УДК 621.391

В.М. Кунцевич

СТАБИЛИЗАЦИЯ СЕМЕЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Введение

Задача стабилизации управляемых семейств линейных и нелинейных систем решена, если определено управление, которое при заданных оценках параметров систем обеспечивает выполнение необходимых и достаточных условий робастной устойчивости для линейных систем или только тех или иных достаточных условий робастной устойчивости для нелинейных. Перед конструктором системы управления семейством динамических систем возникает вопрос: возможна ли вообще при заданных оценках параметров семейства систем стабилизация этого семейства, проверяемая при использовании достаточных условий робастной устойчивости. В настоящей статье предлагается ответ на поставленный вопрос.

После появления статьи В.М. Харитонова [1] по анализу устойчивости семейств линейных непрерывных систем, вызвавшей в то время настоящий бум в литературе, посвященной этой проблеме, и внедривший термин «робастная устойчивость», было установлено [2, 3], что дискретного аналога критерия устойчивости Харитонова не существует. Более того, даже если для всех $N = 2^m$ вершин интервальной оценки коэффициентов характеристического уравнения выполняются необходимые и достаточные условия устойчивости Шур–Кона, то из этого не следует робастная устойчивость семейства дискретных систем. Как показано в [4], задача проверки выполнения необходимых и достаточных условий робастной устойчивости линейных дискретных систем является *NP*-сложной.

Трудности, связанные с проверкой необходимых и достаточных условий робастной устойчивости линейных дискретных систем и тех или иных только достаточных условий для нелинейных систем, побуждают искать лишь достаточные условия робастной устойчивости линейных систем, формулируемых не в пространстве коэффициентов характеристического уравнения, а в пространстве элементов матрицы линейной системы, и тех или иных достаточных условий робастной устойчивости для нелинейных систем.

Статья состоит из двух частей, в первой получены легко проверяемые условия существования упомянутых условий включения для двух классов оценок параметров в виде интервальных и эллипсоидальных оценок элементов матрицы параметров объекта. Во второй части рассматриваются нелинейные системы с параметрической неопределенностью и системы с нелинейными вектор-функциями, удовлетворяющие двухсторонним линейным ограничениям. Для этих классов систем получено аналитическое решение задачи определения нелинейного управления, которое при выполнении некоторых условий стабилизирует семейство нелинейных систем. Для проверки выполнения достаточных условий робастной устойчивости «в области» предложена численная процедура, требующая решения стандартных оптимизационных задач.

1. Стабилизация семейств линейных дискретных систем

Синтез стабилизирующего управления. Ниже под семейством динамических систем понимается такая их совокупность, в которой один элемент семейства отличается от другого лишь значением параметров, для которых заданы их априорные гарантированные оценки. Принимается, что измерение вектора состояния и реализация управления проводятся в дискретные моменты времени и что от исходного дифференциального уравнения, описывающего динамику системы, по известным правилам осуществлен переход к разностному уравнению

$$X_{n+1} = AX_n + BU_n, \tag{1}$$

описывающему поведение исходной непрерывной системы в дискретные моменты времени t_n, $t_{n+1} = T + t_n$, T — шаг квантования по времени, $n = 0, 1, 2, \dots$.

В (1) вектор состояния $X_n \in \mathbf{R}^m$; вектор управления $U_n \in \mathbf{R}^m$; A — матрица $(m \times m)$, B — матрица $(m \times m)$, $\det B \neq 0$. Для матрицы A задана ее оценка

$$A \in \mathbf{A}, \tag{2}$$

где $\mathbf{A}$ — ограниченное выпуклое множество.

В настоящее время при определении оценок матрицы A расчетным путем, исходя из некоторых общих соображений, наиболее часто используются интервальные оценки

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}'_1 \times \mathbf{A}'_2 \times \ldots \times \mathbf{A}'_m,$$

где для A_i^{T} строки матрицы A задаются интервальные оценки

$$A_i^{\mathrm{T}} \in \mathbf{A}_i = \{a_{ij} : \underline{a}_{ij} \le a_{ij} \le \overline{a}_{ij}\}, \ j, i = \overline{1; m},$$

где a_{ij} — ij-й элемент матрицы A (см., например, [5]).

При получении оценок строк A_i^{T} матрицы в результате выполнения той или иной процедуры параметрической идентификации предпочтение по ряду причин отдается использованию эллипсоидальных оценок

$$A_i^{\mathrm{T}} \in \mathbf{A}''_i = \{A_i^{\mathrm{T}} : (A_i^{\mathrm{T}} - \overset{\circ}{A}{}_i^{\mathrm{T}}) H_i (A_i^{\mathrm{T}} - \overset{\circ}{A}{}_i^{\mathrm{T}}) \le 1\}, \, i = \overline{1; m},$$

где $\overset{\circ}{A}{}_i^{\mathrm{T}}$ — центр эллипсоида, $H_i^{\mathrm{T}} = H_i > 0$ — матрица $(m \times m)$ (см. работы А.Б. Куржанского [6], R. Schweppe [7], Ф.Л. Черноусько [8]).

В настоящее время, кроме большого количества журнальных статей, появились и монографии, посвященные решению задач стабилизации семейств линейных дискретных систем (см., например, [9–14]) и даже семейств нелинейных систем [14].

Ниже рассмотрим решение задачи стабилизации семейства линейных систем как задачу оптимальной стабилизации. Примем, что для неуправляемого семейства систем (1), т.е. при $U_n \equiv 0$ те или иные условия робастной устойчивости не выполняются и поэтому стоит задача: выбором управления U_n стабилизировать семейство систем (1), (2), если это возможно при оценке (2) матрицы A. Задачу оптимальной стабилизации сформулируем как обобщенный дискретный аналог задачи В.И. Зубова [15].

