

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

УДК 519.7; 629.7

С.М. Онищенко

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ ИЗБЫТОЧНОЙ СИСТЕМОЙ МАХОВИКОВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Введение

В работе [1] рассматривалась задача оптимальной стабилизации избыточной системой маховиков малогабаритного космического аппарата (КА) дистанционного зондирования Земли семейства «Січ» [2]. При этом предполагалось, что вектор состояния математической модели искусственного спутника Земли (ИСЗ) полностью известен (измеряется без погрешностей) и может использоваться при синтезе системы стабилизации угловой ориентации спутника. Но практически подобная ситуация нереальна — вектор состояния системы всегда измеряется с ошибками (если вообще все его компоненты поддаются измерениям) и поэтому в регулятор следует подставлять его оценку, полученную в результате решения задачи наблюдения с использованием внешней (дополнительной) информации.

Разумеется, принцип разделения, согласно которому задачи управления и наблюдения решаются независимо, справедлив лишь для линейных систем (например, [3]), а в нелинейном случае он далеко не очевиден и строго не доказан. Тем не менее на практике им часто пользуются и он приводит к весьма обнадеживающим результатам.

В настоящей статье продолжают исследования оптимальной стабилизации ИСЗ класса «Січ» избыточной системой маховиков, рассмотренные в [1]. В развитие этих исследований здесь применяется процедура наблюдения [4] вектора ошибок состояния КА с привлечением магнитометрической информации [5]. В регулятор подставляется оценка этого вектора, полученная в результате решения задачи наблюдения спутника в условиях неопределенности [4]. Координаты его местоположения полагаются известными в результате решения задачи навигации, которая в этой работе не рассматривается.

1. Уравнения ошибок сферического движения ИСЗ

В отличие от [1], используем несколько иные координатные базисы:

- ξ — базис, связанный с ИСЗ: его начало находится в центре масс ИСЗ, а оси ξ_1, ξ_2, ξ_3 совпадают с центральными осями инерции спутника;
- η — орбитальный базис с началом в центре масс ИСЗ и ортами η_1, η_2, η_3 , причем орт η_1 направлен в плоскости орбиты в сторону движения КА; орт η_2 перпендикулярен плоскости орбиты и с его конца движение КА по орбите представляется происходящим против часовой стрелки; орт η_3 направлен по геоцентрической вертикали в Зенит;

© С.М. ОНИЩЕНКО, 2017

*Международный научно-технический журнал
«Проблемы управления и информатики», 2017, № 1*

• ζ — геоцентрический базис с началом в центре Земли и тремя осями $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, жестко с ней связанными, причем орт ζ_3 направлен по оси суточного вращения Земли, а орты ζ_1, ζ_2 лежат в плоскости земного экватора.

Используя результаты работы [1], полученные в процессе решения задачи оптимальной стабилизации ИСЗ, систему уравнений ошибок его сферического движения можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{2} N_{s\eta}(\omega_s, \omega_\eta) x + \frac{1}{2} {}^0 M(\lambda_s + x) y, \\ \dot{y} &= \tilde{J}^{-1} [U_{sy}(\omega_s, q_s, y) y + U^T(\omega) z - \Delta Y_\xi^e + \Delta X_\xi^p], \\ \dot{z} &= \tilde{J} [U_{sy}(\omega_s, y) y + C_P(\omega_s, \mathfrak{E}) \mathfrak{E} - \Delta X_\xi^p] + \Delta Y_\xi^e. \end{aligned} \quad (1)$$

В задаче приняты такие обозначения:

$$\begin{aligned} \lambda - \lambda_s &= x, \quad \omega - \omega_s = y, \quad q - q_s = z, \quad U_{sy} = -U_{sy} + U(q_s), \\ N_{s\eta} &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{s1} & -\omega_{s2} - \omega_{\eta 2} & -\omega_{s3} \\ \omega_{s1} & 0 & \omega_{s3} & -\omega_{s2} + \omega_{\eta 2} \\ \omega_{s2} + \omega_{\eta 2} & -\omega_{s3} & 0 & \omega_{s1} \\ \omega_{s3} & \omega_{s2} - \omega_{\eta 2} & -\omega_{s1} & 0 \end{bmatrix}, \quad {}^0 M(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \\ \lambda_0 - \lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_0 - \lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix}, \quad (2) \\ U_{sy} &= \begin{bmatrix} 0 & J_{32}\omega_{s3} - J_2 y_3 & J_{32}\omega_{s2} + J_3 y_2 \\ J_{13}\omega_{s3} + J_1 y_3 & 0 & J_{13}\omega_{s1} - J_3 y_1 \\ J_{21}\omega_{s2} - J_1 y_2 & J_{21}\omega_{s1} + J_2 y_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad U(a) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

причем x — отклонения спутника (связанного с ним трехгранника ξ) от заданной в параметрах Родрига–Гамильтона $\lambda_k, k = \overline{0, 3}$, его угловой ориентации; y — возмущения вектора абсолютной угловой скорости ИСЗ; z — суммарный кинетический момент q системы маховиков в переходном процессе оптимальной стабилизации спутника; U — оператор векторного произведения векторов $\mathbf{a} \mathbf{C} \mathbf{b} \Leftrightarrow U(a) b$ в матричном пространстве, где b — матрица-столбец третьего порядка; ΔX_ξ^p — флуктуации возмущающего момента в проекциях на оси ξ (его составляющими являются момент сил светового давления Солнца и моменты влияния Земли — магнитный, гравитационный, аэродинамический); ΔY_ξ^e — невязки моментов, создаваемых электродвигателями маховиков, которые должны нейтрализовать в уравнениях (1) ошибки стабилизации ИСЗ в задаче его ориентации; $\omega_{\eta 2} = \sqrt{\mu/r^3}$ — проекция вектора угловой орбитальной скорости $\omega_\eta = [0 \ -\omega_{\eta 2} \ 0]^T$ спутника на ось η_2 орбитального трехгранника η , где μ — гравитационная постоянная Земли, r — радиус орбиты ИСЗ [6]; T — знак операции транспонирования матриц; точкой обозначается дифференцирование по времени.

