

**ЗАДАЧА ФОРМИРОВАНИЯ СТРУКТУРЫ
СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ МАТРИЦЫ
СОСТОЯНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ УСТОЙЧИВОЙ
СИСТЕМЫ, ГАРАНТИРУЮЩЕЙ ОТСУТСТВИЕ
ОТКЛОНЕНИЯ ЕЕ ТРАЕКТОРИЙ ОТ МОНОТОННО
УБЫВАЮЩЕЙ КРИВОЙ СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ**

Введение

При исследовании последних лет систем в рамках представления «начальное состояние–текущее состояние» обнаружены неожиданные свойства динамики этих систем, состоящие в отклонении траекторий системы по норме вектора состояния от монотонно убывающей кривой свободного движения. В работах [1, 2] показано, что причинным фактором таких отклонений может быть кратность собственных чисел матрицы состояния как в непрерывных, так и в дискретных системах. Причем величина отклонения тем больше, чем больше кратность. Выявлено, что к подобным эффектам может привести такой причинный фактор, как структура собственных векторов матрицы состояния со спектром простых собственных чисел. Исследованию этого причинного фактора применительно к непрерывным линейным устойчивым системам с матрицей состояния простой структуры посвящена предлагаемая вниманию читателей журнала данная статья. При этом задача решается в инверсной постановке в форме поиска структуры собственных векторов матрицы состояния непрерывной устойчивой системы, не допускающей отклонения траекторий системы от монотонно убывающей кривой свободного движения. Полученные теоретические положения иллюстрируются примерами.

**1. Структура собственных векторов матрицы системы
как причинный фактор возникновения отклонений траекторий системы
от монотонно убывающей кривой свободного движения**

Поставим задачу поиска системных причин возможных отклонений траекторий системы от монотонно убывающей кривой процессов по вектору $x(t)$ состояния непрерывной системы в классе структур собственных векторов ее матрицы состояния.

Рассматривается линейная непрерывная устойчивая автономная система

$$\dot{x}(t) = Fx(t); \quad x(0) = x(t)|_{t=0} \quad (1)$$

с матрицей F состояния простой структуры. Нетрудно видеть, что для решения системы (1) справедливо представление

$$x(t) = \exp(Ft)x(0). \quad (2)$$

В (1) и (2) матрица F состояния системы обладает спектром $\sigma\{F\}$ собственных чисел

$$\sigma\{F\} = \{\lambda_i = \arg(\det(\lambda I - F) = 0); \lambda_i < 0; Jm(\lambda_i) = 0; \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j; i, j = \overline{1, n}\} \quad (3)$$

и спектром $\{\xi_i; i = \overline{1, n}\}$ собственных векторов

$$\xi_i = \arg(F\xi_i = \lambda_i \xi_i; i = \overline{1, n}), \quad (4)$$

где в дальнейшем будем полагать $\|\xi_i\| = 1; i = \overline{1, n}$.

Представим вектор начального состояния $x(0)$ в базисе собственных векторов в виде аддитивной композиции

$$x(0) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \xi_i, \quad (5)$$

где коэффициенты γ_i вычисляются в силу соотношения $\gamma_i = (E^{-1}\beta)_i$; здесь E — матрица Грама базиса собственных векторов $\{\xi_i; i = \overline{1, n}\}$, $\beta = \text{col}\{(\xi_i x(0)); i = \overline{1, n}\}$ — вектор скалярных произведений собственных векторов и вектора начального состояния. Подставим (5) в (2), тогда с учетом свойства $f(F)$ матричной функции от матрицы F , сохраняя структуру собственных векторов в форме $f(F)\xi_i = f(\lambda_i)\xi_i; i = \overline{1, n}$, получим

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i e^{\lambda_i t} \xi_i. \quad (6)$$

Сформулируем утверждение, которое докажем, опираясь на геометрические представления.

Утверждение. Условиями отклонений процессов по вектору состояния от монотонно убывающей кривой свободного движения непрерывной устойчивой системы (1) с матрицей состояния простой структуры являются:

- 1) наличие хотя бы одной пары $(\xi_l, \xi_j) = \arg\{\text{angl}(\xi_l, \xi_j) > \pi/2\}$ собственных векторов, характеризующейся тупым углом между ними в плоскости, натянутой на эти векторы;
- 2) наличие у собственных чисел λ_l, λ_j , соответствующих собственным векторам ξ_l, ξ_j , свойства, удовлетворяющего условиям $(\lambda_l, \lambda_j) = \arg\{\lambda_l < 0, \lambda_j < 0 \& |\lambda_l| \gg |\lambda_j|\}$.

Доказательство. Рассмотрим линейную оболочку (плоскость) $L\{\xi_l, \xi_j\}$, натянутую на пару векторов (ξ_l, ξ_j) , образующих тупой угол (рис. 1).

