УДК 62.501.52

Л.Т. Мовчан, С.Л. Мовчан

ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНОГО *D*-РАЗБИЕНИЯ

Введение

В настоящей статье, которая является продолжением предыдущих работ авторов, предлагается новый алгоритм построения границы области устойчивости линейных дискретных систем управления в пространстве параметров, нелинейно входящих в коэффициенты характеристического уравнения. Известно, что при исследовании реальных систем автоматического управления недостаточным является решение классической задачи определения устойчивости фиксированной линейной дискретной системы. Это обусловлено тем, что параметры реального объекта управления в процессе работы могут изменяться, и на практике тяжело установить параметры цифровых регуляторов в точном соответствии с параметрами объекта. Поэтому практическое значение имеет построение области устойчивости (ОУ) в пространстве параметров исследуемой системы.

В наиболее общем случае весьма удобным методом построения границы области устойчивости (ГОУ) в пространстве параметров дискретных линейных систем является метод дискретного *D*-разбиения [1, 2], который представляет собой отображение единичного круга комплексной плоскости корней характеристического уравнения системы в пространство коэффициентов или параметров системы, линейно входящих в это уравнение. Методом дискретного *D*-разбиения можно определить области, отвечающие заданному числу корней характеристического уравнения внутри единичной окружности в случае, когда параметры системы входят линейно и так, что уравнение границы дискретного *D*-разбиения по одному параметру имеет вид

$$D(e^{j\overline{\omega}}) = kH(e^{j\overline{\omega}}) + L(e^{j\overline{\omega}}) = 0. \qquad (1)$$

Здесь k — параметр, который линейно входит в коэффициенты системы, $\overline{\omega} = \omega T$ — относительная частота, T — период дискретизации, а уравнение границы дискретного *D*-разбиения по двум параметрам запишем

$$D(e^{j\overline{\omega}}) = \nu P(e^{j\overline{\omega}}) + \mu Q(e^{j\overline{\omega}}) + L(e^{j\overline{\omega}}) = 0, \qquad (2)$$

где v и μ — изменяемые параметры, влияние на устойчивость которых нас интересует.

Исследования области устойчивости с помощью метода *D*-разбиения — одна из важных проблем современной теоремы линейных дискретных систем [3–9].

В работах [3, 4] рассматривается *D*-разбиение пространства параметров, линейно входящих в коэффициенты дискретного характеристического полинома. Подробно изучены геометрические свойства *D*-разбиения для полиномов, число параметров которых не больше двух. Утверждается, что во многих случаях область устойчивости связана. Отрытым остается вопрос, каково максимальное количество областей устойчивости.

Большое количество вопросов по тематике исследования структуры разбиения пространства параметров на области с различным количеством устойчивых корней требует решения и представляет интерес для дальнейших исследований. Среди них — случай нелинейной зависимости коэффициентов характеристического полинома от параметров [3, 4].

В работах [5, 6] исследуется «геометрия» областей устойчивости линейных дискретных систем в плоскости коэффициентов характеристического полинома. Анализируется геометрия граничной кривой D-разбиения, устанавливаются ее свойства, общие для линейной дискретной системы любого порядка.

В иностранной литературе метод D-разбиения получил распространение в работах [7–9], в которых исследуются области устойчивости в пространстве коэффициентов и линейно входящих параметров характеристических полиномов линейных систем.

Специфика метода D-разбиения такова, что сначала определяются границы всех областей в плоскости двух параметров с различным количеством корней характеристического уравнения внутри единичной окружности для дискретных систем или с различным количеством корней характеристического уравнения с отрицательной действительной частью для непрерывных систем, а после этого выделяются границы области устойчивости.

При изменении ω от $-\infty$ до ∞ для непрерывных систем и от 0 до π для дискретных систем кривые D-разбиения претерпевают бесконечные разрывы второго рода и ветви уходят в бесконечность. Переплетение границ областей устойчивости, особых прямых и «посторонних» линий, которые не являются ГОУ, могут принимать причудливые формы, и выбор действительных кривых оказывается весьма трудной задачей при реализации метода D-разбиения. Трудность состоит и в реализации «штриховки по Неймарку», и отсеивании «паразитных» кривых [10]. Поэтому в работах [11, 12] делается попытка определения границы области устойчивости в плоскости двух линейно входящих параметров, исключая построение всей кривой D-разбиения. Предложенный подход не требует использования «штриховки по Неймарку» и обеспечивает полноценную машинную реализацию задачи построения ГОУ.

Для решения данной задачи уравнение (1) представим в виде

$$k = \frac{-L_1(\overline{\omega})H_1(\overline{\omega}) - L_2(\overline{\omega})H_2(\overline{\omega})}{H_1^2(\overline{\omega}) + H_2^2(\overline{\omega})} + j\frac{L_1(\overline{\omega})H_2(\overline{\omega}) - L_2(\overline{\omega})H_1(\overline{\omega})}{H_1^2(\overline{\omega}) + H_2^2(\overline{\omega})} = U(\overline{\omega}) + jV(\overline{\omega}), \tag{3}$$

где $H_1(\overline{\omega}), L_1(\overline{\omega})$ — действительные части, а $H_2(\overline{\omega}), L_2(\overline{\omega})$ — мнимые части полиномов $H(e^{j\overline{\omega}})$ и $L(e^{j\overline{\omega}})$.