Введем функцию Ляпунова

$$\upsilon_n = X_n^{\mathrm{T}} X_n \tag{3}$$

ISSN 0572-2691

и управление U_n будем искать из решения задачи минимизации ее первой разности, вычисляемой вдоль траектории движения системы (1), (2), т.е. из решения задачи

$$\min_{U_n}\{\Delta\upsilon_n=\upsilon_{n+1}-\upsilon_n=[AX_n+BU_n]^{\mathrm{T}}[AX_n+BU_n]-X_n^{\mathrm{T}}X_n\}.$$

Так как для матрицы A задана лишь ее оценка (2), то эта задача некорректна и поэтому для получения гарантированного результата заменим ее задачей

$$\min_{U_n}\max_{A\in\mathbf{A}}\{[AX_n+BU_n]^{\mathrm{T}}[AX_n+BU_n]-X_n^{\mathrm{T}}X_n\},\tag{4}$$

точнее говоря, эквивалентной ей задачей

$$\min_{U_n}\max_{A\in\mathbf{A}}\{[AX_n+BU_n]^{\mathrm{T}}[AX_n+BU_n]\}.\tag{5}$$

Известно, что минимаксные задачи не имеют аналитического решения, но задача (5) — счастливое исключение из этого правила. Для решения задачи (5) интервальные оценки строк A_i^{T} матрицы A представим в центрированной форме

$$\mathbf{A}_i'=\overset{\circ}{A}_i+\delta\mathbf{A}_i,\ \ i=\overline{1;m},\tag{6}$$

где

$$\overset{\circ}{A}_i=\|\overset{\circ}{a}_{ij}\|_{j=1}^m;\ \ \overset{\circ}{a}_{ij}=0{,}5(\overline{a}_{ij}+\underline{a}_{ij}),\ \ i,j=\overline{1;m};\ \ \Delta a_{ij}=0{,}5(a_{ij}-\overset{\circ}{\underline{a}}_{ij}),\ \ i,j=\overline{1;m};\tag{7}$$

$$\delta\mathbf{A}_i'=\delta\alpha_{i1}\times\delta\alpha_{i2}\times\ldots\times\delta\alpha_{im},\ \ i=\overline{1;m};\ \ \delta\alpha_{ij}=\{\Delta a_{ij}:\Delta a_{ij}\le\left|\overline{a}_{ij}-\underline{a}_{ij}\right|\},\ \ i,j=\overline{1;m}.\tag{8}$$

Эллипсоидальные оценки (5) также представим в центрированной форме

$$A_i^{\mathrm{T}}=\overset{\circ}{A}{}_i^{\mathrm{T}}+\delta\mathbf{A}_i'',\ i=\overline{1;m},\tag{9}$$

где

$$\delta\mathbf{A}_i''=\{\Delta A_i^{\mathrm{T}}:\Delta A_i^{\mathrm{T}}H_i^{-1}\Delta A_i\le 1\},\ \ i=\overline{1;m},\tag{10}$$

$$\delta\mathbf{A}=\delta\mathbf{A}_1\times\delta\mathbf{A}_2\times\ldots\times\delta\mathbf{A}_m,\tag{11}$$

не оговаривая без надобности, какая из двух оценок (интервальная или эллипсоидальная) имеется в виду.

С учетом обозначений (6) (или (9)) задачу (5) перепишем

$$\min_{U_n}\max_{\Delta A\in\delta\mathbf{A}}\{[(\overset{\circ}{A}+\Delta A)X_n+BU_n]^{\mathrm{T}}\times[(\overset{\circ}{A}+\Delta A)X_n+BU_n]\}.\tag{12}$$

Утверждение 1. Решение задачи (12) имеет вид

$$\overset{*}{U}_n=-\overset{\circ}{A}X_n.\tag{13}$$

Как будет показано в разд. 2, справедливость утверждения 1 является следствием приведенной теоремы 1. Подставив (13) в (1), получим

$$X_{n+1}=\Delta AX_n,\tag{14}$$

где $\Delta A\in\delta\mathbf{A}$.

Из принципа сжатых отображений Банаха для линейной системы (14) следует достаточное условие ее устойчивости

$$\|A\|=\max_{i=\overline{1;m}}\|A_i^{\mathrm{T}}\|\le q<1,\tag{15}$$

где $\|A_i^{\mathrm{T}}\|=\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$.

Замечание 1. В работах [8, 9, 15, 16] достаточное условие устойчивости (15) названо условием «сверхустойчивости».

Из (13), (14) следует, что управление (13) перемещает центр множества $\mathbf{A} = -\overset{\circ}{A} + (\overset{\circ}{A} + \delta\mathbf{A}) = \delta\mathbf{A}$ в начало координат, но не изменяет радиуса $\rho(\widetilde{\mathbf{A}})$, множества $\widetilde{\mathbf{A}}$, равного радиусу $\rho(\delta\mathbf{A})$ множества $\delta\mathbf{A}$, определяемого в виде

$$\rho(\delta\mathbf{A}) = \max_{\Delta A \in \delta\mathbf{A}} \|\Delta A\|.$$

В m-мерном пространстве элементов a_{ij}, где $j = \overline{1; m}$, множество $\overset{*}{\mathbf{A}}_i$, удовлетворяющее условию (15), определяет «сдвоенную» пирамиду с общим ($m-1$)-мерным прямоугольным основанием как выпуклую оболочку, натянутую на систему векторов

$$\overset{*}{\mathbf{A}}_i = \operatorname{conv}\left\{\underbrace{\begin{Vmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix}-1\\0\\0\\\vdots\\0\end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix}0\\-1\\0\\\vdots\\0\end{Vmatrix}, \ldots, \begin{Vmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\-1\end{Vmatrix}}_{2m}\right\} m. \tag{16}$$

На рис. 1 при $m = 3$ показано множество $\overset{*}{\mathbf{A}}_i$.

Несмотря на то, что управление U_n получено из решения задачи (12), из этого в общем случае не следует, что семейство систем робастно устойчиво, так как оценки (6) или (10) могут быть такими, что класс систем (14) окажется настолько широк, что не существует управления, стабилизирующего семейство систем (14), устойчивость которого проверяется по достаточному условию робастной устойчивости (15). Поэтому необходим анализ робастной устойчивости этого семейства.

