УДК 517.977.56

М.М. Копец

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ

Введение

В природе и технике довольно часто встречаются волновые и колебательные процессы. Примеры таких процессов можно найти в акустике, аэродинамике, квантовой теории поля, теории упругости, электродинамике и т.д. Все эти процессы, как правило, описываются дифференциальными уравнениями с частными производными гиперболического типа второго порядка, содержащими в качестве одной из независимых переменных время t. В то же время значительное число прикладных задач приводит к дифференциальным уравнениям с частными производными гиперболического типа более высокого порядка. Здесь можно упомянуть задачи о колебаниях стержней, пластин, вращающихся валов и т.д. Исследованию колебательных процессов посвящено значительное число научных публикаций [1–4]. Колебания бывают полезными и вредными. Следовательно, ими необходимо управлять. Исследование управляемых колебательных процессов можно найти в работах [5–9]. В настоящей статье рассматривается линейно-квадратическая задача оптимального управления процессом колебаний тонкого прямоугольного стержня. С помощью метода множителей Лагранжа для рассматриваемой задачи оптимизации получены необходимые условия оптимальности. Исходя из этих условий, выведена система интегро-дифференциальных уравнений Риккати с частными производными. Решение этой системы представлено в замкнутой форме. Для иллюстрации полученных в статье результатов рассмотрен пример.

Постановка задачи

Процесс колебаний балки описывается следующим линейным дифференциальным уравнением с частными производными:

$$\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2} + a^4 \frac{\partial^4 z(t,x)}{\partial x^4} = u(t,x), \qquad (1)$$

где $a^4 = \dfrac{EJ}{m}$, E — модуль упругости материала стержня, J — момент инерции прямоугольного сечения балки относительно ее горизонтальной оси, m — площадь поперечного сечения балки, $t_0 \le t \le t_1$, действительные числа $l \succ 0$, $t_0 \ge 0$, $t_1 \succ t_0$ известны. Начальные условия для уравнения (1) имеют вид

$$z(t_0, x) = f(x), \quad \frac{\partial z(t_0, x)}{\partial t} = g(x), \qquad (2)$$

где функции $f(x) \in W_2^{1,0}(0,l)$ и $g(x) \in L_2(0,l)$ предполагаются известными. Краевые условия для уравнения (1) являются однородными, т.е.

$$\frac{\partial^2 z(t,0)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 z(t,0)}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial^2 z(t,l)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 z(t,l)}{\partial x^3} = 0. \qquad (3)$$

Условия (3) означают, что оба конца балки свободны [4, с. 316]. Обозначим Ω множество $\Omega = \{(t, x) : t \in [t_0, t_1], x \in [0, l]\}$. Функция $u(t, x) \in L_2(\Omega)$ называется допустимым управлением. Для фиксированного допустимого управления $u(t, x)$ под решением $z(t, x)$ задачи (1)–(3) подразумеваем ее обобщенное решение $z(t, x) \in W_2^{1,0}(\Omega)$. На решениях задачи (1)–(3) рассматривается функционал

$$I(u, z) = \frac{1}{2}\int_0^l z^2(t_1, x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^l \left[\frac{\partial z(t_1, x)}{\partial t}\right]^2 dx + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [z^2(t, x) + u^2(t, x)]\,dx. \qquad (4)$$

Задача оптимального управления (1)–(4) состоит в определении допустимого управления $u(t, x) \in L_2(\Omega)$ и соответствующего ему решения $z(t, x) \in W_2^{1,0}(\Omega)$ задачи (1)–(3), на которых функционал (4) принимает наименьшее возможное значение.

Необходимые условия оптимальности

Один из возможных методов для нахождения решения сформулированной выше задачи оптимального управления (1)–(4) — метод множителей Лагранжа. Сущность этого метода состоит в замене функционала (4) вспомогательным функционалом

$$\Psi(p, u, z) = \frac{1}{2}\int_0^l z^2(t_1, x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^l \left[\frac{\partial z(t_1, x)}{\partial t}\right]^2 dx + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [z^2(t, x) + u^2(t, x)]dx +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l p(t, x)\left[u(t, x) - a^4\frac{\partial^4 z(t, x)}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 z(t, x)}{\partial t^2}\right]dxdt, \qquad (5)$$

где $p(t, x) \in W_2^{1,0}(\Omega)$ — неизвестная функция (множитель Лагранжа). В результате такой замены задача на условный экстремум (1)–(4) сводится к задаче минимизации функционала (5) с учетом условий (2) и (3). Затем находим приращение функционала (5)

$$\Delta\Psi = \Psi(p + \varepsilon\delta p, u + \varepsilon\delta u, z + \varepsilon\delta z) - \Psi(p, u, z). \qquad (6)$$