Поскольку параметр k — действительная, физически значимая величина, то уравнения границы D-разбиения можно представить в виде

$$k = \frac{-L_1(\overline{\omega})H_1(\overline{\omega}) - L_2(\overline{\omega})H_2(\overline{\omega})}{H_1^2(\overline{\omega}) + H_2^2(\overline{\omega})}, \tag{4}$$

$$V(\overline{\omega}) = L_1(\overline{\omega})H_2(\overline{\omega}) - L_2(\overline{\omega})H_1(\overline{\omega}) = 0. \tag{5}$$

В отличие от классической задачи построения ОУ методом D-разбиения, где для получения точек кривой D-разбиения изменяют $\overline{\omega}$, будем изменять параметр μ от предварительного заданного значения μ_{min} до значення μ_{max} ($\mu_{min} < \mu_{nom} < \mu_{max}$), что представляет практический интерес. Для каждого значения μ ($\mu_{min} \le \mu \le \mu_{max}$) вычисляем из уравнения (5) значения частот $\overline{\omega}$, которые совместно с соответствующими значениями μ определяют действительные значения k' и k'' параметра k.

Значения k' и k'' — границы отрезка устойчивости для конкретного значения параметра μ и соответствующего значения $\bar{\omega}$ в плоскости параметра [k], определяются из уравнения (4). Совокупность значений k' и k'' для всех значений μ ($\mu_{min} \leq \mu \leq \mu_{max}$) соответствует точной ГОУ в плоскости параметров [k, μ].

Таким образом, задача построения границы области устойчивости в плоскости двух параметров сведена к задаче решения уравнения границы дискретного D-разбиения по одному параметру, что исключает построение всей кривой D-разбиения и особых прямых. Но, как отмечалось в [13], дальнейшее развитие метода D-разбиения было связано с принципиальной трудностью: параметрами реальной системы служат параметры, характеризующие ее элементы и звенья (например, постоянные времени, коэффициенты усиления звеньев и т.д.), а коэффициенты характеристического уравнения — сложная нелинейная функция этих параметров. Поэтому не всегда можно выбрать два независимых параметра в системе, а коэффициенты характеристического уравнения, как правило, зависимы. Возникающие в этой связи трудности до сих пор не преодолены.

В отдельных случаях для непрерывных систем, параметры которых входят нелинейно в виде их произведения в характеристическое уравнение, задачу удастся свести к линейной в пространстве двух параметров. Известно, что в общем случае коэффициенты характеристического уравнения дискретной системы зависят от параметров системы нелинейно. Кроме того, часто в коэффициенты передаточной функции оптимальных цифровых регуляторов нелинейно входят параметры объекта управления [14], поэтому свести определение области устойчивости цифровой системы в пространстве двух, а тем более трех, таких параметров к чисто линейной задаче не удается.

Когда система имеет высокий порядок и параметры, в пространстве которых определяются границы области устойчивости, входят нелинейно, применяют численные методы с использованием ЭВМ [14–16]. Эти методы позволяют решить задачу построения области устойчивости линейных систем перебором большого числа точек на плоскости двух параметров с помощью принципа взаимно перпендикулярной ориентации (при котором направление изменения параметров осуществляется по четырем возможным направлениям: вверх, вниз, влево, вправо, т.е. по сторонам квадрата) [15, 16], «гусеничного» метода (последовательное продвижение вдоль границы ОУ с помощью поступательных перемещений и поворотов) и симплексного принципа слежения [15]. При этом вычислительную процедуру определения устойчивости или неустойчивости системы для разных значений двух параметров, которые соответствуют рассматриваемым точкам, предлагается проводить по одному из известных алгоритмов (Гурвица, Рауса, Льенара–Шипара и т.д.) или вычислением корней характеристического уравнения.

В [14] перебор точек в плоскости параметров цифровой системы осуществляют вращением по эллипсу вектора вокруг известной точки границы ОУ, конец которого с помощью решения характеристического уравнения определяет новые значения кривой этой границы.

Очевидно, что метод перебора параметров, будучи наиболее общим, неэкономичен с точки зрения машинной реализации при повышении точности определения ГОУ и не гарантирует корректности результата, особенно если искомая область имеет малые размеры и сложную конфигурацию. Еще больше увеличиваются затраты вычислительных ресурсов при определении методом перебора границы ОУ цифровых систем, что обусловлено сложной нелинейной зависимостью коэффициентов характеристического уравнения от параметров системы и процедурой поиска первой точки границы области устойчивости [14]. Тогда эффективным будет определение области устойчивости цифровых систем в пространстве двух параметров, которые нелинейно входят в коэффициенты характеристического уравнения, с помощью ЭВМ, применяя метод дискретного D-разбиения, который комбинируется с численным методом перебора только одного параметра в однозначно определенном направлении, без определения устойчивости или неустойчивости в каждой точке перебора.