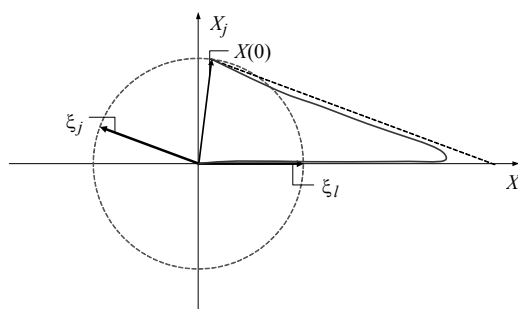


Рис. 1

Зададим вектор начального состояния $x(0)$ системы (1) в виде вектора, принадлежащего этой оболочке и обладающего единичной нормой так, что он удовлетворяет условию $x(0) = \arg\{x(0) \in L\{\xi_l, \xi_j\} \& \|x(0)\| = 1\}$. Запишем $x(0)$ в форме

$$x(0) = \gamma_j \xi_j + \gamma_l \xi_l. \quad (7)$$

Для большей наглядности потребуем от $x(0)$, чтобы он был биссектрисой угла $\text{angl}(\xi_l, \xi_j)$ между векторами ξ_l, ξ_j , что в силу правил суммирования векторов возможно, когда в (7) γ_j и γ_l равны. Более того, в силу $\text{angl}(\xi_l, \xi_j) > \pi/2$ выполняется условие $(\gamma_l, \gamma_j) = \arg\{\gamma_j = \gamma_l \ \& \ |\gamma_j| > 1, |\gamma_l| > 1\}$. Рассмотрим движение системы (1) $x(t) = x(x(0), t)$, которое в силу (6) получит представление

$$x(t) = x(x(0), t) = \gamma_l e^{\lambda_l t} \xi_l + \gamma_j e^{\lambda_j t} \xi_j. \quad (8)$$

Если в (8) учесть условие $(\lambda_l, \lambda_j) = \arg\{\lambda_l < 0, \lambda_j < 0 \ \& \ |\lambda_l| \gg |\lambda_j|\}$, то с момента $t = \arg(e^{\lambda_l t} = 0,05) = 3|\lambda_l^{-1}|$ будут выполняться асимптотические условия $\gamma_l e^{\lambda_l t} \cong 0$; $x(t) = x(x(0), t) \cong \gamma_j e^{\lambda_j t} \xi_j$ так, что для нормы вектора $x(t)$ будет выполняться условие $\|x(t)\| \cong |\gamma_j| e^{\lambda_j t}$, где $|\gamma_j| > 1$.

Утверждение доказано.

Примечания.

1. Очевидно, что при $\text{angl}(\xi_l, \xi_j) = \pi/2$ при любых сочетаниях λ_l, λ_j в траекториях системы (1) отклонений по норме не наблюдается.

2. Если $x(0)$ является биссектрисой острого угла $\pi - \text{angl}(\xi_l, \xi_j)$ между векторами ξ_l, ξ_j , то в траекториях $\|x(t)\| = \|x(x(0), t)\|$ системы (1) отклонений также не наблюдается.

3. Если $x(0)$ принадлежит $\text{angl}(\xi_l, \xi_j) > \pi/2$, но не является биссектрисой так, что выполняется одно из двух возможных условий $\{\gamma_l \rightarrow 1, \gamma_j \rightarrow 0\}$ или $\{\gamma_l \rightarrow 0, \gamma_j \rightarrow 1\}$, то при любом сочетании собственных чисел λ_l, λ_j системы (1) невозможны отклонения в траекториях по норме вектора состояния.

Сформируем аналитическое обобщение результата, приведенного выше на основе геометрических представлений. Для этого вернемся к решению (2) системы (1) с тем, чтобы представить матрицу F в форме

$$F = M \Lambda M^{-1}, \quad (9)$$

где $M = \text{row}\{M_i; i = \overline{1, n}\}$ — матрица собственных векторов матрицы F , для которой выполняется соотношение $F M_i = \lambda_i M_i$; $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$. Известно [3, 4], что матричная функция $f\{(*)\}$ от матрицы $(*)$ сохраняет модальное представление (9) для матричной функции, записываемое в форме $f(F) = M f(\Lambda) M^{-1}$. Если в качестве матричной функции взять матричную экспоненту $f(F) = \exp(Ft)$, то для нее можно записать

$$\exp(Ft) = M \exp(\Lambda t) M^{-1} = M \text{diag}\{e^{\lambda_i t}; i = \overline{1, n}\} M^{-1}. \quad (10)$$

С использованием (10) решение (2) получает представление

$$x(t) = \exp(Ft) x(0) = M \text{diag}\{e^{\lambda_i t}; i = \overline{1, n}\} M^{-1} x(0). \quad (11)$$

Перейдем в выражении (11) к соотношениям по векторным и матричным нормам, тогда получим

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &= \|\exp(Ft) x(0)\| = \|M \text{diag}\{e^{\lambda_i t}; i = \overline{1, n}\} M^{-1} x(0)\| \leq \\ &\leq \|M\| \cdot \|\text{diag}\{e^{\lambda_i t}; i = \overline{1, n}\}\| \cdot \|M^{-1}\| \cdot \|x(0)\| = C\{M\} e^{-\eta t} \|x(0)\|. \end{aligned} \quad (12)$$

В (12) $C\{M\}$ — число обусловленности матрицы M собственных векторов матрицы F , η — степень устойчивости системы (1) $\eta = \min_i |\lambda_i|; i = \overline{1, n}$.