В (1) также для удобства обозначено $\tilde{J} = J_* \Upsilon \Upsilon^T J^{-1}$, $\tilde{J} = J - J_* \Upsilon \Upsilon^T$, причем $J = \text{diag}[J_1 J_2 J_3]$ — диагональный тензор инерции ИСЗ, в котором $J_k, k = \overline{1, 3}$, —

главные центральные моменты инерции КА относительно осей связанного с ним координатного базиса ξ ; J_* — момент инерции маховика относительно оси его собственного вращения (все четыре маховика идентичны); $Y = \text{const} \in \mathbf{R}_{3 \times 4}$ — матрица, описывающая ориентацию маховиков относительно корпуса ИСЗ (при любом его движении остается неизменной) и позволяющая выбирать из них три рабочих маховика (ее структура имеет специфический вид, проиллюстрированный табл. 5.1 в работе [5]).

При этом программные значения параметров ориентации КА (они отмечены нижним индексом s) по-прежнему [1] задаются условиями $\omega = \omega_s$, $\lambda = \lambda_s$, которые обеспечиваются вращением системы маховиков с программным вектором кинетического момента $q = q_s$; проекции векторов абсолютной угловой скорости ИСЗ ω_ξ и кинетического момента совокупности четырех маховиков q_ξ на оси связанного трехгранника ξ далее обозначаются без нижнего индекса ξ в виде ω , q .

В третьем уравнении (1) в регуляторе применяется оценка \mathfrak{F} вектора состояния системы вместо самого вектора y в классической постановке задачи управления; матрица C_P усиления оптимального регулятора синтезирована в работе [1] и здесь не приводится, поскольку в явном виде она нигде далее не используется.

В (2) дополнительно принято $J_{ij} = J_i - J_j$, $i, j = \overline{1, 3}$, $i \neq j$.

Систему (1) можно представить одним матричным уравнением ошибок стабилизации спутника

$$\dot{\gamma} = \Phi \gamma + B {}^0 C_P \mathfrak{F} + {}^0 I \Delta Y_\xi^e - {}^0 \tilde{J} \Delta X_\xi^p, \gamma(t_0) = \gamma_0, \quad (3)$$

если с учетом (2) ввести обозначения

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} N_{s\eta}(\omega_s, \omega_\eta) & \frac{1}{2} M(\lambda_s, x) & O_{4 \times 3} \\ O_{3 \times 4} & \tilde{J}^{-1} U_{sy}(\omega_s, q_s, y) & \tilde{J}^{-1} U^T(\omega_s, y) \\ O_{3 \times 4} & \tilde{J} U_{sy}(\omega_s, y) & O_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad {}^0 I = \begin{bmatrix} O_{4 \times 3} \\ -\tilde{J}^{-1} \\ I_3 \end{bmatrix}, \quad {}^0 \tilde{J} = \begin{bmatrix} O_{4 \times 3} \\ \tilde{J}^{-1} \\ -\tilde{J} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} O_{4 \times 3} \\ O_{3 \times 3} \\ \tilde{J} \end{bmatrix}, \quad {}^0 C_P(\omega_s, \mathfrak{F}) = [O_{3 \times 4} \quad C_P \quad O_{3 \times 3}],$$

где $O_{i \times j}$, I_k — нулевые и единичные матрицы соответствующих размерностей.

Воспользовавшись уравнением (3), можно приступить к построению асимптотически устойчивого наблюдателя состояния спутника.

2. Построение магнитометрического наблюдателя сферического движения ИСЗ

Известна и успешно применяется возможность оценки параметров сферического движения КА по показаниям магнитометров при условии задания координат его местонахождения, причем сначала находятся эти координаты, а затем решается задача оценки параметров ориентации спутника. При этом, поскольку связь уравнений ошибок в задачах навигации и ориентации крайне слабая, считается возможным оценивать решения этих уравнений отдельными фильтрами [5].

Для проекций h_η вектора напряженности геомагнитного поля \mathbf{h} на оси орбитальной системы координат η известны достаточно точные аналитические за-

висимости, связывающие их с параметрами местоположения ИСЗ и ориентации орбитального базиса $\boldsymbol{\eta}$ в геоцентрической системе координат ζ [7, 8]. Их необходимо проектировать на связанные с объектом оси и сравнивать с показаниями трехкомпонентного феррозондового магнитометра LEMI-016M, измеряющего на борту «Січ-2» проекции h_ξ вектора напряженности геомагнитного поля на оси связанной системы координат ξ с инструментальными погрешностями v . Так строится вектор измерения для решения задачи оценки вектора состояния ИСЗ в задаче его угловой стабилизации. Имеем

$$\rho = h_\xi - A_\lambda h_\eta = \Psi(\lambda_s, h_\eta, x)x + v, \quad (5)$$

где, помимо уже оговоренных величин h_ξ, h_η, v , дополнительно используется A_λ — матрица направляющих косинусов в параметрах Родрига–Гамильтона между осями трехгранников ξ и η .

Отметим, что все параметры сферического движения микроспутника при реальных значениях его моментов инерции (если его эллипсоид инерции отличен от сферы) вполне наблюдаемы по показаниям магнитометров [9].

Обратимся к уравнению ошибок (3) сферического движения ИСЗ, которое с учетом вектора магнитометрических измерений (5) позволяет построить уравнение наблюдателя

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \Phi \boldsymbol{\xi} + B^0 C_P \boldsymbol{\xi} + {}^0 I \Delta Y_\xi^e + K[\rho - \Psi(\lambda_s, h_\eta, \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}], \quad \boldsymbol{\xi}(t_0) = 0. \quad (6)$$

Уравнение погрешностей наблюдения получим как разность уравнений (3) и (6), обозначив

$$\gamma - \boldsymbol{\xi} = \sigma, \quad (7)$$

в виде [4]

$$\dot{\sigma} = [\Phi(\omega_s, \omega_\eta, \lambda_s, q_s, \boldsymbol{\xi}, \sigma) - KF(\lambda_s, h_\eta, \boldsymbol{\xi}, \sigma)]\sigma + \phi(t), \quad \sigma(t_0) = \gamma_0. \quad (8)$$

Здесь матрица $\Phi(\omega_s, \omega_\eta, \lambda_s, q_s, \boldsymbol{\xi}, \sigma)$ после преобразований приобретает форму, аналогичную по структуре матрице $\Phi(\omega_s, \omega_\eta, \lambda_s, q_s, \gamma)$ из (4), так что имеем