В работе [17] задача построения области устойчивости линейной дискретной системы в плоскости двух параметров ν и μ, которые нелинейно входят в коэффициенты характеристического уравнения, решается следующим образом: для каждого конкретного наперед заданного значения параметра v ГОУ, который изменяется с шагом Δv от заданного значения $v_{\min}$ до значения $v_{\max}$ ($v_{\min} < v_{\mathrm{nom}} < v_{\max}$), что представляет практический интерес, определяют путем перебора в однозначно определенном направлении параметр μ, при котором удовлетворяются условия уравнения границы D-разбиения (4), (5) при фиксированных значениях других параметров. Последовательное приближение к точке искомой границы области устойчивости прекращается, когда удовлетворяются условие $| k_{\mathrm{qiven}} - k_{\mathrm{ni}} | \le \Delta k$, где k_{qiven} — предварительно выбранное значение параметра k (обычно соответствует номинальному значению), Δk — значение, определяющее точность построения ГОУ, k_{ni} — значение параметра k, определено из (4) для заданного v_{i}, выбранного на очередном шаге изменения μ_{ni}, определенного из (5) ω_{ni} и фиксированных других параметров. Совокупность заданных значений v ($v_{\min} \le v \le v_{\max}$) и соответствующие им значения параметров μ, полученные путем перебора, составляют границу области устойчивости исследуемой системы.

В цифровых системах автоматического управления большинство параметров нелинейно входит в коэффициенты дискретной передаточной функции. Поэтому в настоящей статье, развивая предложенный в работе [17] подход построения ГОУ в плоскости двух нелинейно входящих параметров, исключается выделение линейного входящего параметра и существенно упрощается алгоритм определения направления изменения нелинейно входящего параметра μ. При этом для определения ОУ используется уравнение границы D-разбиения в общем случае:

$$D(e^{j\overline{\omega}}) = a_0 e^{jn\overline{\omega}} + a_1 e^{j(n-1)\overline{\omega}} + \ldots + a_{n-1} e^{j\overline{\omega}} + a_n = 0. \qquad (6)$$

Решение задачи определения ГОУ

Уравнение границы области дискретного D-разбиения (6) представим в виде

$$D(e^{j\overline{\omega}}) = U(\overline{\omega}) + jV(\overline{\omega}) = 0,$$

где $U(\overline{\omega}) = a_0 \cos n\overline{\omega} + a_1 \cos(n-1)\overline{\omega} + \ldots + a_{n-1} \cos\overline{\omega} + a_n$,

$$V(\overline{\omega}) = a_0 \sin n\overline{\omega} + a_1 \sin(n-1)\overline{\omega} + \ldots + a_n \sin\overline{\omega}. \qquad (7)$$

Учитывая, что

$$\sin 2\overline{\omega} = 2\sin\overline{\omega}\cos\overline{\omega}, \;\; \sin 3\overline{\omega} = \sin\overline{\omega}(4\cos^2\overline{\omega} - 1),$$

$$\sin 4\overline{\omega} = \sin\overline{\omega}(8\cos^3\overline{\omega} - 4\cos\overline{\omega}), \;\; \sin 5\overline{\omega} = \sin\overline{\omega}(16\cos^4\overline{\omega} - 12\cos^2\overline{\omega} + 1),$$

$$\sin 6\overline{\omega} = \sin\overline{\omega}(32\cos^5\overline{\omega} - 32\cos^3\overline{\omega} + 6\cos\overline{\omega}), \qquad (8)$$

$$\sin 7\overline{\omega} = \sin\overline{\omega}(64\cos^6\overline{\omega} - 80\cos^4\overline{\omega} + 24\cos^2\overline{\omega} - 1) \;\; \text{и т.д.},$$

и приравнивая отдельно вещественную и мнимую части к нулю, окончательно получаем уравнение кривой D-разбиения в виде

$$U(\overline{\omega}) = a_0 \cos n\overline{\omega} + a_1 \cos(n-1)\overline{\omega} + ... + a_{n-1} \cos \overline{\omega} + a_n = 0\,, \qquad (9)$$

$$V(\overline{\omega}) = \sin \overline{\omega}(A_1 \cos^{n-1} \overline{\omega} + A_2 \cos^{n-2} \overline{\omega} + ... + A_{n-1} \cos \overline{\omega} + A_n) = 0\,, \qquad (10)$$

где A_1, $A_{2,...}$ $A_{n\text{-}1}$, A_n включают в себя коэффициенты характеристического уравнения и формул (8).