Изложенное выше позволяет для процессов $\|x(t, x(0))\|$ сформировать экспоненциальное покрытие

$$\text{roof} \|x(t)\| = C\{M\} e^{-\eta t} \|x(0)\|. \quad (13)$$

Степень достаточности этого покрытия определяется числом обусловленности $C\{M\}$ матрицы собственных векторов матрицы F , которое обладает свойством $1 \leq C\{M\} \leq \infty$ [4]. Очевидно, что число обусловленности $C\{M\}$ будет минимальным, если собственные векторы при единичной норме будут ортогональными. В этом случае $C\{M\} = 1$ и экспоненциальное покрытие процессов $\|x(t, x(0))\|$ в форме (13) будет обладать минимальной достаточностью. В случае, когда $C\{M\} > 1$, соотношение (13) покрывает процессы $\|x(t, x(0))\|$ по норме автономной системы (1), стартуя при $t = 0$ в точке $C\{M\} \|x(0)\|$, оставаясь экспоненциальным. Это значит, что $\text{roof} \{\|x(t)\|\}$ покрывает процесс $\|x(t, x(0))\|$, характеризующийся наличием отклонений траекторий системы от монотонно убывающей кривой свободного движения при асимптотическом стремлении к нулю. При этом число обусловленности $C\{M = \text{row}[M_i = \xi_i, i = \overline{1, n}]\}$ собственных векторов является синдромом наличия отклонений в траекториях системы $\|x(t, x(0))\|$ от монотонно убывающей кривой свободного движения. Очевидно, рассмотренная в начале раздела геометрическая интерпретация, иллюстрирующая возможность отклонений при определенной структуре собственных векторов, хорошо ложится в полученный аналитический результат (13), так как пара векторов (ξ_i, ξ_j) образует плохо обусловленную структуру.

2. Назначение алгебраического спектра собственных чисел и геометрического спектра собственных векторов матрицы системы с использованием обобщенного модального управления

Рассматриваются ситуации в предположении, что структуры собственных чисел $\sigma\{F\}$ в форме (3) и собственных векторов $\{\xi_i; i = \overline{1, n}\}$ в форме (4) заданы. Это позволяет сконструировать диагональную матрицу $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i, i = \overline{1, n}\}$ и матрицу M приведения матрицы F к диагональному виду, построенную на собственных векторах матрицы F . Очевидно, задав структуру собственных чисел и собственных векторов, можно сконструировать матрицу F на основе соотношения подобия

$$F = M \Lambda M^{-1} = \text{row}\{M_i = \xi_i; i = \overline{1, n}\} \text{diag}\{\lambda_i, i = \overline{1, n}\} (\text{row}\{M_i = \xi_i; i = \overline{1, n}\})^{-1}. \quad (14)$$

Матрица F вида (14) является матрицей состояния системы (1), которая получена путем объединения объекта управления

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); x(0) = x(t)|_{t=0} \quad (15)$$

и закона управления в форме отрицательной обратной связи с матрицей K по вектору состояния

$$u(t) = -Kx(t), \quad (16)$$

подстановка которого в (15) позволяет для матрицы F записать

$$F = A - BK, \quad (17)$$

где A, B, K — матрицы соответственно размерностей $(n \times n)$, $(n \times r)$, $(r \times n)$, причем пара матриц (A, B) управляемая. Выражение (17) по существу ставит задачу с помощью матрицы K при заданных A, B наделить матрицу F назначенными спектрами собственных чисел и собственных векторов. В решении этой задачи рассмотрим несколько системных ситуаций.

1) $\text{rang}(B) = n = \dim(x)$, что позволяет записать $\exists B^{-1}$. В этой ситуации матрица K может быть вычислена с помощью матричного соотношения

$$K = B^{-1}(A - F). \quad (18)$$

2) $\text{rang}(B) < n = \dim(x) \Rightarrow \exists B^{-1}$, при этом $(A - F) \in \text{Im}(B)$. В этой ситуации матрица K может быть вычислена с помощью матричного соотношения

$$K = (B^T B)^{-1} B^T (A - F). \quad (19)$$

3) $\text{rang}(B) < n = \dim(x) \Rightarrow \exists B^{-1}$, при этом $(A - F) \notin \text{Im}(B)$. В этой ситуации необходимо на основании уравнения подобия (14) составить два матричных соотношения

$$M\Lambda - AM = -BH; \quad K = HM^{-1}. \quad (20)$$

Первое матричное соотношение в (20) именуется матричное уравнение Сильвестра, второе матричное соотношение в (20) позволяет конструировать матрицу обратной связи. Известно [5, 6], что условиями невырожденной разрешимости уравнения Сильвестра (20) являются непересекаемость спектров собственных чисел матриц Λ и A ; управляемость пары (A, B) ; и наблюдаемость пары (Λ, H) . Очевидно, если $(M\Lambda - AM) \in \text{Im}(B)$, то уравнение Сильвестра можно разрешить относительно матрицы H в форме

$$H = (B^T B)^{-1} B^T (AM - M\Lambda), \quad (21)$$

что позволяет для матрицы K записать

$$K = HM^{-1} = (B^T B)^{-1} B^T (AM - M\Lambda) M^{-1}. \quad (22)$$

Корректность решения задачи в формах (21) и (22) проверяется по наличию у пары матриц (Λ, H) свойства полной наблюдаемости.