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} N_{s\eta}(\tilde{\omega}_s, \omega_\eta) & \frac{1}{2} M(\tilde{\lambda}_s) & O_{4 \times 3} \\ O_{3 \times 4} & \tilde{J}^{-1} [U_{sy\sigma}^T(\tilde{\omega}_s, \sigma_y) + U(\tilde{\omega}_s + \sigma_y)] & \tilde{J}^{-1} U^T(q_s + \boldsymbol{\xi}) \\ O_{3 \times 4} & \tilde{J} U_{sy\sigma}(\tilde{\omega}_s, \sigma_y) & O_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

причем в ее компонентах используются выражения

$$U_{sy\sigma}(\tilde{\omega}_s, \sigma_y) = \begin{bmatrix} 0 & J_{32}\tilde{\omega}_{s_3} - J_2\sigma_3 & J_{32}\tilde{\omega}_{s_2} + J_3\sigma_2 \\ J_{13}\tilde{\omega}_{s_3} + J_1\sigma_3 & 0 & J_{13}\tilde{\omega}_{s_1} - J_3\sigma_1 \\ J_{21}\tilde{\omega}_{s_2} - J_1\sigma_2 & J_{21}\tilde{\omega}_{s_1} + J_2\sigma_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\omega}_s = \omega_s + \boldsymbol{\xi}_s, \quad \tilde{\omega}_{s_i} = \omega_{s_i} + \boldsymbol{\xi}_i, \quad i = \overline{1, 3}; \quad \tilde{\lambda}_k = \lambda_{s_k} + \boldsymbol{\xi}_k + \sigma_{x_k}, \quad k = \overline{0, 3}, \quad (10)$$

$$\sigma_x = x - \boldsymbol{\xi}, \quad \sigma_y = y - \boldsymbol{\xi}, \quad \sigma_z = z - \boldsymbol{\xi}$$

Матрица F в результате преобразований $\Psi(\lambda_s, h_\eta, x)x - \Psi(\lambda_s, h_\eta, \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}$ матрицы Ψ из формулы (5) с учетом выражения $x = \boldsymbol{\xi} + \sigma_x$ из (10) может быть представлена в виде

$$F(\lambda_s, h_\eta, \boldsymbol{\xi}, \sigma) = [F_1 \ F_2], \quad F_1 = [f_0 \ f_1 \ f_2] \in \mathbf{R}_{3 \times 3}, \quad F_2 = [f_3 \ O_{3 \times 6}] \in \mathbf{R}_{3 \times 7}, \quad (11)$$

причем

$$\begin{aligned}
 f_0 &= \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_{s_3} h_{\eta_2} + \tilde{\lambda}_{s_2} h_{\eta_3} \\ \tilde{\lambda}_{s_3} h_{\eta_1} - \tilde{\lambda}_{s_1} h_{\eta_3} \\ -\tilde{\lambda}_{s_2} h_{\eta_1} + \tilde{\lambda}_{s_1} h_{\eta_2} \end{bmatrix}, \quad f_1 = \begin{bmatrix} -\tilde{\lambda}_{s_2} h_{\eta_2} - \tilde{\lambda}_{s_3} h_{\eta_3} \\ -\tilde{\lambda}_{s_2} h_{\eta_1} + (2\tilde{\lambda}_{s_1} - \sigma_{x_1}) h_{\eta_2} - (\lambda_{s_0} + \xi_0) h_{\eta_3} \\ -\tilde{\lambda}_{s_3} h_{\eta_1} + (\lambda_{s_0} + \xi_0) h_{\eta_2} + (2\tilde{\lambda}_{s_1} - \sigma_{x_1}) h_{\eta_3} \end{bmatrix}, \\
 f_2 &= \begin{bmatrix} (2\tilde{\lambda}_{s_2} - \sigma_{x_2}) h_{\eta_1} - (\lambda_{s_1} + \xi_1) h_{\eta_2} + (\lambda_{s_0} + \xi_0) h_{\eta_3} \\ -(\lambda_{s_1} + \xi_1) h_{\eta_1} - \tilde{\lambda}_{s_3} h_{\eta_3} \\ -(\lambda_{s_0} + \xi_0) h_{\eta_1} - (\lambda_{s_3} + \xi_3) h_{\eta_2} + (2\tilde{\lambda}_{s_2} - \sigma_{x_2}) h_{\eta_3} \end{bmatrix}, \\
 f_3 &= \begin{bmatrix} (2\tilde{\lambda}_{s_3} - \sigma_{x_3}) h_{\eta_1} - (\lambda_{s_0} + \xi_0) h_{\eta_2} - (\lambda_{s_1} + \xi_1) h_{\eta_3} \\ (\lambda_{s_0} + \xi_0) h_{\eta_1} + (2\tilde{\lambda}_{s_3} - \sigma_{x_3}) h_{\eta_2} - (\lambda_{s_2} + \xi_2) h_{\eta_3} \\ -(\lambda_{s_1} + \xi_1) h_{\eta_1} - \tilde{\lambda}_{s_2} h_{\eta_2} \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{12}$$

так что из (11), (12) следует

$$F_1 \in \mathbf{R}_{3 \times 3}, \quad \text{rang } F_1 = 3, \quad \exists F_1^{-1}. \tag{13}$$

Что же касается вектора $\phi(t)$ в уравнении (8), то для него оказывается справедливой формула

$$\phi(t) = {}^0\tilde{J} \Delta X_{\xi}^p(t) - K v(t). \tag{14}$$

Далее будем полагать в (1), (5) и (14) $|\Delta X_{\xi}^p| < \varepsilon$, $|v| < \varepsilon$, $|\phi| < \varepsilon$, а чтобы уменьшить степень неопределенности этих помех, их можно, например, априори идентифицировать волновым представлением [10, 11, 4]

$$\Delta X_{\xi}^p(t) = \Gamma(t) \chi(t), \quad v(t) = \Xi(t) \chi(t), \quad \dot{\chi} = H(t) \chi + \delta(t), \quad \chi(t_0) = \chi_0, \tag{15}$$

с заданными матрицами коэффициентов Γ , Ξ , H и вектором δ с компонентами в виде импульсных функций Дирака случайной и достаточно малой интенсивности и случайными моментами их появления, причем будем полагать $|\delta| < \varepsilon$.