Для определения границы области устойчивости можно использовать подход, аналогичный представленному в [17]. Задаемся наперед значениями нелинейного параметра v ГОУ, который изменяется с выбранным шагом Δv от заданного значения $v_{\min}$ до значения $v_{\max}(v_{\min} \le v_{\text{nom}} \le v_{\max})$, что представляет практический интерес. Для каждого значения ν определяют путем перебора в однозначно определенном направлении значение другого нелинейного параметра μ, при котором соблюдаются условия (9), (10) $(U(\overline{\omega}) = 0$ и $V(\overline{\omega}) = 0$ или достаточно близки к нулю при фиксированных остальных параметрах). В отличие от подхода, предложенного в работе [17], исключается выделение линейно входящего параметра и алгоритм определения направления перебора параметра μ существенно упрощен.

Для нахождения первой точки ГОУ при $v = v_0 = v_{\min}$ задаемся исходным значением параметра μ_{01}. Из уравнения $V(\overline{\omega}) = 0$ вычисляем значение $\overline{\omega}_{01}$, отвечающее заданному значению v и выбранному значению μ_0. Определяем значение $U(\overline{\omega})$ в точках v_0, μ_{01}, $\overline{\omega}_{01}$. Если $U(\overline{\omega}_{01})$ достаточно близко к нулю, т.е. $U(\overline{\omega}_{01}, \nu_0, \mu_{01}) < \Delta \mathrm{U}$, где ΔU — значение, определяющее точность построения ГОУ, то процесс определения первой точки границы области устойчивости заканчивается и параметры v_0, $\mu_0 = \mu_{01}$ определяют первую точку ГОУ, в противном случае направленная процедура поиска точки ГОУ продолжается.

Очевидно, что определение значения параметра μ_{0n}, который соответствует точке границы области устойчивости, сводится к численному решению нелинейного уравнения $U(\overline{\omega}) = 0$. Поэтому для определения следующего значения μ_{0i} используем итерационную формулу [18], полученную путем замены производной $U'(\overline{\omega})$ разностью последовательных значений функции $U(v_0, \mu_{0i}, \overline{\omega}_{0i})$:

$$\mu_{0i} = \mu_{0(i-1)} - U(\nu_0, \mu_{0(i-1)}, \overline{\omega}_{0(i-1)}) \frac{\mu_{0(i-1)} - \mu_{0(i-2)}}{U(v_0, \mu_{0(i-1)}, \overline{\omega}_{0(i-1)} - U(v_0, \mu_{0(i-2)}, \overline{\omega}_{0(i-2)})},$$

$$\mu_{0(i+1)} = \mu_{0i} - U(v_0, \mu_{0i}, \overline{\omega}_{0i}) \frac{\mu_{0i} - \mu_{0(i-1)}}{U(v_0, \mu_{0i}, \overline{\omega}_{0i}) - U(v_0, \mu_{0(i-1)}, \overline{\omega}_{0(i-1)})},\ i = 2, 3, \ldots, n. \quad (11)$$

Аналогично, используя итерационную формулу $\mu_{k(i+1)} = \mu_{ki} - U(v_k, \mu_{ki}, \overline{\omega}_{ki}) \times$ $\times \dfrac{\mu_{ki} - \mu_{k(i-1)}}{U(v_k, \mu_{ki}, \overline{\omega}_{ki}) - U(v_k, \mu_{k(i-1)}, \overline{\omega}_{k(i-1)})}$, определяем значения параметра μ при $|U(v_k, \mu_{ki}, \overline{\omega}_{ki})| < \Delta U$ для всех значений параметра $v(v_0 = v_{\min} \le v \le v_{\max})$, который меняется с выбранным шагом Δv. При этом для каждого следующего значения параметра $v_{k+1} = v_k + \Delta v$ начальное значение параметра $\mu_{(k+1),1}$ выбираем равным конечному значению μ_{kn} для предыдущего значения параметра v_k, что значительно уменьшает время определения точек границы области устойчивости.

Результатом таких расчетов есть набор значений μ совместно с соответствующими значениями $v(v_{\min} = v_0 \le v \le v_{\max})$, которые определяют точки ГОУ в плоскости параметров $[v, \mu]$ при фиксированных значениях остальных параметров системы. Чем меньше шаг Δv изменения параметра v, тем меньше расчетов в цикле определения соответствующего параметра μ, но больше количество самих циклов определения данного параметра.

Блок-схема алгоритма определения ГОУ в плоскости параметров $[v, \mu]$ представлена на рис.1.