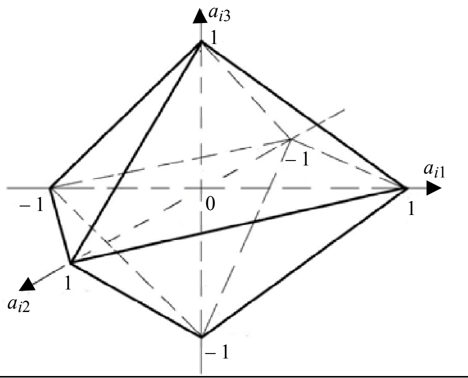

Рис. 1

Робастная устойчивость семейства линейных систем. Утверждение 2. Семейство систем (14) устойчиво, если имеют место включения

$$\delta\mathbf{A}_i \in \widetilde{\mathbf{A}}_i = \{\Delta A_i^{\mathrm{T}} : \|\Delta A_i^{\mathrm{T}}\|_\infty = 1\}, \quad i = \overline{1; m}. \tag{17}$$

Для проверки существования включений (17) найдем решение задачи, которую сформулируем сначала на содержательном уровне: каков радиус r m-мерного шара

$$A_i^{\mathrm{T}} A_i - r_i^2 \le 0, \quad i = \overline{1; m}, \tag{18}$$

чтобы плоскость

$$L^{\mathrm{T}} A_i = r, \tag{19}$$

где $L^{\mathrm{T}} = (1, 1, \ldots, 1)$, $r = \dfrac{1}{\sqrt{m}}$, была касательной к шару (18).

 ISSN 0572-2691

Отметим, что в положительном октанте пространства $\{A_i^{\mathrm{T}}\}$ соответствующая грань сдвоенной пирамиды $\overset{*}{\mathbf{A}}_i$ принадлежит плоскости (19).

Формально близкая, но отличная по содержанию задача решалась в [16] с использованием метода неопределенных множителей Лагранжа. Воспользуемся предложенной там схемой и введем функцию Лагранжа

$$\psi(A_i, \lambda) = A_i^{\mathrm{T}} A + \lambda(L^{\mathrm{T}} A_i - r),$$

где λ — множитель Лагранжа.

Дифференцируя функцию Лагранжа и приравнивая производную нулю, получаем $\psi'(A_i, \lambda) = 2\overset{*}{X}{}^{\mathrm{T}} + \lambda L^{\mathrm{T}}$. Отсюда имеем $\overset{*}{X} = \dfrac{-\lambda}{2} L$. Подставив выражение для $\overset{*}{X}$ в ограничение (18) и выполнив некоторые преобразования, получим

$$\overset{*}{X} = r \frac{L}{L^{\mathrm{T}} L}.$$

Искомый максимум равен

$$\varphi(\overset{*}{X}) = \frac{r^2}{L^{\mathrm{T}} L} = \frac{r^2}{m}.$$

По условию плоскость (19) должна быть касательной к шару (18). Поэтому из условия $\varphi(\overset{*}{X}) = r^2$ получим искомое значение радиуса сферы

$$r = \frac{1}{\sqrt{m}}. \tag{20}$$

Решение указанной выше задачи позволяет сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 3. Если множества $\delta\mathbf{A}_i$, $i = \overline{1; m}$, — m-мерные шары радиуса $r < \dfrac{1}{\sqrt{m}}$, то включения (17) имеют место.

Так как вокруг m-мерного куба со сторонами $\Delta a_{ij} = 0{,}5(\overline{a}_{ij} - \underline{a}_{ij})$, $i, j = \overline{1; m}$, можно описать сферу радиуса $r = m^{-1}$ и если

$$|\Delta a_{ij}| < \frac{1}{m}; \quad j = \overline{1; m},$$

то включения (18) имеют место.

Определим теперь ограничения, налагаемые на эллипсоидальные множества $\delta\mathbf{A}_i''$, $i = \overline{1; m}$, при соблюдении которых справедливы включения (17). Рассмотрим общий случай, когда матрицы H_i^{-1} в (10) общего вида. Найдем расстояние $\rho(\mathbf{A}_i)$ от начала координат до плоскости, касательной к эллипсоиду $\delta\mathbf{A}_i''$, и параллельной плоскости $A_i^{\mathrm{T}} l = r$, где в соответствии с (20) $r = \dfrac{1}{\sqrt{m}}$, а l — единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором L в соотношении (19) (рис. 2). В [16] такая задача решена и для величины $\rho(\mathbf{A}_i)$ получено следующее выражение:

$$\rho(\mathbf{A}_i) = \sqrt{l^{\mathrm{T}} H l}.$$

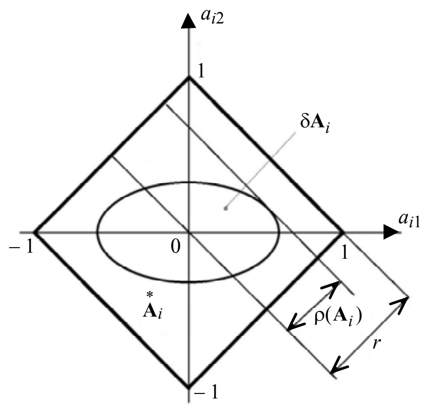

Рис. 2

Если $\rho(\mathbf{A}_i) < r,\ \ i = \overline{1; m},$ то тогда имеют место включения (17).

Поскольку ориентация осей эллипсоидов $\delta\mathbf{A}_i,\ \ i = \overline{1; m},$ относительно осей пространства параметров $\{A_i^{\mathrm{T}}\}$ неизвестна, то проверку выполнения неравенств

$$\rho(\delta\overset{*}{\mathbf{A}}_i) < r,\ \ i = \overline{1; m}, \tag{21}$$

т.е. достаточных условий устойчивости (18), необходимо, вообще говоря, проводить во всех октантах пространства $\{A_i^{\mathrm{T}}\}$, т.е. для всего множества $\overset{*}{\mathbf{A}}_i$ (сдвоенной пирамиды). Но множества $\delta\overset{*}{\mathbf{A}}_i$ центрально-симметрические, поэтому справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. Если неравенства (21) выполняются для m-мерной пирамиды

$$\overset{*}{\mathbf{A}}_i = \operatorname{conv}\left\{ \underbrace{\left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\|, \ldots, \left\| \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\|}_{2m-1} \right\} m,\ \ i = \overline{1; m},$$

с прямоугольным $(m-1)$-мерным основанием, то включения (17) имеют место.