В этом случае для функции (14) с использованием (15) получаем выражение

$$\phi(t) = [{}^0\tilde{J} \Gamma(t) - K \Xi(t)] \chi(t),$$

с которым уравнение (8) превращается в часть расширенной системы

$$\dot{\sigma} = (\Phi - KF) \sigma - ({}^0\tilde{J} \Gamma - K \Xi) \chi, \quad \dot{\chi} = H(t) \chi + \delta(t), \quad \sigma(t_0) = \sigma_0, \quad \chi(t_0) = \chi_0, \tag{16}$$

позволяющей решать задачу стабилизации сферического движения ИСЗ в условиях неопределенности. Матрицу K в ней можно синтезировать любым конструктивным методом жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации [12–14], используя однородное уравнение

$$\dot{\sigma} = [\Phi(\omega_s, \omega_{\eta}, \lambda_s, q_s, \xi, \sigma) - KF(\lambda_s, h_{\eta}, \xi, \sigma)] \sigma, \quad \sigma(t_0) = \sigma_0, \tag{17}$$

соответствующее (8). При этом ξ нужно рассматривать как параметр.

Синтезированная матрица K обеспечит равномерную по σ_0, t_0 асимптотическую устойчивость решений уравнения (17), когда при любых начальных условиях его решения будут асимптотически стремиться к нулю.

К сожалению, этот вариант справедлив лишь для однородного уравнения (17). В случае же уравнения (8) или системы (16) решение будет стремиться не к нулю, а к некоторой достаточно малой окрестности нуля, так что получим $\sigma(\sigma_0, t_0, t) \rightarrow \sigma_*(t)$, $t \rightarrow \infty$, $|\sigma_*(t)| < \varepsilon$. Тогда с учетом (7) будет выполняться условие

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\gamma(t) - \mathfrak{E}(t)| = \sigma_*(t). \quad (18)$$

Таким образом, в рассматриваемой ситуации, если решение однородного уравнения (17) равномерно асимптотически устойчиво, то решение соответствующего ему неоднородного уравнения (8) при постоянно действующих возмущениях будет устойчивым неасимптотически [15].

Воспользовавшись уравнением (17), можно приступить к построению асимптотически устойчивого наблюдателя вектора состояния спутника.

3. Решение задачи наблюдения вектора ошибок состояния ИСЗ

Для построения матрицы K можно воспользоваться любым методом жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации, позволяющим решать для замкнутой системы (17) не только задачу стабилизации (находить матрицу F при заданных матрицах Φ, K), но и задачу наблюдения (синтезировать матрицу K , если заданы матрицы Φ, F).

Однако в рассматриваемом случае матрицы F с ее структурой (11), (12) для решения поставленной задачи наблюдения самым удобным можно считать метод простого жесткого синтеза нелинейных систем стабилизации (ПрЖС НСС) [13].

Разумеется, структура (11), (13) матрицы F определяет и соответствующую структуру матриц Φ и K в виде

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{22} \end{bmatrix} \quad (19)$$

и размер блоков в этих матрицах, поэтому имеем

$$\Phi_{11} \in \mathbf{R}_{3 \times 3}, \quad \Phi_{12} \in \mathbf{R}_{3 \times 7}, \quad \Phi_{21} \in \mathbf{R}_{7 \times 3}, \quad \Phi_{22} \in \mathbf{R}_{7 \times 7}, \quad K_{11} \in \mathbf{R}_{3 \times 3}, \quad K_{22} \in \mathbf{R}_{7 \times 3}. \quad (20)$$

Сравнивая выражения (9), (10) и (19), (20) матрицы Φ , можно получить формулы, которые будут описывать ее блоки (20) следующим образом:

$$\Phi_{11} = \frac{1}{2} N_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{\omega}_{s_1} & -\tilde{\omega}_{s_2} & -\omega_{\eta_2} \\ \tilde{\omega}_{s_1} & 0 & \tilde{\omega}_{s_3} & \\ \tilde{\omega}_{s_2} + \omega_{\eta_2} & -\tilde{\omega}_{s_3} & 0 & \end{bmatrix}, \quad \Phi_{12} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_3 \\ 0_{n_4} \tilde{\lambda}_0 \quad -\tilde{\lambda}_3 \quad \tilde{\lambda}_2 \quad O_{3 \times 3} \\ \tilde{\lambda}_3 \quad \tilde{\lambda}_0 \quad -\tilde{\lambda}_1 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\Phi_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \tilde{\lambda}_2 \quad \frac{1}{2} \tilde{\lambda}_1 \quad \frac{1}{2} \tilde{\lambda}_0 & 0_{1 \times 3} \\ 0_{7 \times 1} \tilde{J}^{-1} [U_{sy\sigma}^T + U(q_s, \mathfrak{E})] \tilde{J}^{-1} U^T(\tilde{\omega}_s, \sigma_y) & \\ \tilde{J} U_{sy\sigma}(\tilde{\omega}_s, \sigma_y) & O_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad \Phi_{21} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -0_{n_4}^T \\ O_{6 \times 3} \end{bmatrix},$$

где учтены введенные ранее обозначения (10), и необходимо принять к сведению такие пояснения: N_3 — главный диагональный минор третьего порядка матрицы $N_{s\eta}$ из (2); $0_{n_4}^T$ — четвертая строка этой же матрицы без последней нулевой компоненты.

Чтобы воспользоваться далее методом ПрЖС НСС, зададим две положительно-определенные квадратичные формы — стационарную $V = \sigma^T D \sigma > 0$ и $W = \sigma^T Q(\sigma, t) \sigma > 0$, причем пусть полная производная по времени формы V на траекториях системы (17) будет отрицательно-определенной квадратичной формой, удовлетворяющей известному условию Ляпунова $\dot{V} = -W$, когда оно приводит к матричному уравнению

$$D(\Phi - KF) + (\Phi - KF)^T D = -Q. \quad (22)$$

Рассмотрим случай нижних матриц D, Q , определяемых формулами [12]

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{11}D_{12} \\ D_{12}^T D_{11} & D_{12}^T D_{11}D_{12} + D_{22} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$Q = 2 \begin{bmatrix} D_{11}Q_{11}D_{11} & D_{11}Q_{11}D_{11}D_{12} \\ D_{12}^T D_{11}Q_{11}D_{11} & D_{22}Q_{22}D_{22} + D_{12}^T D_{11}Q_{11}D_{11}D_{12} \end{bmatrix},$$

причем их блоки будут иметь размерности, соответствующие (19), (20).