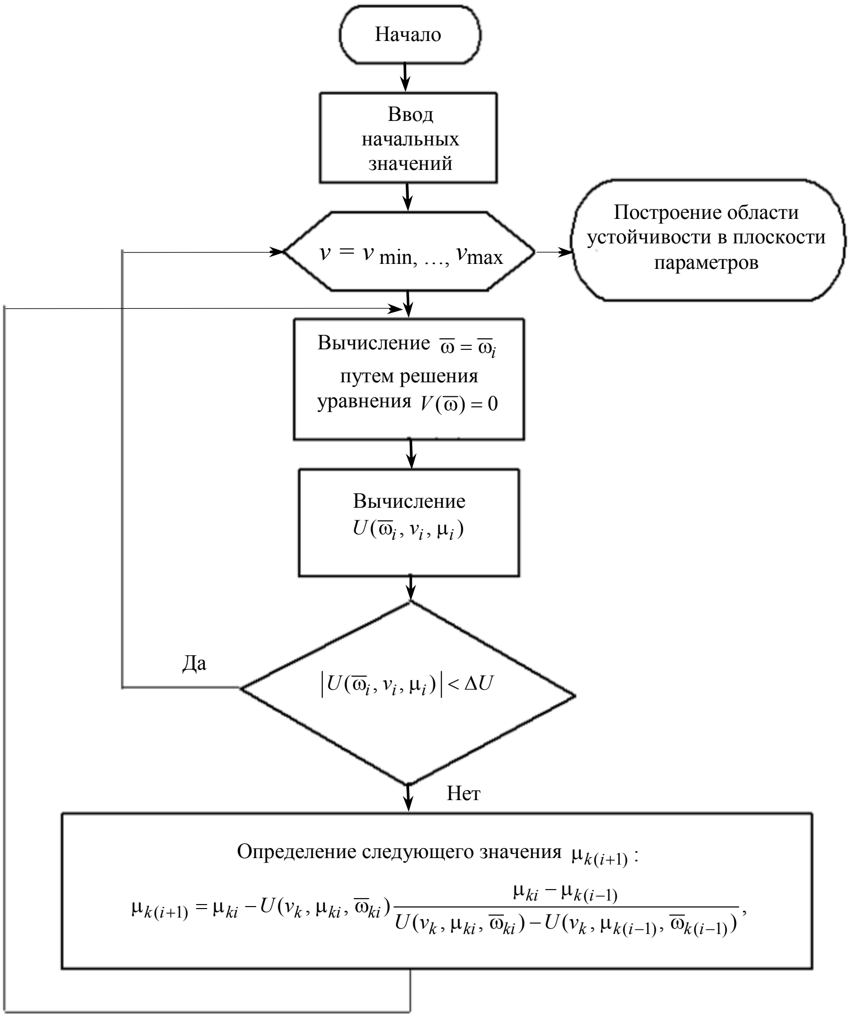

Рис. 1

Очевидно, что изменяя третий параметр, входящий нелинейно в коэффициенты характеристического уравнения, в пределах, которые представляют практический интерес, с помощью предлагаемого подхода можно построить ГОУ в пространстве трех параметров.

Рассмотренный подход можно использовать и для построения границ областей устойчивости дискретных систем с заданной степенью устойчивости и заданной колебательностью.

Пример. Для иллюстрации возможности практического использования и преимущества предложенного подхода, как и в работе [17], рассмотрим по-

 ISSN 0572-2691

строение области устойчивости системы стабилизации по углу тангажа самолета, когда заданы значения параметров для конкретного 34-го режима полета [19].

Для сравнительного анализа используем границы области устойчивости исследуемой системы, построенную в [17] методом перебора точек двух параметров цифровой системы [14] и ОУ, построенную с помощью подхода, ранее предложенного авторами. Суть метода [14] заключается в том, что вокруг любой известной точки на границе по эллипсу вращается вектор $\overline{R} = KR\cos\varphi + jMR\sin\varphi$, конец которого устанавливает новое значение ГОУ в плоскости двух параметров. Для определения устойчивости или неустойчивости системы в точках перебора вычитаем корни характеристического многочлена $f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ при заданном максимально допустимом отклонении модулей этих корней $\left| |z_i| - 1 \right| \le \varepsilon$.

В отличие от [17] передаточную функцию замкнутой дискретной системы стабилизации самолета представим в более компактном виде:

$$W(z) = \frac{b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0},$$

где $b_3 = c_2 k_1$, $b_2 = c_1 k_1 - c_2 k_2$, $b_1 = c_0 k_1 - c_1 k_2$, $b_0 = -c_0 k$,

$$a_4 = d_3 k_3,\ a_3 = d_2 k_3 - d_3 k_4 + c_2 k_1,\ a_2 = d_1 k_3 - d_2 k_4 - c_2 k_2 + c_1 k_1,$$

$$a_1 = d_0 k_3 - d_1 k_4 - c_1 k_2 + c_0 k_1,\ a_0 = -d_0 k_4 - c_0 k_2,$$

$$c_0 = -NMA + NMTB - MC - ND,$$

$$c_1 = -(NM + N + M)A - (N + M)BT + (2M + 1)C + (2N + 1)D,$$

$$c_2 = -(N + M + 1)A + TB - (M + 2)C - (N + 2)D,$$

$$d_0 = -NM,\ d_1 = N + M + NM,\ d_2 = -(1 + N + M),\ d_3 = 1.$$

$$A = \frac{d}{a^2 b^2}(ab - ad - bd),\ B = \frac{ad}{ab},\ C = \frac{a}{a^2}\frac{(a-d)}{(a-b)},\ D = \frac{a}{b^2}\frac{(d-b)}{(a-b)},\ N = e^{-a\mathrm{T}},\ M = e^{-b\mathrm{T}},$$