Рассмотрим теперь ситуацию, которая не подпадает ни под одну из приведенных выше, т.е. ситуацию, в которой задан спектр желаемых собственных чисел и только часть собственных векторов. Такая ситуация, которая является предметом обобщенного модального управления [7], решается с помощью матричного уравнения Сильвестра (20), если в нем матричные компоненты M, Λ и H , представленные в форме

$$M = [\bar{M} \quad \tilde{M}]; \quad \Lambda = \text{diag}\{\bar{\Lambda}, \tilde{\Lambda}\}, \quad H = [\bar{H} \quad \tilde{H}], \quad (23)$$

согласованы по размерности так, что $\dim(\bar{M}) = n \times r$, $\dim(\tilde{M}) = n \times (n - r)$, $\dim(\bar{\Lambda}) = r \times r$, $\dim(\tilde{\Lambda}) = (n - r) \times (n - r)$, $\dim(\bar{H}) = r \times r$, $\dim(\tilde{H}) = r \times (n - r)$, где r — число заданных собственных векторов. В результате уравнение Сильвестра (20) принимает вид

$$[M \quad \tilde{M}] \begin{bmatrix} \bar{\Lambda} & 0 \\ 0 & \tilde{\Lambda} \end{bmatrix} - A[\bar{M} \quad \tilde{M}] = -B[\bar{H} \quad \tilde{H}]. \quad (24)$$

Нетрудно видеть, что уравнение Сильвестра (24) распадается на два уравнения Сильвестра

$$\overline{M}\overline{\Lambda} - A\overline{M} = -B\overline{H}, \quad (25)$$

$$\tilde{M}\tilde{\Lambda} - A\tilde{M} = -B\tilde{H}. \quad (26)$$

В уравнении (25) матрица \overline{M} строится в форме $\overline{M} = \text{row}\{\overline{M}_j = \xi_j; j = \overline{1, r}\}$; оно решается относительно матрицы \overline{H} . В уравнении (26) матрица \tilde{H} задается из условия $\tilde{H} = \text{arg}\{\text{observ}(\tilde{\Lambda}, \tilde{H})\}$; оно решается относительно матрицы \tilde{M} .

Тогда матрица K , доставляющая матрице $F = A - BK$ произвольный алгебраический спектр собственных чисел и r требуемых собственных векторов, будет определена с помощью формулы (20), принимающей вид

$$K = HM^{-1} = [\overline{H} \ \tilde{H}][\overline{M} \ \tilde{M}]^{-1}, \quad (27)$$

где матрица \overline{H} вычисляется по аналогии с (21) в силу соотношения

$$\overline{H} = (B^T B)^{-1} B^T (A\overline{M} - \overline{M}\overline{\Lambda}). \quad (28)$$

3. Назначение структуры собственных векторов, обладающих минимальным числом обусловленности

Вернемся к проблеме, вынесенной в заголовок статьи, с учетом результата, полученного в разд. 1, связывающего отсутствие отклонений с фактом достижения минимального числа обусловленности матрицы собственных векторов матрицы состояния формируемой системы (1). В связи с этим встает задача формирования процедуры назначения структуры собственных векторов с учетом того, что она, будучи записанной в виде

$$C\{M\} = \min_{\xi_i} (C\{M = \text{row}(M_i = \xi_i); i = \overline{1, n}\} \& \|\xi_i\| = 1; i = \overline{1, n}), \quad (29)$$

обнаруживает свою недифференцируемую природу. Таким образом, поставленная задача должна решаться с помощью процедур недифференцируемой оптимизации [8].

Следует ожидать, что такая постановка задачи будет иметь неединственное решение и каждое из решений будет характеризоваться своими затратами на управление [9] в системе, образованной объединением (15) и (16), определяемыми как функции t

$$\|u(t)\| = \|Kx(t)\| = \|Ke^{Ft}x(0)\|. \quad (30)$$

Если ввести в рассмотрение элемент $U_t = u_{[0,t]}$ линейного функционального пространства L_T^2 , где $T = \{t : 0 \leq t < \infty\}$, то для квадрата евклидовой нормы элемента U_t функционального пространства можно записать

$$\|U_t\|^2 = \int_0^t u^T(\tau)u(\tau)d\tau = x^T(0) \int_0^t e^{F^T\tau} K^T K e^{F\tau} d\tau x(0) = x^T(0) W_U(t) x(0).$$

Здесь $W_U(t) = \int_0^t e^{F^T\tau} K^T K e^{F\tau} d\tau$ — грамиан затрат на управление на интервале $[0, t]$,

удовлетворяющий условию $\lim_{t \rightarrow \infty} W_U(t) = W_U$, где W_U — установившееся значение грамиана затрат на управление, являющееся решением матричного уравнения Ля-

пунова $F^T W_U + W_U F = -K^T K$. Скаляризация грамиана затрат на управление с помощью сингулярного разложения приводит к выражению для оценки максимальных затрат на управление в форме

$$\max_{\|x(0)\|} \|U_\infty\| = \alpha_{\max}^{1/2} \{W_U\} \|x(0)\| \Big|_{\|x(0)\|=1} = \alpha_{\max}^{1/2} \{W_U\}. \quad (31)$$

Таким образом, задача (29), дополненная требованием минимизации затрат на управление, приводит к необходимости использования агрегированного функционала

$$J(C, U) = \alpha_{\max}^{1/2} \{W_U\} C\{M\}, \quad (32)$$

где α_{\max} — максимальное сингулярное число грамиана затрат на управление.