Для интервальных оценок $\Delta a_{ij} \in \delta\alpha_{ij},\ \ i = \overline{1; m},$ задача определения условий, при соблюдении которых включения (17) имеют место, решена в [17]. Включения (17) имеют место при выполнении условия

$$\overset{*}{\gamma} \left| \Delta a_{ij} \right| \le q < 1 \ \ \forall i,\ j = \overline{1; m},$$

где

$$\overset{*}{\gamma} = \min \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} \left| \Delta a_{ij} \right|}.$$

Перейдем к определению достаточных условий стабилизируемости семейства нелинейных систем.

ISSN 0572-2691

2. Достаточные условия стабилизируемости семейств нелинейных систем

Неопределенность в математических моделях нелинейных систем. Первой работой, в которой была поставлена и решена задача анализа устойчивости нелинейных систем с неопределенностью нестохастической природы, была статья А.И. Лурье и В.Н. Постникова [18]. Она породила новое научное направление, получившее впоследствии название анализа «абсолютной устойчивости» [19]. В [18, 19] рассматривалась система, состоящая из линейной и нелинейной частей. Для неизвестной нелинейной функции скалярного аргумента были заданы двухсторонние линейные ограничения, породившие название «секториальная нелинейность». Впоследствии результаты по анализу устойчивости этого класса систем были обобщены на класс дискретных систем аналогичной структуры. В развитие теории абсолютной устойчивости существенный вклад внесли такие крупные исследователи: М.А. Айзерман, Р. Калман, В.А. Якубович, Я.З. Цыпкин, Е. Джури и многие другие.

Рассмотрим сначала класс нелинейных дискретных систем, для которых неопределенность в отношении свойств нелинейных в общем случае знакопеременных функций векторного аргумента задается в параметрической форме. Так же, как и выше, примем, что вектор состояния X_n измеряется полностью и без помех.

Рассмотрим часто встречающийся в приложениях класс объектов управления, состоящий из линейной и нелинейной частей

$$X_{n+1} = AX_n + F(X_n, L) + BU_n, \tag{22}$$

где $X_n \in \mathbf{R}^m$ — вектор состояния, A — матрица $(m \times m)$, для которой задана ее оценка, $U_n \in \mathbf{R}^m$ — вектор управления, B — матрица $(m \times m)$, $\det B \neq 0$.

В (22)

$$F(X_n, L) = \| l_i \tilde{f}_i(X_n) \|_{i=1}^{m},$$

где $\tilde{f}_i(\cdot)$ — заданные непрерывные однозначные нелинейные функции, такие что $F(0, L) = 0$ (остальные ее свойства оговорены ниже).

Для неизвестных параметров l_i, $i = \overline{1, m}$, вектора $L^{\mathrm{T}} = (l_1, l_2, \ldots, l_m)$ заданы их оценки

$$\mathbf{l}_i = \{l_i : \underline{l}_i \le l_i \le \bar{l}_i\}, \ \ i = \overline{1; m},$$

из которых следует оценка для вектора L

$$L \in \mathbf{L} = \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2 \times \ldots \times \mathbf{l}_m. \tag{23}$$

Примем, что для неуправляемого объекта (34)

$$X_{n+1} = AX_n + F(X_n, L)$$

достаточные условия робастной устойчивости, о которых речь пойдет ниже, не выполняются и поэтому стоит задача: выбором управления $U(X_n)$ стабилизировать семейство управляемых систем (22). Подставив $U(X_n)$ в (22), получим

$$X_{n+1} = F(X_n, L) + BU(X_n), \tag{24}$$

где $L \in \mathbf{L}$.

Выбор стабилизирующего управления для семейства систем (23), (24) осуществим ниже, а сейчас рассмотрим другой класс нелинейных систем, содержащий неопределенность. Примем, что для системы (22) нелинейные функции $\varphi_j(\cdot)$, $i=\overline{1;m}$, — элементы вектор-функции $F(\cdot)$ неизвестны и для них заданы лишь оценки сверху и снизу.

Примем, как и в [18, 19], что функции $\varphi_j(\cdot)$ — так называемые «секториальные» нелинейности, для которых заданы ограничения в виде

$$\underline{g}_i \sigma_i(X) \cdot \operatorname{sign} \sigma_i(X) \le f_i[\sigma_i(X)] \le \bar{g}_i \sigma_i(X) \cdot \operatorname{sign} \sigma_i(X), \quad i=\overline{1;m}, \tag{25}$$

или, что эквивалентно,

$$\underline{g}_i \left|\sigma_i(X)\right| \le f_i[\sigma_i(X)] \le \bar{g}_i \left|\sigma_i(X)\right|, \; i=\overline{1;m}. \tag{26}$$

В (25), (26)

$$\sigma_i(X) = C_i^{\mathrm{T}} X; \quad i=\overline{1;m}, \tag{27}$$

$C_i \in \mathbf{R}^m$ — заданные числовые векторы.

Приняв во внимание соотношения (26), перепишем уравнение семейства систем (24):

$$X_{n+1} = AX_n + GSX_n + BU_n, \tag{28}$$

где

$$G = \operatorname{diag}\{g_i\}_{i=1}^m; \quad S = \| C_i^{\mathrm{T}} \|_{i=1}^m,$$

$$g_i \in \mathbf{g}_i = \{g_i : \underline{g}_i \le g_i \le \bar{g}_i\},\, ; \; i=\overline{1;m}.$$

Таким образом, исследование системы (24)–(27) с неизвестной нелинейной вектор-функцией, для которой заданы линейные ограничения, погружено в исследование линейных систем с параметрической неопределенностью.