T — период дискретизации (квантования). Коэффициенты α, a, b, d определяются аэродинамическими параметрами самолета:

$$\alpha = \frac{k_{\omega z}}{\omega_{1p}}\omega_p^2,\ d = \omega_{1p},$$

$$a = \left(\xi_p \omega_p + \mu_\nu \frac{k_{\omega z}\omega_p^2}{2\omega_{1p}}\right) - \left(\sqrt{\left(2\xi_p \omega_p + \mu_\nu \frac{k_{\omega z}\omega_p}{2\omega_{1p}}\right)^2 - (1 + \mu_\nu k_{\omega z})\omega_p^2}\right),$$

$$b = \left(\xi_p \omega_p + \mu_\nu \frac{k_{\omega z}\omega_p^2}{2\omega_{1p}}\right) - \left(\sqrt{\left(2\xi_p \omega_p + \mu_\nu \frac{k_{\omega z}\omega_p}{2\omega_{1p}}\right)^2 - (1 + \mu_\nu k_{\omega z})\omega_p^2}\right)$$

а k_1–k_4 — коэффициенты корректирующего устройства, реализованного на бортовой цифровой вычислительной машине (БЦВМ), обеспечивающего заданные характеристики точности и качества процесса стабилизации и имеющего передаточную функцию [19]

$$W_k(z) = \frac{k_1 z - k_2}{k_3 z - k_4}.$$

Аэродинамические параметры самолета F-101B, которые нелинейно входят в коэффициенты передаточной функции для 34-го режима, равны [19]:

$$n_{\omega z} = 0{,}684;\;\; n_2 = 6{,}48;\;\; n_5 = 12{,}046;\;\; z_a = 0{,}480;\;\; z_\delta = 0{,}0666;$$

$$\omega_p = 2{,}61;\;\; \xi_p = 0{,}25;\;\; \omega_{1p} = 0{,}44;\;\; \mu_v = 0{,}39.$$

Собственная частота угловых колебаний ω_p, относительный коэффициент демпфирования ξ_p, передаточный коэффициент между угловой скоростью тангажа и углом отклонения рулей высоты $k_{\omega z}$, частота угловых колебаний ω_{1p}, зависящая от степени управляемости самолета, определяются через аэродинамические параметры самолета следующими выражениями:

$$\omega_p = \sqrt{n_a + n_{\omega z} z_a},\;\; \xi_p = \frac{n_{\omega z} + z_a + n_a}{2\sqrt{n_a + n_{\omega z} z_a}},\;\; k_{\omega z} = \frac{n_\delta z_a - n_a z_\delta}{n_a + n_{\omega z} z_a},\;\; \omega_{1p} = \frac{n_\delta z_a - n_a z_\delta}{n_\delta - n_a z_\delta}.$$

Уравнения границы области устойчивости исследуемой системы имеют вид

$$U(\overline{\omega}) = a_4 \cos 4\overline{\omega} + a_3 \cos^3 \overline{\omega} + a_2 \cos 2\overline{\omega} + a_1 \cos \overline{\omega} + a_0 = 0,$$

$$V(\overline{\omega}) = \sin \overline{\omega}(A_3 \cos^3 \overline{\omega} + A_2 \cos^2 \overline{\omega} + A_1 \cos \overline{\omega} + A_0) = 0,$$

где, учитывая (3), $A_3 = 8a_4$, $A_2 = 4a_3$, $A_1 = a_2 - 4a_4$, $A_0 = -a_3$.

Для определения границы области устойчивости в плоскости двух нелинейно входящих параметров T и ξ_p используем алгоритм, блок-схема которого представлена на рис. 1. Параметр T изменяем от $T_{\min}$ = 0,1 до $T_{\max}$ = 2,0 с шагом $\Delta T = 0{,}01$ с, и для каждого из этих значений T определяем соответствующие значения периметра ξ_p при условии, что $\left|U(\nu_i, \mu_i, \overline{\omega}_i)\right| < \Delta U = 0{,}001$. В результате получим ГОУ в плоскости параметров T и ξ_p при номинальных значениях других параметров (рис. 2, граница 1).

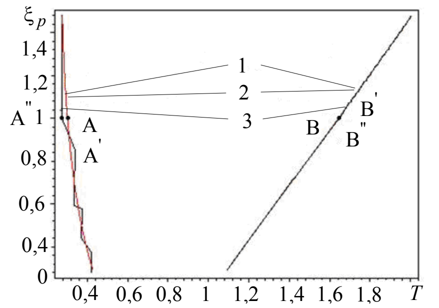

Рис. 2

На этом же рисунке представлена граница области устойчивости (см. рис. 2, граница 2), полученная авторами ранее предложенным методом в работе [17], который находит свое развитие в данной статье. ГОУ (см. рис. 2, граница 3), полученная методом перебора [14], со следующими начальными параметрами: начальный угол $\varphi_0 = 0^0$; дискретность изменения угла поворота $\Delta\varphi = 1^0$; дискретность параметра $\Delta R = 0{,}2$; максимально допустимое отклонение корня характеристического уравнения $\varepsilon = \left|\left|z_i\right| - 1\right| = 0{,}01$; заданные значения M = 0,5, K = 2.