Структура матриц (11), (19), (23) позволяет записать уравнение Ляпунова (22) в виде трех уравнений устойчивости системы (17):

$$D_{11}({}^1\Phi_{11} - {}^1K_{11}F_1) + ({}^1\Phi_{11} - {}^1K_{11}F_1)^T D_{11} = -2D_{11}Q_{11}D_{11}, \quad (24)$$

$$D_{22}({}^1\Phi_{22} - K_{22}{}^1F_2) + ({}^1\Phi_{22} - K_{22}{}^1F_2)^T D_{22} = -2D_{22}Q_{22}D_{22}, \quad (25)$$

$$D_{11}({}^1\Phi_{12} - {}^1\Phi_{11}D_{12} - {}^1K_{11}{}^1F_2) + (\Phi_{21} - K_{22}F_1)^T D_{22} = 0. \quad (26)$$

В них для удобства с учетом выражений (19), (23) обозначено

$${}^1\Phi_{11} = \Phi_{11} + D_{12}\Phi_{21}, \quad {}^1\Phi_{12} = \Phi_{12} + D_{12}\Phi_{22}, \quad {}^1\Phi_{22} = \Phi_{22} - \Phi_{21}D_{12}, \quad (27)$$

$${}^1K_{11} = K_{11} + D_{12}K_{22}, \quad {}^1F_2 = F_2 - F_1D_{12}.$$

В методе ПрЖС НСС матрица K_{11} находится из уравнения (24), K_{22} — из (26), а уравнение (25) после исключения в нем K_{22} превращается в условие стабилизируемости системы (17).

Применяя к уравнению (24) метод кососимметризации [14], при выполнении условия (13) нетрудно определить матрицу ${}^1K_{11} = [{}^1\Phi_{11} + (Q_{11} + S_{11})D_{11}]F_1^{-1}$, исключая которую в уравнении (26), после несложных преобразований получим

$$K_{22} = [{}_D\Phi_{21} - D_{22}^{-1}F_*^T D_{11}(Q_{11} - S_{11})D_{11}]F_1^{-1} \quad (28)$$

с использованием обозначений (27) и

$${}_D\Phi_{21} = \Phi_{21} + D_{22}^{-1}({}^1\Phi_{12} - {}^1\Phi_{11}F_*)^T D_{11}, \quad {}^1F_* = F_1^{-1}F_2 = F_* - D_{12}, \quad F_* = F_1^{-1}F_2. \quad (29)$$

Учитывая выражение ${}^1K_{11}$ в (27), можно определить

$$K_{11} = {}^1K_{11} - D_{12}K_{22}. \quad (30)$$

Для решения задачи наблюдения в уравнении наблюдателя (6) матрицу K желательно иметь не в форме (19), а в виде

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} \quad (31)$$

с компонентами

$$K_1 \in \mathbf{R}_{4 \times 3}, \quad K_2 \in \mathbf{R}_{3 \times 3}, \quad K_3 \in \mathbf{R}_{3 \times 3}. \quad (32)$$

Но по построению согласно (30) $K_{11} \in \mathbf{R}_{3 \times 3}$, а из (28) имеем $K_{22} \in \mathbf{R}_{7 \times 3}$, так что необходимо провести реструктуризацию блоков K_{11}, K_{22} матрицы K .

Опуская довольно громоздкие промежуточные выкладки с использованием выражений (21), в окончательном варианте будем иметь

$$K_1 = \left[\frac{1}{2} {}^* N_{s\eta}(\tilde{\omega}_s, \omega_\eta) + \left(\frac{1}{2} {}^0 d_1 {}^0 n_4^T - {}_1 d_1 e_1 - {}_d D_d E_* - {}_0 D_1 E_2 + {}_0 Q_{11} + {}_0 S_{11} \right) D_{11} \right] F_1^{-1}, \quad (33)$$

$$K_2 = (E_2 + {}^1 D_{21}^T E_*) D_{11} F_1^{-1}, \quad K_3 = -E_* D_{11} F_1^{-1},$$

где для удобства обозначено

$${}^* N_{s\eta}(\tilde{\omega}_s, \omega_\eta) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{\omega}_{s_1} & -\tilde{\omega}_{s_2} - \omega_{\eta_2} \\ \tilde{\omega}_{s_1} & 0 & \tilde{\omega}_{s_3} \\ \tilde{\omega}_{s_2} + \omega_{\eta_2} & -\tilde{\omega}_{s_3} & 0 \\ \tilde{\omega}_{s_3} & \tilde{\omega}_{s_2} - \omega_{\eta_2} & -\tilde{\omega}_{s_1} \end{bmatrix}$$

— матрица из (2) с учетом (10), но без последнего четвертого столбца; ${}^0 n_4^T$ — четвертая строка этой же матрицы;

$$e_1 = \frac{1}{2} {}^0 n_4^T - f_3^T F_1^{-T} \Omega - (f_3^T F_1^{-T} - d_1^T) D_{11} (Q_{11} - S_{11}),$$

$$E_2 = L + \tilde{J}^{-1} [U_{sy\sigma}^T + U(q_s, \mathfrak{E})] D_1^T + \tilde{J} U_{sy\sigma}^T D_2^T + D_1^T D_{11} (Q_{11} - S_{11}),$$

$$E_3 = \tilde{J}^{-1} U^T(\tilde{\omega}_s, \sigma_y) D_1^T + D_2^T D_{11} (Q_{11} - S_{11}), \quad E_* = {}^1 d_{21} p_1 + {}^1 D_{21} E_2 - E_3,$$