4. Иллюстративные примеры

Пример 1. Задачей первого примера является подтверждение появления отклонений траекторий системы от монотонно убывающей кривой свободного движения при выполнении условий утверждения. Для этого рассмотрим систему (1) с вектором состояния второго порядка, характеризующуюся спектром собственных векторов матрицы F вида $\xi_1 = [1 \ 0]^T$; $\xi_2 = [-0,9987 \ 0,05]^T$, которые удовлетворяют условию 1 утверждения, обладая единичной нормой и образуя тупой и острый углы. Зададим для матрицы F алгебраический спектр собственных чисел вида $\sigma\{F\} = \{\lambda_i = \arg[\det(\lambda I - F) = 0] : \lambda_1 = -1; \lambda_2 = -50\}$, элементы которого удовлетворяют условию 2 утверждения.

Для полноты сформируем матрицу F , обладающую приведенными геометрическим и алгебраическим спектрами. Для этого воспользуемся модальным разложением этой матрицы с учетом того, что матрица диагонализации в качестве столбцов представляет собственные векторы матрицы. Тогда получим

$$F = M \Lambda M^{-1} = [\xi_1 \ \xi_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} [\xi_1 \ \xi_2]^{-1} = \\ = \begin{bmatrix} 1 & -0,9987 \\ 0 & 0,05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0,9987 \\ 0 & 0,05 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 978,726 \\ 0 & -50 \end{bmatrix}.$$

В качестве вектора начального состояния $x(0)$ зададим вектор единичной нормы $\|x(0)\| = 1$, принадлежащий биссектрисе угла $\text{angl}(\xi_1, \xi_2)$. В результате он получает представление $x(0) = [0,0255 \ 0,9997]^T$. Разложим вектор $x(0)$ по собственным векторам матрицы F , в результате чего получим представление $x(0) = 19,9935\xi_1 + 19,994\xi_2$. Представление (4) для свободного движения сконструированной матрицы F будет иметь вид

$$x(t) = x(x(0), t) = \exp(Ft)x(0) = \gamma_1 e^{\lambda_1 t} \xi_1 + \gamma_2 e^{\lambda_2 t} \xi_2 = 19,9935 e^{-t} \xi_1 + 19,994 e^{-50t} \xi_2.$$

Нетрудно видеть, что составляющая свободного движения $x_{\xi_2}(t) = 19,994 e^{-50t} \xi_2$ в момент $t = \lambda_2^{-1} \ln(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0,05} = 0,0599$ практически становится нулевой (достигает пятипроцентного значения от начального значения). В этот же момент вторая составляющая свободного движения $x_{\xi_1}(t) = 19,9935 e^{-t} \xi_1$ будет определяться выражением $x_{\xi_1}(t) = 19,9935 e^{-0,0599} \xi_1 = 18,8311 \xi_1$. Очевидно, что в траектории свободного движения сконструированной двумерной системы вида (1) будет наблюдаться отклоне-

ние $\max_t \|x(t)\|$ по норме $\|x(t)\|$ вектора состояния, равное $\max_t \|x(t)\| = 17,8324$.

Подтвердим этот результат непосредственным наблюдением за нормой $\|x(t)\|$ свободного движения, вычисляемой в силу соотношения $\|x(t)\| = \|\exp(Ft)x(0)\|$. Полученная кривая представлена на рис. 2, а, б (кривая 1). Кривая подтверждает правильность оценки отклонения траекторий свободного движения, полученной на основе геометрической интерпретации.

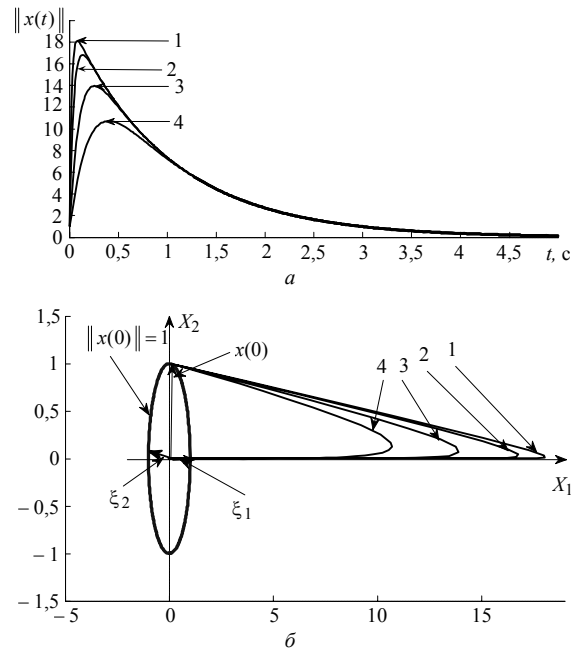


Рис. 2

На рис. 2, а и б приведены кривые процессов в системе с той же структурой собственных векторов, что и выше, но, для полноты изложения, со спектрами собственных чисел: $\sigma\{F\} = \{\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -25\}$ (кривая 2), $\sigma\{F\} = \{\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -10\}$ (кривая 3) и $\sigma\{F\} = \{\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -5\}$ (кривая 4), спектры характеризуются единым максимальным собственным числом $\lambda_M = \lambda_1 = -1$. Причем на рис. 2, а приведены процессы по норме, а на рис. 2, б — для большей геометрической наглядности, в фазовом пространстве, натянутом на пару собственных векторов.