Введем обозначения

$$A' = A + P(G); \quad P(G) = GS,$$

где $G \in \mathbf{G}$, и перепишем (28) в виде

$$X_{n+1} = [A + P(G)]\, X_n + BU_n. \tag{29}$$

Множества $\mathbf{g}_i$, $i=\overline{1;m}$, представим в центрированном виде

$$\mathbf{g}_i = \overset{\circ}{g}_i + \delta\mathbf{g}_i, \quad i=\overline{1;m}, \tag{30}$$

где

$$\overset{\circ}{g}_i = 0{,}5(\bar{g}_i + \underline{g}_i); \quad i=\overline{1;m}, \quad \delta\mathbf{g}_i = \{\Delta g_i : \left|\Delta g_i\right| \le 0{,}5(\bar{g}_i - \underline{g}_i)\}, \quad i=\overline{1;m}. \tag{31}$$

Примем, что для матрицы A задана ее оценка, представленная в центрированной форме (9)–(11). С учетом (30), (31) перепишем (29) в виде

$$X_{n+1} = [\overset{\circ}{R}(\overset{\circ}{G}) + \Delta R(\Delta G)]\, X_n + BU_n, \tag{32}$$

где

$$\overset{\circ}{R}(\overset{\circ}{G}) = \overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{G} S; \quad \Delta R(\Delta G) = \Delta A + \Delta GS; \quad \overset{\circ}{G} = \operatorname{diag}\{\overset{\circ}{g}_i\}_{i=1}^m; \quad \Delta G = \operatorname{diag}\{\Delta g_i\}_{i=1}^m; \tag{33}$$

$$\Delta R\,(\Delta G) \in \delta\mathbf{A} + \delta\mathbf{G}; \quad \delta\mathbf{G} = \delta\mathbf{g}_1 \times \delta\mathbf{g}_2 \times \ldots \times \delta\mathbf{g}_m. \tag{34}$$

Отметим, что в (34) сумма множеств — сумма по Минковскому.

Соотношения (32)–(34) с точностью до обозначений совпадают с аналогичными соотношениями (9)–(11).

 ISSN 0572-2691

Синтез стабилизирующего управления. Для определения стабилизирующего управления $U(X_n)$ воспользуемся дискретным аналогом прямого метода Ляпунова и функцию Ляпунова примем в виде

$$\upsilon_n = X_n^{\mathrm{T}} X_n. \tag{35}$$

В силу (35) вычислим ее первую разность вдоль траектории движения системы (22)

$$\Delta\upsilon_n[X_n, L, U(X_n)] =$$

$$= [AX_n + F(X_n, L) + BU(X_n)]^{\mathrm{T}} \times [AX_n + F(X_n, L) + BU(X_n)] - X_n^{\mathrm{T}} X_n. \tag{36}$$

Искомую нелинейную вектор-функцию $U(X_n)$ будем искать как решение задачи

$$\min_{U_n} \{\Delta\upsilon[X_n, L, U(X_n)]\},$$

точнее говоря, из решения равносильной ей задачи

$$\min_{U_n} \{[AX_n + F(X_n, L) + BU_n]^{\mathrm{T}} \times [AX_n + F(X_n, L) + BU_n]\}. \tag{37}$$

Так как для вектора L задана только его оценка (23), то задача (37) некорректна. Поэтому для получения гарантированного результата заменим ее задачей

$$\min_{U_n} \max_{L \in \mathbf{L}} \{[AX_n + F(X_n, L) + BU_n]^{\mathrm{T}} \times [AX_n + F(X_n, L) + BU_n]\}. \tag{38}$$

Известно, что в общем случае минимаксные задачи не имеют аналитического решения. Задача (38) — счастливое исключение из этого правила. Для подтверждения этого множество $\mathbf{L}$ представим в центрированной форме

$$L \in \mathbf{L} = \overset{\circ}{L} + \delta\mathbf{L}, \tag{39}$$

где

$$\overset{\circ}{L} = \| \overset{\circ}{l}_i \|_{i=1}^{m}; \;\; \overset{\circ}{l}_i = 0{,}5(\bar{l}_i + \underline{l}_i); \;\; i = \overline{1; m}, \;\; \Delta L = \| \Delta l_i \|_{i=1}^{m}; \;\; \Delta l_i = 0{,}5(\bar{l}_i - \underline{l}_i), \;\; i = \overline{1; m}, \tag{40}$$

$$\delta\mathbf{L} = \delta\mathbf{l}_1 \times \delta\mathbf{l}_2 \times \ldots \times \delta\mathbf{l}_m; \;\; \delta\mathbf{l}_i = \{\Delta l_i : |\Delta l_i| \le 0{,}5(\bar{l}_i - \underline{l}_i)\}, \;\; i = \overline{1; m}. \tag{41}$$

Приведенные к центрированной форме оценки строк A_i^{T} матрицы A имеют вид (10), (11).

Введем обозначения

$$F(X_n, L) = \tilde{F}[X_n, (\overset{\circ}{L} + \Delta L)], \;\; W_n = B^{-1} U_n \tag{42}$$

и через $w_{i,n}$, $i = \overline{1; m}$, обозначим элементы вектора W_n.

Подставив (42) в (38), получим

$$\min_{w_{i,n}} \max_{\substack{\Delta l_i \in \mathbf{l}_i \\ \Delta A_i^{\mathrm{T}} \in \delta\mathbf{A}_i}} \left| [(\overset{\circ}{A}_i + \Delta A_i)^{\mathrm{T}} X_n + (\overset{\circ}{l}_i + \Delta l_i)\, \tilde{f}_i(X_n) + w_{i,n}] \right|, \; i = \overline{1; m}. \tag{43}$$

Теорема 1 [20]. Решения задач (43) имеют вид

$$w_{i,n} = \overset{*}{w}_{i,n} = -[\Delta A_i^{\mathrm{T}} X_n + \Delta l_i \tilde{f}_i(X_n)], \;\; i = \overline{1; m}. \tag{44}$$

Доказательство. Построим доказательство по схеме от противного, и пусть управления $\overset{*}{u}_{in}$ $(i = \overline{1; m})$ не являются решениями задач (43). Тогда примем, что $\overset{\vee}{w}_{in} = \overset{*}{w}_{in} + \Delta w_{in}$; $i = \overline{1; m}$, где Δw_{in} — произвольные функции.