$$L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -d_{11} \tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1 & -d_{21} \tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_0 & -d_{31} \tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3 \\ d_{11} \tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2 & d_{21} \tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_3 & d_{31} \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_0 \\ d_{11} \tilde{\lambda}_0 - \tilde{\lambda}_3 & d_{21} \tilde{\lambda}_0 + \tilde{\lambda}_2 & d_{31} \tilde{\lambda}_0 - \tilde{\lambda}_1 \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} d_{11} \tilde{\omega}_{s_3} & d_{21} \tilde{\omega}_{s_3} + \tilde{\omega}_{s_1} & d_{31} \tilde{\omega}_{s_3} + \tilde{\omega}_{s_2} + \omega_{\eta_2} \\ d_{11} (\tilde{\omega}_{s_2} - \omega_{\eta_2}) - \tilde{\omega}_{s_1} & d_{21} (\tilde{\omega}_{s_2} - \omega_{\eta_2}) & d_{31} (\tilde{\omega}_{s_2} - \omega_{\eta_2}) - \tilde{\omega}_{s_3} \\ -d_{11} \tilde{\omega}_{s_1} - \tilde{\omega}_{s_2} - \omega_{\eta_2} & -d_{21} \tilde{\omega}_{s_1} + \tilde{\omega}_{s_3} & -d_{31} \tilde{\omega}_{s_1} \end{bmatrix},$$

$${}^0 d_1 = \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}_1 d_1 = \begin{bmatrix} d_1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad {}_d D_d = \begin{bmatrix} D_d \\ -{}^1 d_{21}^T \end{bmatrix}, \quad D_d = d_1 {}^1 d_{21}^T + D_1 {}^1 D_{21}^T - D_2.$$

Кроме того, в формулах (33) использованы представления блоков D_{12} , D_{22} матрицы D из (23) в виде

$$D_{12} = [d_1 \ D_1 \ D_2], \quad d_1 = [d_{11} \ d_{21} \ d_{31}]^T, \quad \{D_1, D_2\} \in \mathbf{R}_{3 \times 3}, \quad (34)$$

$$D_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 + {}^1d_{21}^T {}^1d_{21} & {}^1d_{21}^T {}^1D_{21} & -{}^1d_{21}^T \\ {}^1D_{21}^T {}^1d_{21} & I_3 + {}^1D_{21}^T {}^1D_{21} & -{}^1D_{21}^T \\ -{}^1d_{21} & -{}^1D_{21} & I_3 \end{bmatrix},$$

а также $\{ {}_0D_1, {}_0Q_{11}, {}_0S_{11} \} \in \mathbf{R}_{4 \times 3}$ — матрицы соответственно из (34), (28), но с дополнительной четвертой нулевой строкой $0^T \in \mathbf{R}_{1 \times 3}$.

Таким образом, матрица K будет определяться выражениями (31), (32). Ее необходимо подставить в уравнение наблюдателя (6), из которого интегрированием находятся текущие значения оценок ошибок (возмущений) вектора состояния ИСЗ. Их необходимо использовать в стабилизирующем регуляторе КА для решения задачи его угловой стабилизации.

В методе ПрЖС НСС единственное условие стабилизируемости получается из уравнения (25) после исключения в нем матрицы K_{22} с помощью соотношения (28), когда оно представляется в виде

$$D_{22} {}_F\Phi_{22} + {}_F\Phi_{22}^T D_{22} = -2D_{22} Q_{22} D_{22} < 0, \quad (35)$$

где с учетом обозначений (21), (27), (29)

$${}_F\Phi_{22} = \Phi_{22} - \Phi_{21} F_* + D_{22}^{-1} ({}^1\Phi_{12} - {}^1\Phi_{11} F_*)^T D_{11} {}^1F_* + \frac{1}{2} {}^1F_*^T D_{11} (Q_{11} - S_{11}) D_{11} {}^1F_*.$$

Условие (35), если в нем обозначить $\Theta = -(D_{22} {}_F\Phi_{22} + {}_F\Phi_{22}^T D_{22}) \in \mathbf{R}_{7 \times 7}$, окажется возможным свести к виду $\Theta = 2D_{22} Q_{22} D_{22} > 0$ и удовлетворить стандартными неравенствами Сильвестра

$$\Delta_j(\Theta) > l_j > 0, \quad j = \overline{1, 7}. \quad (36)$$

Разумеется, проблема аналитического обеспечения семи неравенств (36) представляется достаточно трудоемкой задачей. Однако ее решение значительно упрощается при использовании нелинейной схемы компромиссов [16] с реализацией через скалярную свертку частных критериев (36) в виде

$$\mathfrak{G}(\omega_s, \omega_\eta, \lambda_s, q_s, \mathfrak{f}, \sigma, t, \mathbf{D}) = \sum_{j=1}^7 \frac{l_j}{\Delta_j(\Theta) - l_j} \rightarrow \min_{\mathbf{D}}$$

путем минимизации нелинейной функции $\mathfrak{G}(\omega_s, \omega_\eta, \lambda_s, q_s, \mathfrak{f}, \sigma, t, \mathbf{D})$ по параметрам $d_{is}, q_{lm} \in \mathbf{D}$, в частности, симплекс-методом Нелдера–Мида [17].

4. Математическое моделирование погрешностей наблюдения состояния ИСЗ и его поведения с наблюдателем

Моделирование всех уравнений проводилось методом Рунге–Кутты в среде MatLab в несколько облегченном варианте. Так, результаты моделирования уравнения (8), (14) для нулевых начальных условий, значений коэффициентов:

$$J_1 = 30, J_2 = 35, J_3 = 40; D_{11} = I_3, \quad D_{12} = 0, \quad S_{11} = 0, \quad Q_{11} = \text{diag}[5 \ 7 \ 9], \quad (37)$$

$$D_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & {}^1d_{21}^T & -{}^1d_{21}^T \\ {}^1d_{21} & 2I_3 & -I_3 \\ -{}^1d_{21} & -I_3 & I_3 \end{bmatrix}, \quad {}^1d_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1D_{21} = I_3,$$

условий движения спутника по круговой орбите

$$\omega_\eta = [0 \ -1,069 \cdot 10^{-3} \ c^{-1} \ 0]^T, \quad \omega_\varsigma = -[0,01 \ 0,02 \ 0,03], \quad X_\xi^p = [0 \ 0 \ 0,04] \quad (38)$$

и погрешностей магнитометра $\nu = [0,01 \ 0,012 \ 0,014]$ представлены на рис. 1, 2.