Определим значения корней характеристического уравнения в следующих точках: A, где $T=0{,}3032$, $\xi_p=1{,}0000$; B, где $T=1{,}6438$, $\xi_p=1{,}0000$ (граница 1); A', где $T = 0{,}3028$, $\xi_p = 1{,}0000$; B', где $T = 1{,}6434$, $\xi_p = 1{,}0000$ (граница 2); A'', где $T = 0{,}2750$, $\xi_p = 1{,}0000$; B'', где $T = 1{,}6491$, $\xi_p = 1{,}0000$ (граница 3) плоскости параметров T, ξ_p (см. рис. 2). В результате получим

$$A: |z_1| = 0{,}0807;\ |z_2| = 1{,}0000;\ |z_3| = 0{,}9999;\ |z_4| = 0{,}8705;$$

$$B: |z_1| = 0{,}9996;\ |z_2| = 0{,}2621;\ |z_3| = 0{,}0680;\ |z_4| = 0{,}4186;$$

$$A': |z_1| = 0{,}0800;\ |z_2| = 1{,}0000;\ |z_3| = 1{,}0000;\ |z_4| = 0{,}8716;$$

$$B': |z_1| = 0{,}9998;\ |z_2| = 0{,}2618;\ |z_3| = 0{,}0684;\ |z_4| = 0{,}4182;$$

$$A'': |z_1| = 0{,}0940;\ |z_2| = 1{,}0096;\ |z_3| = 1{,}0096;\ |z_4| = 0{,}8831;$$

$$B'': |z_1| = 1{,}0129;\ |z_2| = 0{,}2597;\ |z_3| = 0{,}0685;\ |z_4| = 0{,}1177\ .$$

Значения корней характеристического уравнения в точках A, B, A', B', A'', B'' дают основания сделать выводы, что точки A, B и A', B' ГОУ, определенных предложенными подходами авторами в данной работе и в работе [17], расположены на границе реальной области устойчивости, а точки A'', B'' ГОУ, определенной численным методом, предложенным в работе [3], — за ее границами.

При построении ГОУ предложенным методом в данной работе 1462 раза просчитано значение вещественной части уравнения границы области устойчивости $U(\omega_i, v_i, \mu_i)$ и найдено 240 точек ГОУ, на что затрачено около 10 с. При построении границы области устойчивости ранее предложенным авторами методом [17] 1883 раза было просчитано значение параметра k_1 и найдено 240 точек ГОУ, на что затрачено 12 с. При определении точек границ области устойчивости методом перебора просчитаны значения корней характеристического уравнения 3104 раза, определено 250 точек ГОУ, на что затрачено 564 с.

Результаты анализа значений корней характеристического уравнения показывают, что точки ГОУ, полученной методом перебора (см. рис. 2), имеют бóльшие отклонения от точек реальной ГОУ, чем точки границы, полученной предложенным методом. При этом незначительные отклонения максимальных значений корней $|z_{\max}|$ от граничных значений $|z|=1$ могут вызвать значительные изменения параметров, т.е. искажать ОУ. Так, в точке A'' отклонение $|z_{\max}|$ на 0,96 % привело к отклонению k_1 на 9,18 %.

Для получения более точной ГОУ методом перебора необходимо изменить максимально допустимое отклонение корней характеристического уравнения $\varepsilon = \left| |z_i| - 1 \right|$, что значительно увеличивает расчетное время, или оптимально задать входные параметры, что затруднительно в связи с неопределенностью выбора начальных условий, которые, как правило, зависят от предварительно неизвестной конфигурации области устойчивости.

Заключение

Очевидно, что данный подход, в отличие от известных методов перебора, позволяет определить ГОУ с помощью дискретного D-разбиения в плоскости параметров, нелинейно входящих в коэффициенты характеристического уравнения, путем перебора в определенном направлении только одного параметра, все значения которого отвечают точкам границы области устойчивости. Поэтому нет необходимости проверять устойчивость или неустойчивость системы на каждом шаге перебора, что значительно уменьшает время определения значений нелинейно входящего параметра на границе области устойчивости. Кроме того, точность полученной ГОУ определяется отклонением вещественной части уравнения границы области устойчивости от нуля, что позволяет получить границу этой области с наименьшими отклонениями от реальной области устойчивости. В сравнении с предыдущим подходом области устойчивости упрощение алгоритма определения ГОУ значительно сокращает объем и время вычислений, необходимых для решения поставленной задачи.

Эффективность указанного подхода иллюстрируется на примере его использования для построения ГОУ системы стабилизации по углу тангажа самолета для конкретного режима полета.