Подставив $\overset{\vee}{w}_{in}$ в (43), получим

$$\max_{\Delta A_i^{\mathrm{T}} \in \delta \mathbf{A}_i;\, \Delta l_i \in \mathbf{l}_i} \left| \Delta A_i^{\mathrm{T}} X_n + \Delta l_i \tilde{f}_i(X_n) + \Delta w_{in} \right|, \; i = \overline{1; m}.$$

Среди вершин центрально-симметрических интервальных множеств $\Delta \mathbf{A}_i$, $\delta \mathbf{l}_i$ существуют векторы $\Delta A_i^{\mathrm{T}} \in \delta \mathbf{A}_i$ и величины $\Delta l_i \in \delta \mathbf{l}_i$ такие, что

$$\operatorname{sign}[\Delta A_i^{\mathrm{T}} X_n + \Delta l_i \tilde{f}_i(X_n)] = \operatorname{sign} \Delta u_{i,n}, \; i = \overline{1; m},$$

и, следовательно, для всех $i = \overline{1; m}$ выполняется

$$\max_{\Delta A_i^{\mathrm{T}} \in \delta \mathbf{A}_i,\, \Delta l_i \in \delta \mathbf{l}_i} \left| \Delta A_i^{\mathrm{T}} X_n + \Delta l_i \tilde{f}_i(X_n) + \Delta u_{i,n} \right| > \max_{\Delta A_i^{\mathrm{T}} \in \delta \mathbf{A}_i,\, \Delta l_i \in \delta \mathbf{l}_i} \left| \Delta A_i^{\mathrm{T}} X_n + \Delta l_i \tilde{f}_i(X_n) \right|,$$

что и требовалось доказать.

По найденному вектору $\overset{*}{W}$ из (44) определяем искомое управление

$$\overset{*}{U}_n = B^{-1} \overset{*}{W}_n = -[\Delta A X_n + \tilde{F}(X_n, \Delta L)]. \tag{45}$$

Подставив (45) в (24), получим уравнение, описывающее динамику управляемого семейства систем

$$X_{n+1} = \Delta A X_n + \tilde{F}(X_n, \Delta L), \tag{46}$$

где $\Delta A \in \delta \mathbf{A}$; $\Delta L \in \delta \mathbf{L}$.

Несмотря на то, что управление (45) получено из решения задач минимизации первой разности функции Ляпунова, из этого еще не следует, что $\Delta \upsilon_n < 0$ для всего семейства систем (46), (39), поскольку этот класс систем может быть настолько широк (радиус $\rho(\delta \mathbf{L})$ множества $\delta \mathbf{L}$ настолько велик), что обеспечить одним общим для всего семейства систем (46), (39) управлением его стабилизируемость невозможно. Поэтому необходима проверка выполнения достаточных условий робастной устойчивости систем (46), (39), о которой речь пойдет ниже.

Рассмотрим теперь случай, когда в уравнении (22) $A = 0$, т.е. систему

$$X_{n+1} = F(X_n, L) + BU_n.$$

В этом случае задачи (43) приобретают вид

$$\min_{w_{in}} \max_{\Delta l_i \in \mathbf{l}_i} \left| \Delta l_i \tilde{f}_i(X_n) + w_{in} \right|, \; i = \overline{1; m}. \tag{47}$$

Так как эти задачи — частный случай задач (43) ($\delta \mathbf{A}_i = \varnothing$), то справедливо следующее.

Следствие теоремы 1. Решения задач (47) имеют вид

$$w_{in} = \overset{*}{w}_{in} = -\Delta l_i \tilde{f}_i(X_n), \; i = \overline{1; m}.$$

По найденному вектору $\overset{*}{W}_n$ из (47) определяем искомое управление

$$\overset{*}{U}_n = -B^{-1} \overset{*}{W}_n = -\tilde{F}(X_n, \Delta L).$$

Подставив управление $\overset{*}{U}_n$ в (46) и приняв, что $\Delta A = 0$, получим уравнение управляемого семейства систем $X_{n+1} = \tilde{F}(X_n, \Delta L)$, где $\Delta L \in \delta \mathbf{L}$.

Поскольку это соотношение — частный случай соотношения (46), то вопрос об устойчивости этого класса систем нет необходимости рассматривать отдельно.

Анализ устойчивости семейства нелинейных систем. Откажемся от избыточного в приложениях требования обеспечения устойчивости «в целом» синтезированных выше семейств нелинейных систем и ограничимся требованием их устойчивости лишь в области

$$\overset{\circ}{\mathbf{X}} = \{X : \max_{X \in \overset{\circ}{\mathbf{X}}} \|X\| \le \overset{\circ}{\rho}\}$$

и примем, что $X_n \in \mathbf{X}_n \subset \overset{\circ}{\mathbf{X}}$.

Начнем с анализа устойчивости в области $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$ семейства систем (46). Эта задача решается достаточно просто для того класса нелинейных вектор-функций, которые могут быть представлены в квазилинейной форме

$$X_{n+1} = \widetilde{F}(X_n, \Delta L) = A(X_n, \Delta L)\, X_n, \tag{48}$$

где $\Delta L \in \delta\mathbf{L}$.

Для семейства систем (48) достаточным условием их устойчивости в области $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$ является выполнение неравенства (принципа сжатых отображений)

$$\max_{X_n \in \overset{\circ}{\mathbf{X}},\ \Delta L \in \delta\mathbf{L}} \|A(X_n, \Delta L)\| \le q < 1, \tag{49}$$

проверяемого элементарно.