Если предположить выполнение краевых условий

$$\frac{\partial^2 p(t, 0)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 p(t, 0)}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial^2 p(t, l)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 p(t, l)}{\partial x^3} = 0, \qquad (7)$$

то после преобразований, подобных использованным в [7], приходим (6) к такому соотношению:

$$\Delta\Psi = \varepsilon\int_0^l \left[z(t_1, x) + \frac{\partial p(t_1, z)}{\partial t}\right]\delta z(t_1, x)\,dx + \varepsilon\int_0^l \left[\frac{\partial z(t_1, z)}{\partial t} - p(t_1, x)\right]\frac{\partial \delta z(t_1, z)}{\partial t}\,dx +$$

$$+ \varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \left[z(t, x) - a^4\frac{\partial^4 p(t, x)}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 p(t, x)}{\partial t^2}\right]\delta z(t, x)\,dxdt +$$

$$+ \varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [u(t, x) + p(t, x)]\delta u(t, x)\,dxdt +$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left[u(t,x)-a^4\frac{\partial^4 z(t,x)}{\partial x^4}-\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}\right]\delta p(t,x)\,dxdt+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l[\delta z(t_1,x)]^2dx+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l\left[\frac{\partial\delta z(t_1,x)}{\partial t}\right]^2dx+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[[\delta z(t,x)]^2+[\delta u(t,x)]^2]\,dxdt. \qquad (8)$$

Соотношения (7) и (8) позволяют сделать такой вывод.

Теорема 1. Для нахождения единственного оптимального управления $u(t,x)$ имеем систему соотношений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}=-a^4\dfrac{\partial^4 z(t,x)}{\partial x^4}+u(t,x),\\ z(t_0,x)=f(x),\ \dfrac{\partial z(t_0,x)}{\partial t}=g(x),\\ \dfrac{\partial^2 z(t,0)}{\partial x^2}=0,\ \dfrac{\partial^3 z(t,0)}{\partial x^3}=0,\ \dfrac{\partial^2 z(t,l)}{\partial x^2}=0,\ \dfrac{\partial^3 z(t,l)}{\partial x^3}=0,\\ \dfrac{\partial^2 p(t,x)}{\partial t^2}=-a^4\dfrac{\partial^4 p(t,x)}{\partial x^4}+z(t,x),\\ p(t_1,x)=\dfrac{\partial z(t_1,x)}{\partial t},\ \dfrac{\partial p(t_1,x)}{\partial t}=-z(t_1,x),\\ \dfrac{\partial^2 p(t,0)}{\partial x^2}=0,\ \dfrac{\partial^3 p(t,0)}{\partial x^3}=0,\ \dfrac{\partial^2 p(t,l)}{\partial x^2}=0,\ \dfrac{\partial^3 p(t,l)}{\partial x^3}=0,\\ u(t,x)=-p(t,x).\end{cases} \qquad (9)$$

Доказательство. В случае выполнения системы соотношений (9) равна нулю первая вариация функционала (5), что является необходимым условием экстремума этого функционала. Если имеют место соотношения (9), то выражение (8) станет таким:

$$\Delta\Psi=\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l[\delta z(t_1,x)]^2dx+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l\left[\frac{\partial\delta z(t_1,x)}{\partial t}\right]^2dx+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[[\delta z(t,x)]^2+[\delta u(t,x)]^2]\,dxdt. \qquad (10)$$

Из соотношения (10) следует, что: во-первых, на управлении $u(t,x)$ реализуется минимум функционала (4); во-вторых, оптимальное управление $u(t,x)$ единственно. Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

Система интегро-дифференциальных уравнений Риккати

Далее все равенства, связанные с дельта-функцией Дирака, следует понимать как равенства в смысле теории обобщенных функций. Поскольку система соотношений (9) линейна относительно неизвестных функций $z(t,x)$ и $p(t,x)$, то с учетом условий трансверсальности $p(t_1,x)=\dfrac{\partial z(t_1,x)}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial p(t_1,x)}{\partial t}=-z(t_1,x)$, рассмотрим такие два выражения:

$$\frac{\partial z(t, y)}{\partial t} = -\int_0^l P_{11}(t, x, y)\, z(t, y)\, dy - \int_0^l P_{12}(t, x, y) \frac{\partial z(t, y)}{\partial t} dy, \tag{11}$$

$$p(t, x) = \int_0^l P_{21}(t, x, y)\, z(t, y)\, dy + \int_0^l P_{22}(t, x, y) \frac{\partial z(t, y)}{\partial t} dy, \tag{12}$$