Л.Т. Мовчан, С.Л. Мовчан

ПОБУДОВА ОБЛАСТІ СТІЙКОСТІ В ПРОСТОРІ ПАРАМЕТРІВ ЛІНІЙНИХ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНОГО *D*-РОЗБИТТЯ

Розглянуто питання побудови області стійкості лінійних цифрових систем у просторі двох параметрів, які нелінійно входять в коефіцієнти характеристичного рівняння. Запропоновано новий алгоритм визначення точок границі області стійкості шляхом перебору в однозначно визначеному напрямі тільки одного параметра без перевірки на стійкість чи нестійкість системи в цих точках. Спрощення алгоритму визначення області стійкості значно скорочує об’єм і час обчислень, необхідних для вирішення поставленої задачі. Коректність результату гарантується застосуванням методу *D*-розбиття.

L.T. Movchan, S.L. Movchan

CONSTRUCTION OF STABILITY DOMAIN OF DISCRETE LINEAR SYSTEMS IN SPACE OF PARAMETERS USING METHOD OF DISCRETE *D*-PARTITION

The problem of construction of stability domains of linear discrete systems in space of two parameters nonlinearly entering coefficsents of a characteristic equation is considered. The new algorithm of determination of boundary points of stability domain by the way of enumeration of only one parameter in uniquely determinated direction without verification of system stability or instability in this points is proposed. Simplification of algorithm of stability domain ditermination essentially reduces the volume and time of calculations need for solution of this problem. Correctness of results is guaranteed by using of *D*-partition method.

1. *Неймарк Ю.Н.* Устойчивость линеаризованных систем. — Л. : ЛКВВИЛ, 1949. — 140 с.
2. *Петров Н.П., Поляк В.Т.* Робастное *D*-разбиение // Автоматика и телемеханика. — 1991. — № 5. — С. 41–53.
3. *Грязина Е.Н.* К теории *D*-разбиения // Там же. — 2004. — № 12. — С. 15–28.

4. *Грязина Е.М., Поляк Б.Т., Тремба А.А.* Современное состояние метода *D*-разбиения // Там же. — 2008. — № 12. — С. 3–41.
5. *Николаев Ю.П.* К исследованию геометрии множества устойчивых полиномов линейных дискретных систем // Там же. — 2002. — № 7. — С. 44–54.
6. *Николаев Ю.П.* Анализ геометрии *D*-разбиения двумерной плоскости произвольных коэффициентов характеристического полинома дискретной системы // Там же. — 2004. — № 12. — С. 49–61.
7. *Ackermann J., Kaesbauer D.* Stable polyhedra in parameter spas // Automatica. — 2003. — **39**. — P. 937–943.
8. *Tan N., Kaya I., Yeroglu C., Atherton D.* Computation of stabilizing PI and PID controllers using the stability boundary locus // Energy conversion and management. — 2006, — 47, N 18–19. — С. 3045–3058.
9. *Tan N.*, Kaya I., Atherton D. A graphical method for computation of all stabilizing PI controllers. Proceedings of the 16th IFAC World Congress, 2005, Prague, Czech Republic. — 2005. — С. 226–237.
10. *Теория* автоматического управления. Ч. 1: Теория линейных систем автоматического управления / Под ред. А.А.Воронова. — М. : Высш. шк., 1986. — 367 с.
11. *Мовчан С.Л.* Построение области устойчивости линейных цифровых систем в пространстве параметров, которые нелинейно входят в коэффициенты характеристического уравнения // Проблемы управления и информатики. — 2004. — № 1. — С. 37–47.
12. *Мовчан Л.Т., Мовчан С.Л.* Машино-ориентированный подход построения области устойчивости в плоскости двух параметров линейных непрерывных систем управления методом *D*-разбиения // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2011. — № 1. — С. 30–35.
13. *Айзерман М.А.* Краткий очерк становления и развития классической теоремы резюмирования и управления // Автоматика и телемеханика. — 1993. — № 7. — С. 6–18.
14. *Гостев В.Н., Стеклов В.К.* Системы автоматического управления с цифровым регулятором. — Киев: Радиоаматор, 1998. — 704 с.
15. *Дидук Г.А.* Машинные методы исследования автоматических систем. — Л. : Энергия, 1983. — 242 с.
16. *Топчеев Ю.И.* Атлас для проектирования систем автоматического регулирования. — М. : Машиностроение, 1989. — 751 с.
17. *Мовчан Л.Т., Мовчан С.Л.* Построение области устойчивости цифровых линейных систем в плоскости двух параметров, которые нелинейно влияют на коэффициенты характеристического уравнения // Проблемы управления и информатики. — 2006. — № 4. — С. 40–79.
18. *Шуп Т.* Решение инженерных задач на ЭВМ. Практическое руководство. — М. : Мир, 1982. — 236 с.
19. *Топчеев Ю.И., Потемкин В.Г., Иваненко В.Г.* Системы стабилизации. — М. : Машиностроение, 1974. — 248 с.

Получено 26.02.2016
После доработки 14.07.16