Если же задать вектор $x(0)$, удовлетворяющий условию $x(0) = \arg\{\|x(0)\| = 1 \ \& \ \text{angl}(\xi_1, x(0)) = \text{angl}(x(0), \xi_2) = 0,5(\pi - \text{angl}(\xi_1, \xi_2))\}$, то он будет принадлежать биссектрисе острого угла и иметь представление $x(0) = [0,9997 \ -0,0255]^T$. Процессы, порожденные таким вектором начального состояния, приведены на рис. 3, из которого следует удовлетворение п. 2 примечания.

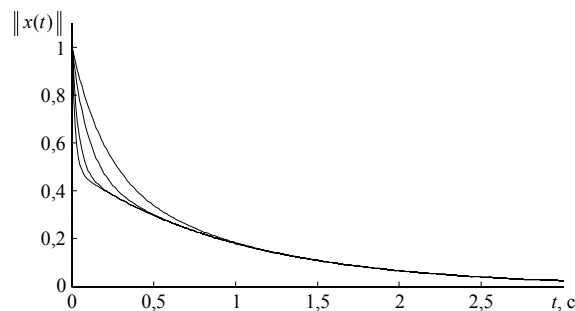


Рис. 3

Пример 2. Задача второго примера — подтверждение п. 1 примечания, состоящего в том, что при $\text{angl}(\xi_i, \xi_j) = \pi/2$ при любых сочетаниях λ_i, λ_j отклонений в траекториях системы (1) по норме не наблюдается. Поэтому поставим задачу сконструировать матрицу F системы (1), такую, чтобы алгебраический спектр собственных чисел был таким же, как и в примере 1, геометрический спектр собственных векторов единичной нормы был ортогональным, а вектор начального состояния примера 1 принадлежал биссектрисе прямого угла. Этим условиям почти полностью удовлетворяет следующая структура собственных векторов $\xi_1 = [0,707 \ 0,707]^T$; $\xi_2 = [-0,707 \ 0,707]^T$. Тогда матрица F с такими алгебраическим и геометрическим спектрами в силу модального разложения имеет представление

$$F = M\Lambda M^{-1} = [\xi_1 \ \xi_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} [\xi_1 \ \xi_2]^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,707 & -0,707 \\ 0,707 & 0,707 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,707 & -0,707 \\ 0,707 & 0,707 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -25,5 & 24,5 \\ 24,5 & -25,5 \end{bmatrix}.$$

Для подтверждения п. 1 примечания применительно к сконструированной матрице получим кривые (рис. 4, а) нормы $\|x(t)\|$ свободного движения, вычисляемой в силу соотношения $\|x(t)\| = \|\exp(Ft)x(0)\|$. По аналогии с рис. 2, на рис. 4, б приведена фазовая траектория свободного движения $x(t) = \exp(Ft)x(0)$ в пространстве, натянутом на пару собственных векторов.

Кривые подтверждают правильность п. 1 примечания.

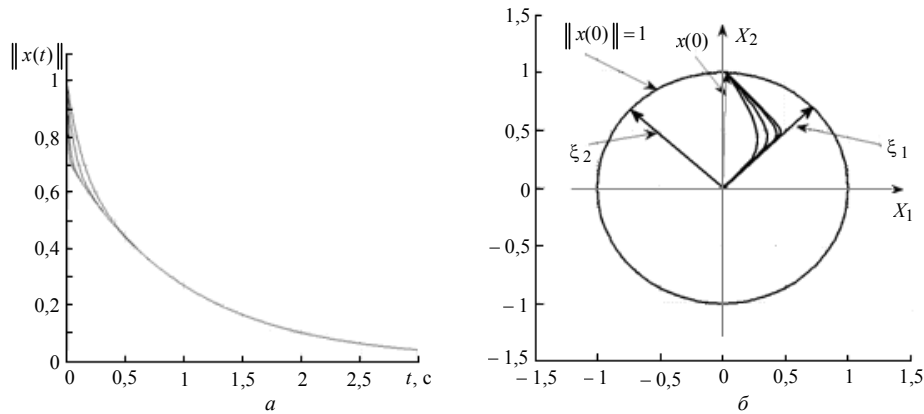


Рис. 4

Пример 3. Рассмотрим две системы вида (1) из примеров 1 и 2 с точки зрения эффективности использования результата в форме (13). Система вида (1) из

примера 1 характеризуется матрицей состояния $F1 = \begin{bmatrix} -1 & 978,726 \\ 0 & -50 \end{bmatrix}$, матрицей собст-

венных векторов $M1 = [\xi_{11} \ \xi_{12}] = \begin{bmatrix} 1 & -0,9987 \\ 0 & 0,05 \end{bmatrix}$, характеризующейся числом обуслов-

ленности $C\{M1\} = 39,973$. Система вида (1) из примера 2 характеризуется матрицей

состояния $F2 = \begin{bmatrix} -25,5 & 24,5 \\ 24,5 & -25,5 \end{bmatrix}$, матрицей собственных векторов $M2 = [\xi_{21} \ \xi_{22}] =$

$= \begin{bmatrix} 0,707 & -0,707 \\ 0,707 & 0,707 \end{bmatrix}$, которая обладает числом обусловленности $C\{M2\} = 1$. Алгеб-

раические спектры собственных чисел матриц $F1$ и $F2$ совпадают так, что они принимают следующий вид: $\sigma\{F1\} = \sigma\{F2\} = \{\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -50\}$, при этом системы характеризуются единым параметром $\eta = -1$. Тогда в силу (13) покрытия процессов по норме $\text{roof}\{\|x(t)\|\}$ в системах примеров 1 и 2 принимают соответственно вид $\|x(t)\| \leq 39,973e^{-t}\|x(0)\|$ и $\|x(t)\| \leq e^{-t}\|x(0)\|$.