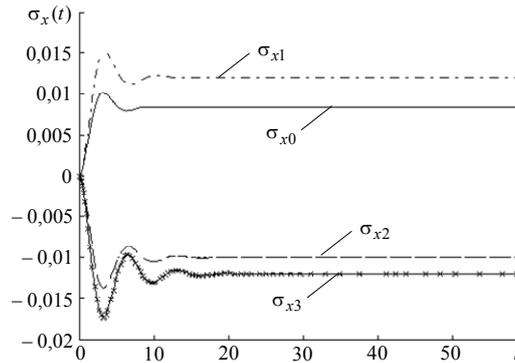


Рис. 1

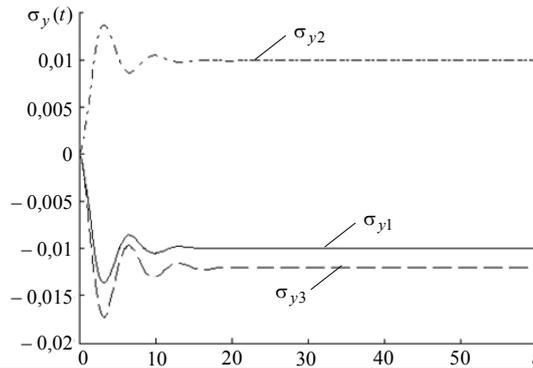


Рис. 2

Как видно из рис. 1, погрешность наблюдения состояния ИСЗ σ_{x_0} достигает устойчивого значения 0,008 на 8 с, погрешность σ_{x_1} достигает устойчивого значения 0,012 на 14 с, погрешность σ_{x_2} достигает устойчивого значения (-0,01) на 17 с, погрешность σ_{x_3} достигает устойчивого значения (-0,012) на 21 с.

Из рис. 2 видно, что погрешность наблюдения состояния ИСЗ σ_{y_1} становится равной (-0,01) на 15 с, погрешность σ_{y_2} достигает величины 0,01 на 20 с, σ_{y_3} равна величине (-0,012) на 24 с.

Результаты моделирования уравнения (6) наблюдателя вектора состояния спутника в случае оптимального стабилизирующего управления при начальных условиях

$$\mathcal{E}(0) = [\mathcal{E}^T(0), \mathcal{F}^T(0), \mathcal{G}^T(0)]^T, \quad \mathcal{E}_i(0) = \mathcal{F}_k(0) = \mathcal{G}_k(0) = 0,1, \quad i = \overline{1,4}, \quad k = \overline{1,3}, \quad (39)$$

значениях коэффициентов и условиях движения ИСЗ в виде (37), (38) показаны на рис. 3, 4. Кроме того, было принято, как в [1]:

$$D = \text{diag}[0,5 \ 0,7 \ 0,9], \quad Q = \text{diag}[5 \ 7 \ 9], \quad R = \text{diag}[1,5 \ 3,7 \ 7,8].$$

Из рис. 3 очевидно, что наблюдение ξ_0 координаты x_0 становится равным 0,01 на 17 с, ξ_1 становится равным 0,012 на 18 с, ξ_2 становится равным 0,014 на 13 с, ξ_3 становится равным 0,016 на 12 с.

Наблюдение $f(t)$ вектора y на рис. 4 достигает значений $(-0,06; -0,07; -0,08)$ соответственно на 0,23; 0,15 и 0,08 с.

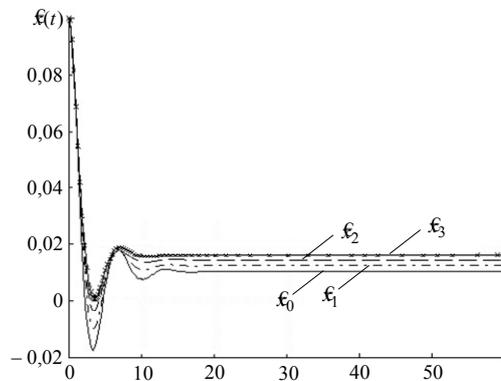


Рис. 3

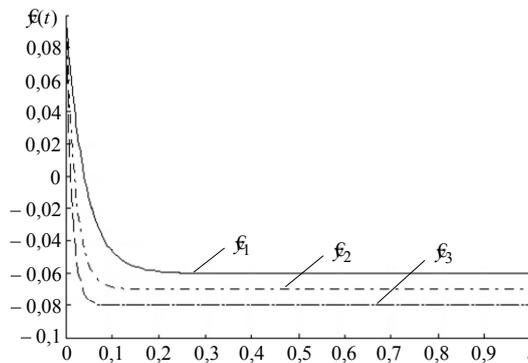


Рис. 4

И, наконец, результаты моделирования векторно-матричного уравнения (3) при начальных условиях (39), значениях параметров ИСЗ (37) и условиях его движения (38) представлены соответственно на рис. 5, 6.

Из рис. 5 следует, что отклонение x_0 достигает величины 0,01 на 38 с, отклонение x_1 достигает значения 0,012 на 31 с, x_2 становится равным 0,014 на 23 с и x_3 достигает величины 0,016 на 21 с.

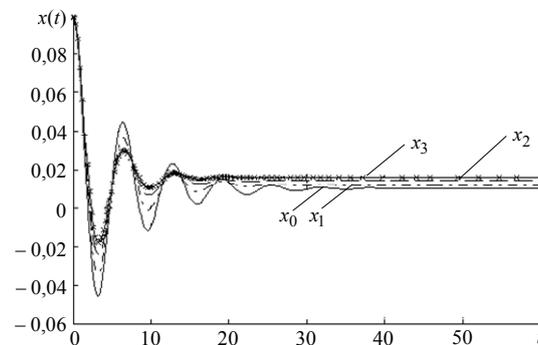


Рис. 5

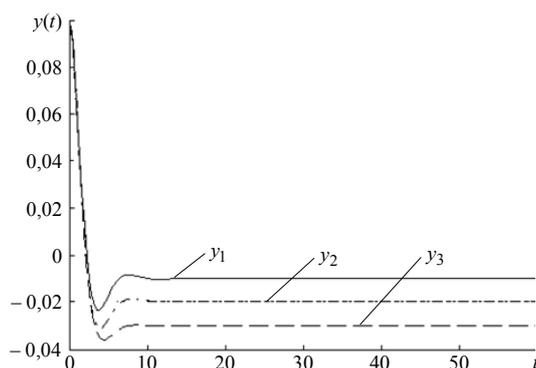


Рис. 6

Из рис. 6 видно, как отклонение y компонент абсолютной угловой скорости движения ИСЗ достигает значений $(-0,091; -0,02; -0,032)$ соответственно на 13, 10 и 9 с вместо желаемых нулевых значений. К тому же на сам процесс стабилизации уходит значительно больше времени, чем в варианте, когда в регуляторе используются точные значения ошибок системы. Достаточно ознакомиться с анализом рис. 1–3 в работе [1].

