2003. — **23,** N 4. — P. 251–260
10. *Casado D., Couce C., Martin G.* Optimality conditions for nonconvex multistate control problems in the coefficients // SIAM. J. Control. Optim. — 2004. — **43**, N 1. — P. 216–239.
11. *Тагиев Р.К.* Оптимальное управление коэффициентами квазилинейного эллиптического уравнения // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 9. — С. 19–32.
12. *Тагиев Р.К.* Об оптимальном управлении коэффициентами эллиптического уравнения // Дифференц. уравнения. — 2011. — **47**, № 6. — С. 871–879.
13. *Iskenderov A.D., Tagiyev R.K.* Optimal control problem with controls in coefficients of quasilinearmelliptie equation // Euroasion Journal Mathematies and Computer applications. — 2013. — **1**, N 2. — P. 21–39.
14. *Tagiev R.K., Kasymova R.S.* On an optimal problem for the coefficients of an elliptic equation a quality criterion of the boundary of domain // Transact. NasofAzerbaijan. Isc.Math.–Mech. — 2015. — **35,** N 1. — P. 157–163.
15. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука,1973. — 408 с.
16. *Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. — М. : Высш. шк., 1987. — 296 с.
17. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М. : Наука, 1973. — 576 с.
18. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981. — 400 с.

Получено 27.04.2016