где функции $P_{ij}(t, x, y)$, $i = 1, 2;$ $j = 1, 2,$ требуется найти. Подобно тому, как это было сделано в [7], для нахождения функций $R_{11}(t, x, y)$, $R_{12}(t, x, y)$, $R_{21}(t, x, y)$, $R_{22}(t, x, y)$ получим такую систему уравнений с частными производными:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{11}(t, x, y)}{\partial t} - a^4 \left[\dfrac{\partial^2 P_{12}(t, x, y)}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 P_{21}(t, x, y)}{\partial x^2} \right] + \delta(x - y) - \\ -\displaystyle\int_0^l P_{12}(t, x, s)\, R_{21}(t, s, y)\, ds = 0, \\ \dfrac{\partial P_{12}(t, x, y)}{\partial t} - a^4 \dfrac{\partial^2 P_{22}(t, x, y)}{\partial x^2} + P_{11}(t, x, y) - \displaystyle\int_0^l P_{12}(t, x, s)\, P_{22}(t, s, y)\, ds = 0, \\ \dfrac{\partial P_{21}(t, x, y)}{\partial t} - a^4 \dfrac{\partial^2 P_{22}(t, x, y)}{\partial y^2} + P_{11}(t, x, y) - \displaystyle\int_0^l P_{22}(t, x, sP_{21}(t, s, y)\, ds = 0, \\ \dfrac{\partial P_{22}(t, x, y)}{\partial t} + P_{12}(t, x, y) + P_{21}(t, x, y) - \displaystyle\int_0^l P_{22}(t, x, s)\, P_{22}(t, s, y)\, ds = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Здесь символ $\delta(x)$ обозначает дельта-функцию Дирака. При этом должны выполняться условия трансверсальности

$$\begin{cases} P_{11}(t_1, x, 0) = \delta(x - y), \ P_{12}(t_1, x, 0) = 0, \\ P_{21}(t_1, x, 0) = 0, \ P_{22}(t_1, x, 0) = \delta(x - y) \end{cases} \tag{14}$$

и краевые условия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 P_{12}(t, x, 0)}{\partial y^2} = 0, \ \dfrac{\partial^3 P_{12}(t, x, 0)}{\partial y^3} = 0, \ \dfrac{\partial^2 P_{12}(t, x, l)}{\partial y^2} = 0, \ \dfrac{\partial^3 P_{12}(t, x, l)}{\partial y^3} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 P_{22}(t, x, 0)}{\partial y^2} = 0, \ \dfrac{\partial^3 P_{22}(t, x, 0)}{\partial y^3} = 0, \ \dfrac{\partial^2 P_{22}(t, x, l)}{\partial y^2} = 0, \ \dfrac{\partial^3 P_{22}(t, x, l)}{\partial y^3} = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Принимая во внимание вышеизложенные рассуждения и (11)–(15), приходим к следующему выводу.

Теорема 2. Для нахождения функций $P_{11}(t, x, y)$, $P_{12}(t, x, y)$, $P_{21}(t, x, y)$, $P_{22}(t, x, y)$ требуется решить систему интегро-дифференциальных уравнений (13), с учетом условий трансверсальности (14) и краевых условий (15).

Построение решения системы интегро-дифференциальных уравнений Риккати

Рассмотрим однопаметрическое семейство функций

$$\varphi_n(x) = [\sin(nl) + \sinh(nl)][\sin(nx) + \sinh(nx)] +$$

$$+ [\cos(nl) - \cosh(nl)][\cos(nx) + \cosh(nx)]. \tag{16}$$

В [3, с. 288] показана справедливость соотношений

$$\varphi_n^{iv}(x) = n^4 \varphi_n(x),\ \ \varphi_n''(0) = 0,\ \ \varphi_n'''(0) = 0,\ \ \varphi_n''(l) = 0,\ \ \varphi_n'''(l) = 0,$$

если имеет место равенство

$$\cos(\mu)\cosh(\mu) = 1, \tag{17}$$

где $\mu = nl$. Ниже приведены значения первых десяти положительных корней уравнения (17).

Таблица

n	μ_n	Δ_n
1	4,730040744862704	$-1{,}53211\times 10^{-14}$
2	7,853204624095838	$-5{,}33351\times 10^{-13}$
3	10,995607838001671	$1{,}1634\times 10^{-11}$
4	14,137165491257464	$-1{,}9988\times 10^{-10}$
5	17,278759657399483	$2{,}92987\times 10^{-8}$
6	20,420352245626063	$-6{,}61295\times 10^{-7}$
7	23,561944902040455	$1{,}22427\times 10^{-6}$
8	26,703537555508188	$-0{,}000297127$
9	29,845130209103253	$-0{,}00536897$
10	32,986722862692820	$-0{,}299435$

Замечание 1. В правом столбце таблицы содержится погрешность Δ_n вычислений. Приведенная информация свидетельствует о существенном возрастании погрешности с увеличением номера корня.