Таким образом, качество стабилизации спутника с наблюдателем, как и следовало ожидать, хуже качества его стабилизации при использовании в регуляторе точных величин отклонений компонент его угловой скорости от их номинальных значений.

Заключение

В отличие от [1], здесь рассмотрено решение проблемы наблюдения ошибок вектора состояния КА в сферическом движении с использованием магнитометрической информации. Предполагалось, что навигационная задача определения местоположения спутника (например, с помощью GPS) успешно решается за рамками этой работы (она составляет отдельную проблему [5]). Методом ПрЖС НСС была обеспечена равномерная асимптотическая устойчивость системы ошибок наблюдения. В результате построен устойчивый наблюдатель в условиях неопределенности, когда малые постоянно действующие возмущения, испытываемые системой, и инструментальные погрешности магнитометра рассматривались в виде волнового представления шумов (15).

Разумеется, при этом оказалось, что качество стабилизации ИСЗ в режиме ориентации с наблюдателем стало хуже качества его стабилизации при использовании в регуляторе точных величин отклонений его угловой скорости от номинальных значений. Ведь в этом случае в регулятор вместо них поступает оценка вектора состояния системы ошибок ориентации КА из наблюдателя, которая в условиях неопределенности отличается от его номинального значения на величину ошибки наблюдения (18).

С.М. Онищенко

ОПТИМАЛЬНА СТАБІЛІЗАЦІЯ ШТУЧНОГО СУПУТНИКА ЗЕМЛІ НАДЛІШКОВОЮ СИСТЕМОЮ МАХОВИКІВ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Розглянуто задачу спостереження помилок вектора стану КА в його сферичному русі по стаціонарній круговій орбіті з використанням магнітометричної інформації від трикомпонентного магнітометра (навігаційна задача визначення місцеположення супутника вважається розв'язаною за рамками цієї роботи). Методом простого жорсткого синтезу нелінійних систем стабілізації забезпечується рівномірна асимптотична стійкість однорідної системи помилок спосте-

реження і будується стійкий спостерігач в умовах невизначеності. При цьому якість стабілізації штучного супутника Землі в режимі орієнтації виявляється (за результатами математичного моделювання) гіршою від якості його стабілізації при використанні в регуляторі точних величин відхилень його кутової швидкості від номінальних значень.

S.M. Onishchenko

OPTIMAL STABILIZATION OF THE EARTH ARTIFICIAL SATELLITE WITH REDUNDANT FLY-WHEELS UNDER UNCERTAIN CONDITIONS

The observation problem of the state vector errors of SV in its spherical motion on the stationary circular orbit using the information of three-component magnetometer is considered (navigation task of determining the satellite position is considered to be solved outside the frames of this work). With ordinary rigid synthesis method of nonlinear stabilization systems uniform asymptotic stability of the homogeneous error monitoring system is provided and a stable observer under uncertain conditions is built. The quality of the satellite orientation stabilization is lower than that of its stabilization using its precise angular speed deviations from the nominal values (based on mathematical modeling).

1. *Онищенко С.М.* Оптимальная стабилизация искусственного спутника Земли избыточной системой маховиков // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2016. — № 6. — С. 133–143.
2. https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D1%87-%D0.91.D0.BE.D1.80.D1.82.D0.BE.D0.B2.D0.B0.D1.8F_.D0.B0.D0.BF.D0.BF.D0.B0.D1.80.D0.B0.D1.82.D1.83.D1.80.D0.B0
3. *Брайсон А., Хо Ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценки и управление. — М. : Мир, 1972. — 544 с.
4. *Онищенко С.М.* Стабилизация наблюдателей состояния нелинейных систем в условиях неопределенности // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2015. — № 1. — С. 15–24.
5. *Лебедев Д.В., Ткаченко А.И.* Навигация и управление ориентацией малых космических аппаратов. — Киев : Наук. думка, 2006. — 300 с.
6. *Абалакин В.К.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. — М. Наука, 1976. — 864 с.
7. *Белецкий В.В., Хентов А.А.* Вращательное движение намагниченного спутника. — М. : Наука, 1985. — 287 с.
8. *Гурьев И.С.* Адаптивные магнитометрические системы контроля пространственного положения. — Л. : Энергоиздат, 1985. — 308 с.
9. *Лебедев Д.В., Ткаченко А.И.* Информационно-алгоритмические аспекты управления подвижными объектами. — Киев : Наук. думка, 2000. — 310 с.
10. *Джонсон С.* Теория регуляторов, приспособляющихся к возмущениям // Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Под ред. К.Т. Леондеса. — М. : Мир, 1980. — С. 253–320.
11. *Колобов М.Г.* Оценивание состояния динамической системы при наличии неопределенных составляющих в шумах состояния и измерения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1991. — № 1. — С. 108–114.
12. *Онищенко С.М.* Прямой подход к синтезу нелинейных систем стабилизации: метод прямого жесткого синтеза // Проблемы управления и информатики. — 2000. — № 3. — С. 17–25.
13. *Онищенко С.М.* Жесткая оптимальная стабилизация нелинейных динамических систем // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2014. — № 4. — С. 32–46.
14. *Онищенко С.М.* Модальный подход к синтезу нелинейных систем стабилизации // Проблемы управления и информатики. — 1998. — № 6. — С. 5–19.
15. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. — М. : Наука, 1966. — 532 с.
16. *Воронин А.Н.* Концепция нелинейной схемы компромиссов в многокритериальных задачах // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2016. — № 6. — С. 17–31.
17. *Банди Б.* Методы оптимизации. — М. : Радио и связь, 1988. — 128 с.

Получено 21.07.2015