На рис. 5 для полноты изложения приведены кривые процессов в системе из примера 1 с той же структурой собственных векторов и со спектрами собственных чисел: $\sigma\{F1\} = \{\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -25\}$ (кривая 2), $\sigma\{F1\} = \{\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -10\}$ (кривая 3) и $\sigma\{F1\} = \{\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -5\}$ (кривая 4), спектры характеризуются единым максимальным собственным числом $\lambda_M = \lambda_1 = -\eta = -1$ и их экспоненциальное покрытие $\text{roof}\|x(t)\| = 39,973e^{-t}\|x(0)\|$.

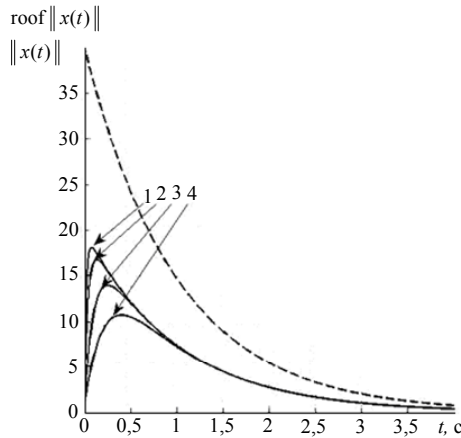


Рис. 5

На рис. 6 приведены кривые процессов в системе из примера 2 с той же структурой собственных векторов и со спектрами собственных чисел: $\sigma\{F2\} = \{\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -25\}$ (кривая 2), $\sigma\{F2\} = \{\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -10\}$ (кривая 3) и $\sigma\{F2\} = \{\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -5\}$ (кривая 4), спектры характеризуются единым максимальным собственным числом $\lambda_M = \lambda_1 = -\eta = -1$ и их экспоненциальное покрытие $\text{roof}\|x(t)\| = e^{-t}\|x(0)\|$.

Следует отметить достаточность оценок полученных выше покрытий и их инвариантность относительно вектора начального состояния $x(0)$, что подчеркивает конструктивность представления (13).

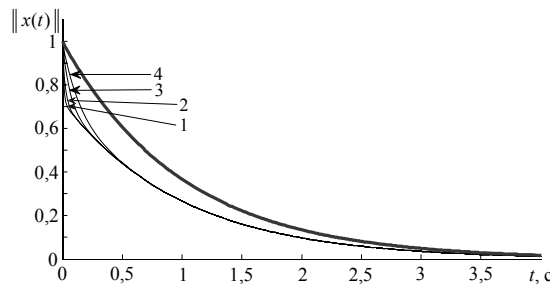


Рис. 6

Пример 4. Задачей четвертого примера является иллюстрация результатов, полученных в разд. 3 и 4.

Рассмотрим объект управления (15) третьего порядка, описываемый следующими матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = [0 \ 0 \ 1].$$

Зададим желаемую структуру собственных чисел $\sigma\{F\}$ матрицы состояния (17) проектируемой системы (1) в виде

$$\sigma\{F\} = \{\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -5\}.$$

Решим задачу назначения желаемой структуры собственных векторов с помощью процедуры прямого поиска на основе алгоритма Нелдера–Мида. Для этого воспользуемся пакетом прикладных программ Matlab, в котором функция `fminsearch` осуществляет поиск минимума функционала (32) с помощью алгоритма Нелдера–Мида. В результате получим одно из возможных решений в виде

$$M = \begin{bmatrix} 0,9695 & 0,0784 & 0,2201 \\ -0,1331 & 0,9623 & 0,2362 \\ -0,058 & -0,2603 & 0,9465 \end{bmatrix},$$

при котором функционал (32) принимает значение $J(C, U) = 1,7555$.

Матрица F состояния спроектированной замкнутой системы записывается в виде

$$F = \begin{bmatrix} -1,217 & -0,3589 & -0,79 \\ -0,3688 & -3,0766 & -0,3943 \\ -0,8408 & -0,3931 & -4,7064 \end{bmatrix}.$$

Матрица K обратной связи, средствами которой формируется матрица F , может быть определена с помощью соотношения (18)

$$K = B^{-1}(A - F) = \begin{bmatrix} 1,217 & 1,3589 & 0,79 \\ 0,3688 & 3,0766 & 1,3943 \\ 0,8408 & 0,3931 & 4,7064 \end{bmatrix}.$$

На рис. 7 представлено взаимное расположение собственных векторов, удовлетворяющих условию минимума функционала (32). На рис. 8 изображен график нормы свободного движения спроектированной системы.