Представление нелинейной вектор-функции $F(\cdot)$ в квазилинейной форме (48) неединственно. Отметим, что в приложениях первичной формой представления нелинейных статических (без памяти) элементов является нелинейная вектор-функция $F(X)$, во многих случаях не допускающая запись ее в квазилинейной форме (48). Покажем это на простейшем примере. Если, следуя Е.А. Барбашину [21], выражение (48) записать

$$a_i(X) = \frac{f_i(X)}{x_i}, \;\; i = \overline{1; m};$$

то нетрудно убедиться, что класс функций, допускающий представление их в квазилинейной форме, достаточно узок. Действительно, пусть $f(x) = |x|^{0,5}$. Представим эту функцию в квазилинейной форме $f(x) = a(x)\,x$, где

$$a(x) = \frac{|x|^{0,5}}{x} = \frac{1}{|x|^{0,5} \cdot \operatorname{sign} x}. \tag{50}$$

При любом доопределении функции $\operatorname{sign} 0$: $\operatorname{sign} 0 = 1$ или $\operatorname{sign} 0 = 0$, из (50) получим $a(0) = \dfrac{1}{0} = \infty$.

Поэтому рассмотрим достаточные условия устойчивости «в области» семейств нелинейных систем, несводимых к представлению их в квазилинейной форме. Для анализа устойчивости семейства нелинейных систем (46) «в области» воспользуемся результатами [22] и эволюцию этого семейства систем запишем в терминах разностных включений $X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1} = \Phi(\mathbf{X}_n, \delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{L})$, где $\Phi(\cdot) = \bigcup \widetilde{F}(X_n, \Delta A, \Delta L)$.

В общем случае преобразование $\Phi(\cdot)$ определяет невыпуклое множество $\mathbf{X}_{n+1}$, точное определение которого связано с существенными трудностями вычислительного характера. Поэтому, как было предложено в работе [23], введем его оценку сверху, аппроксимировав его интервальным множеством минимального объема, и далее будем анализировать устойчивость полученного нелинейного разностного включения

$$X_{n+1} \in \overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \overline{\Phi}(\mathbf{X}_n, \delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{L}) = \overline{\mathbf{x}}_{1,n+1} \times \overline{\mathbf{x}}_{2,n+1} \times \ldots \times \overline{\mathbf{x}}_{m,n+1}, \tag{51}$$

где

$$\overline{\mathbf{x}}_{i,n+1} = \bigcup \{(\Delta A_i)^{\mathrm{T}} X_n + \Delta l_i \widetilde{f}_i(X_n) : X_n \in \mathbf{X}_n, \Delta A_i^{\mathrm{T}} \in \delta\mathbf{A}_i, \Delta l_i \in \delta\mathbf{l}_i\}, \;\; i = \overline{1; m}.$$

Отметим, что множества $\overline{\mathbf{x}}_{i,n+1}, i = \overline{1; m},$ — проекции множества $\mathbf{X}_{n+1}$ на соответствующую координатную ось Ox_i. Для определения множеств $\overline{\mathbf{x}}_{i,n+1}$ $(i = \overline{1; m})$ рассмотрим задачи

$$\min_{X_n \in \mathbf{X}_n, \, \Delta A_i^{\mathrm{T}} \in \delta\mathbf{A}_i, \, \Delta l_i \in \delta\mathbf{l}_i} [(\Delta A_i)^{\mathrm{T}} X_n + \Delta l_i \widetilde{f}_i(X_n)] = \underline{x}_{i,n+1}, \;\; i = \overline{1; m}; \tag{52}$$

$$\max_{X_n \in \mathbf{X}_n, \, \Delta A_i^{\mathrm{T}} \in \delta\mathbf{A}_i, \, \Delta l_i \in \delta\mathbf{l}_i} [(\Delta A_i)^{\mathrm{T}} X_n + \Delta l_i \widetilde{f}_i(X_n)] = \overline{x}_{i,n+1}, \;\; i = \overline{1; m}. \tag{53}$$

Полученные значения $\underline{x}_{i,n+1}$, $\overline{x}_{i,n+1}$ $(i = \overline{1; m})$ определяют интервальные множества

$$\overline{\mathbf{x}}_{i,n+1} = \{x_i : \underline{x}_{i,n+1} \le x_{i,n+1} \le \overline{x}_{i,n+1}\}, \; i = \overline{1; m},$$

подставив которые в (51), получим множество $\overline{\mathbf{X}}_{n+1}$.

Задачи отыскания (в общем случае) глобальных экстремумов функций $\widetilde{f}_i(X_n)$ могут оказаться слишком трудоемкими в вычислительном отношении. В приложениях часто известны некоторые важные свойства этих функций, которые позволяют конструктивно решать задачи отыскания экстремумов (52), (53). Так если ограничиться рассмотрением только выпуклых (вогнутых) на множестве $\mathbf{X}_n$ функций, то решения задач (52), (53) можно эффективно отыскать с помощью известных программ решения задач нелинейной оптимизации.

Поскольку результатом преобразования $\Phi(\cdot)$ множества $\mathbf{X}_n$ общего вида является интервальное множество $\overline{\mathbf{X}}_{n+1}$, то ниже примем, что оценки (6)–(8) имеют вид

$$\mathbf{X}_n = \underset{k=1;2^m}{\underline{\mathrm{conv}}} \{X_n^k\},$$

где X_n^k — k-я вершина m-мерного куба $\mathbf{X}_n$. Введем такую скалярную характеристику множества $\mathbf{X}$ как его радиус:

$$\rho(\mathbf{X}) = \max_{X \in \mathbf{X}} \{\|X\|_I\}, \tag{54}$$

где $\|X\|_I = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$.

Для анализа устойчивости нелинейного разностного включения

$$X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_n) \tag{55}$$

воспользуемся теоремой [23] и ее следствием. Так как функция (54) положительно-определенная, то она принята в качестве функции Ляпунова и в [23] метод анализа асимптотической устойчивости Ляпунова или, другими словами, принцип сжатых отображений обобщен на класс нелинейных разностных включений.

Теорема 2 [23]. Если первая разность функции Ляпунова

$$\Delta\upsilon_n = \upsilon_{n+1} - \upsilon_n = \rho[\mathbf{F}(\mathbf{X}_n)] - \rho(\mathbf{X}_n) < 0 \quad \forall n \tag{56}$$

отрицательно-определенная, то тривиальное решение разностного включения (55) асимптотически устойчиво.