Таким образом, найден закон управления (16) в форме отрицательной обратной связи с матрицей K по вектору состояния, обеспечивающий спроектированной системе (1) минимальные затраты на управление, желаемую структуру собственных чисел и структуру собственных векторов с минимальным числом обусловленности, не допускающую отклонения траекторий системы от монотонно убывающей кривой свободного движения.

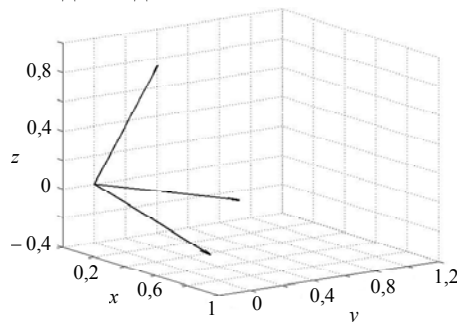


Рис. 7

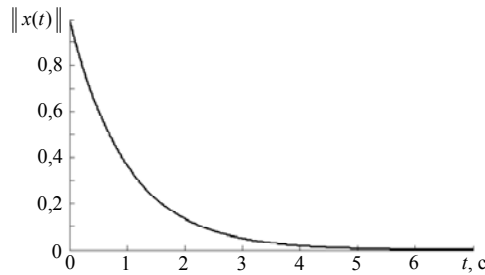


Рис. 8

Заключение

Показано, что задача формирования структуры собственных векторов матрицы состояния непрерывной устойчивой системы, не допускающей отклонения траекторий системы от монотонно убывающей кривой свободного движения, решается путем минимизации числа обусловленности матрицы этих векторов. Достаточно универсальным способом решения задачи обеспечения требуемой структуры собственных векторов матрицы состояния проектируемой системы является метод обобщенного модального управления. Установлено, что корректный поиск структуры собственных векторов, обеспечивающей минимальное значение числа обусловленности их матрицы, должен осуществляться с учетом затрат на управление, оцениваемых максимальным сингулярным числом грамиана затрат на управление.

Н.О. Вундер, А.В. Ушаков

ЗАДАЧА ФОРМУВАННЯ СТРУКТУРИ ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ МАТРИЦІ СТАНУ НЕПЕРЕРВНОЇ СТІЙКОЇ СИСТЕМИ, ЩО ГАРАНТУЄ ВІДСУТНІСТЬ ВІДХИЛЕНЬ ЇЇ ТРАЄКТОРІЙ ВІД МОНОТОННО СПАДНОЇ КРИВОЇ ВІЛЬНОГО РУХУ

Виявлено, що за погано обумовленої структури власних векторів можливо виникнення помітних відхилень траєкторій системи від монотонно спадної кривої вільного руху. Знайдено вирішення задачі формування структури власних векторів матриці стану неперервної стійкої системи, що не допускає відхилення траєкторій системи від монотонно спадної кривої вільного руху. В отриманому вирішенні використовується процедура мінімізації числа обумовленості матриці цих векторів, а також можливість узагальненого модального керування.

N.A. Vunder, A.V. Ushakov

THE PROBLEM OF FORMING THE STRUCTURE OF EIGENVECTORS OF STATE MATRIX OF CONTINUOUS STABLE SYSTEM WHICH GUARANTEES THE ABSENCE OF DEVIATION OF ITS TRAJECTORIES FROM MONOTONELY DECREASING CURVE OF FREE MOTION

It is revealed that for ill conditioned structure of eigenvectors the occurrence of noticeable deviations of system trajectories from monotonely decreasing curve

of free motion is possible. It is obtained the problem solution of forming the structure of eigenvectors of state matrix of continuous stable system which does not admit the deviation of system trajectories from monotonely decreasing curve of free motion. The obtained solution uses the procedure of conditioning number minimization of matrices of these vectors as well as possibility of generalized modal control.

1. Вундер Н.А., Ушаков А.В. Исследование колебательности процессов непрерывных систем, порождаемых фактором кратности собственных чисел их матриц состояния // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2015. — № 6. — С. 21–36.
2. Вундер Н.А., Ушаков А.В. Исследование отклонения траекторий линейных устойчивых дискретных систем от монотонно убывающей кривой свободного движения в случае кратных вещественных положительных собственных чисел их матриц // Там же. — 2016. — № 6. — С. 5–15.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М. : Наука, 1973. — 576 с.
4. Ланкастер П. Теория матриц. — М. : Наука, 1982. — 272 с.
5. Григорьев В.В., Дроздов В.Н., Лаврентьев В.В., Ушаков А.В. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ. — Л. : Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1983. — 245 с.
6. Икрамов Х. Д. Численное решение матричных уравнений. — М. : Наука, 1984. — 192 с.
7. Ушаков А.В. Обобщенное модальное управление // Изв. вузов. Приборостроение. — 2000. — 43, № 3. — С. 8–16.
8. Химмельблау Д.М. Прикладное нелинейное программирование. Пер. с англ. — М. : Мир, 1975. — 535 с.
9. Бирюков Д.М., Слита О.В., Ушаков А.В. Грамианские технологии оценки затрат на управление в задаче обеспечения желаемой структуры мод и их робастности // Изв. вузов. Приборостроение. — 2009. — 52, № 11. — С. 32–37.

Получено 04.05.2016
После доработки 26.05.2016