Следствие. Если начало координат — центр множества $\mathbf{X}_n$, т.е. центр сферы минимального радиуса, описанной вокруг $\mathbf{X}_n$, является началом координат, то значение функции $\rho(\mathbf{X}_n)$, вычисленной по соотношению (54) при использовании нормы $\|X\|_I$, совпадает с радиусом описанной сферы, и из выполнения неравенства (56) следует, что имеет место включение

$$\mathbf{X}_{n+1} \subset \mathbf{X}_n. \tag{57}$$

Нетрудно показать, что для интервальных множеств $\mathbf{X}_n$ и $\mathbf{X}_{n+1}$ с центрами в начале координат строгое включение (57) имеет место если и только если, по крайней мере, одно из системы нестрогих неравенств $\underline{x}_{i,n+1} \geq \underline{x}_{i,n}$, $\overline{x}_{i,n+1} \leq \overline{x}_{i,n}$, $i = \overline{1; m}$, является строгим.

Примем, что свойства вектор-функции $F(\cdot)$ и множества $\mathbf{A}$ и $\mathbf{L}$ таковы, что для множества $\overline{\mathbf{X}}_{n+1}$ имеет место включение

$$\overline{\mathbf{X}}_{n+1} \subset \overline{\mathbf{X}}_n, \tag{58}$$

что является достаточным условием устойчивости нелинейного разностного включения (51).

Если условие (58) не выполняется, то из этого следует, что при принятых оценках параметров класс систем (46) настолько широк, что не существует управления, стабилизирующего семейство систем, робастная устойчивость которого проверяется по достаточному условию устойчивости (58).

Заключение

Полученное аналитическое решение задачи определения оптимального управления как для семейств линейных, так и нелинейных систем в сочетании с использованием обобщения дискретного аналога прямого метода Ляпунова на класс нелинейных разностных включений позволило выполнить качественный анализ устойчивости управляемого семейства нелинейных систем и предложить легко проверяемые условия их робастной устойчивости «в области».

Использование достаточного условия устойчивости семейства линейных дискретных систем (принципа сжатых отображений) позволило предложить конструктивный метод проверки этого условия.

В.М. Кунцевич

СТАБІЛІЗАЦІЯ СІМЕЙ ЛІНІЙНИХ ТА НЕЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

В аналітичній формі отримано розв’язок мінімаксної задачі оптимальної стабілізації сімей лінійних та нелінійних дискретних динамічних систем. Оскільки у загальному випадку класи цих систем можуть бути настільки широкими, що не існують керування, які забезпечують їх робастну стійкість, запропоновано конструктивні методи перевірки достатніх умов стійкості, що базуються на використанні принципу стиснених зображень та його узагальненні.

V.M. Kuntsevich

STABILIZATION OF FAMILIES OF LINEAR AND NONLINEAR DISCRETE DYNAMICAL SYSTEMS

A solution to minimax problem of optimal stabilization of families of linear and nonlinear discrete dynamical systems is presented in the analytical form. In general, there are no controls providing the robust stability for the considered wide classes of systems. The suggested solution is based on the constructive method of verification of fulfilment of the robust stability sufficient conditions with the use of the principle of contracting mappings and its generalization.

1. *Харитонов В.Л.* Асимптотическая устойчивость положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Диф. уравнения. — 1978. — С. 2086–2088.
2. *Bartlett A.C., Hollot C.V., Lin H.* Root location of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges // Math. Contr. Sig. Syst. — 1988. — **1**. — P. 61–71.
3. *Barmish B.R., Kang A.* Survey of extreme point results for robustness of control systems // Automatica. — 1993. — **29**, N 1. — P. 13–35.
4. *Nemirovskii A.A.* Several *NP*-hard problems arising in robust stability analysis // Math. Contr. Sig. Syst. — 1994. — **6**. — P. 99–105.
5. *Жолен Л, Кифер М., Дидри О., Вальтер Э.* Прикладной интервальный анализ. — М. : Ижевск : Ин-т компьют. исследований, 2005. — 468 с.
6. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М. : Наука, 1977. — 392 с.
7. *Schweppe F.C.* Recursive state estimation: unknown but bounded error and system inputs // IEEE Trans. Automat Control. — 1968. — **AC-13**, N 1. — P. 22–28.
8. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. — М. : Наука, 1988. — 320 с.
9. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. — М. : Наука, 2002. — 273 с.
10. *Кунцевич В.М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — Киев : Наук. думка, 2006. — 264 с.
11. *Blanchini F., Miani S.* Set-theoretic methods in control. — Boston : Birkhauser, 2008. — 481 p.
12. *Kogan J.* Robust stability and convexity. — London: Springer-Verlag, 1995. — 176 p.
13. *Abrishamchian M., Barmish B.* Reduction of robust stabilization problem to standard H^{∞} problems for classes of systems with unstructured uncertainty // Automatica. — 1996. — **32**, N 8. — P. 1101–1115.
14. *Мазко А.Г.* Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств // Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. — 2016. — **102**. — 332 с.
15. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. — М. : Наука, 1975. — 494 с.
16. *Волосов В.В.* К построению параметрических семейств эллипсоидальных оценок и их оптимизации в задачах нестохастической идентификации параметров и состояния многомерных дискретных объектов управления // Проблемы управления и информатики. — 1996. — № 4. — С. 37–53.
17. *Цыпкин Я.З., Поляк Б.Т.* Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. — 1991. — **32**. — С. 3–31.
18. *Лурье А.И., Постников В.Н.* К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. — 1944. — **8**, вып. 3. — С. 246–248.
19. *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. — М. : Изд-во АН СССР, 1963. — 261 с.
20. *Кунцевич В.М.* Управление семейством нелинейных динамических систем при измерениях с ограниченными помехами // Труды ИММ УрО РАН. — 2014. — **20**, № 4. — С. 180–186.
21. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. — М. : Наука, 1978. — 287 с.
22. *Кунцевич А.В., Кунцевич В.М.* Устойчивость в области нелинейных разностных включений // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 5. — С. 11–17.
23. *Кунцевич В.М., Куржанский А.Б.* Области достижимости линейных и некоторых классов нелинейных дискретных систем и управление ими // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2010. — № 1. — С. 5–21.

Получено 13.09.2016