Поскольку для произвольной функции $f(x) \in L_2(0, l)$ имеем $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(x)$, где $f_n = \dfrac{4}{l\varphi_n^2(l)} \int_0^l f(y)\varphi_n(y)\,dy$, а $\varphi_n(x)$ имеет вид (16), то для дельта-функции Дирака получим следующую формулу:

$$\delta(x-y) = \frac{4}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\varphi_n^2(l)}. \tag{18}$$

Формула (18) наводит на мысль, что имеет смысл искать функции $P_{ij}(t, x, y)$ в таком виде:

$$P_{ij}(t, x, y) = \frac{4}{l}\sum_{n=1}^{\infty} p_{nij} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\varphi_n^2(l)}, \tag{19}$$

где функции $p_{nij}(t)$ требуется найти. В результате сделанных предположений вместо системы интегро-дифференциальных уравнений (13) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений Риккати:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_{n11}(t)}{dt} - \left(\dfrac{a\mu_n}{l}\right)^4 [p_{n12}(t) + p_{n21}(t)] - p_{n12}(t)p_{n21}(t) + 1 = 0, \\ \dfrac{dp_{n12}(t)}{dt} - \left(\dfrac{a\mu_n}{l}\right)^4 p_{n22}(t) + p_{n11}(t) - p_{n12}(t)p_{n22}(t) = 0, \\ \dfrac{dp_{n21}(t)}{dt} - \left(\dfrac{a\mu_n}{l}\right)^4 p_{n22}(t) + p_{n11}(t) - p_{n21}(t)p_{n22}(t) = 0, \\ \dfrac{dp_{n22}(t)}{dt} + p_{n12}(t) + p_{n21}(t) - p_{n22}^2(t) = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Сопоставление выражений (14) и (19) приводит к условиям трансверсальности

$$\begin{cases} p_{n11}(t_1) = 1,\ \ p_{n12}(t_1) = 0, \\ p_{n21}(t_1) = 0,\ \ p_{n22}(t_1) = 1. \end{cases} \tag{21}$$

Замечание 2. Из систем соотношений (20) и (21) следует равенство $p_{n12}(t) = p_{n21}(t)$.

Между системой дифференциальных уравнений Риккати (20) и матрицей четвертого порядка

$$
\mathbf{H}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\dfrac{a\mu_n}{l}\right)^4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \left(\dfrac{a\mu_n}{l}\right)^4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{22}
$$

существует следующая связь. Представляя матрицу (22) в блочной форме

$$
\mathbf{H}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n & -\mathbf{S}_n \\ -\mathbf{Q}_n & -\mathbf{A}_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},
$$

где $\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\dfrac{a\mu_n}{l}\right)^4 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_n^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & -\left(\dfrac{a\mu_n}{l}\right)^4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{F}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{Q}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, систему дифференциальных уравнений Риккати (20) можно записать в матричной форме

$$
\frac{d\mathbf{P}_n(t)}{dt} = -\mathbf{P}_n(t)\,\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_n(t) + \mathbf{P}_n(t)\,\mathbf{F}_n\mathbf{P}_n(t) - \mathbf{Q}_n\,, \tag{23}
$$

где матрица $\mathbf{P}_n(t)$ имеет вид

$$
\mathbf{P}_n(t) = \begin{bmatrix} p_{n11}(t) & p_{n12}(t) \\ p_{n21}(t) & p_{n22}(t) \end{bmatrix}. \tag{24}
$$

Условия трансверсальности (21) в матричной форме перепишем следующим образом:

$$
\mathbf{P}_n(t_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{25}
$$

Для нахождения матрицы (24), которая удовлетворяет уравнению (23) и условию (25), следует построить матричную экспоненту $\exp(\mathbf{H}_k t)$. Собственные числа матрицы $\mathbf{H}_n$ равны:

$$
\lambda_{n1} = -\alpha_n - i\beta_n,\ \lambda_{n2} = -\alpha_n + i\beta_n,\ \lambda_{n3} = \alpha_n - i\beta_n,\ \lambda_{n4} = \alpha_n + i\beta_n,
$$

где $i^2 = -1$ и

$$
\alpha_n = \sqrt{\frac{\sqrt{\left(\dfrac{a\mu_n}{l}\right)^8 + 1} - \left(\dfrac{a\mu_n}{l}\right)^4}{2}},\quad \beta_n = \sqrt{\frac{\sqrt{\left(\dfrac{a\mu_n}{l}\right)^8 + 1} + \left(\dfrac{a\mu_n}{l}\right)^4}{2}}.
$$

Имеет место утверждение.

Теорема 3. Матрицу $\exp(\mathbf{H}_n t)$ запишем

$$
\exp(\mathbf{H}_n t) = \mathbf{S}_n(t) = \begin{bmatrix} s_{n11}(t) & s_{n12}(t) & s_{nk3}(t) & s_{n14}(t) \\ s_{n21}(t) & s_{nk22}(t) & s_{n23}(t) & s_{n24}(t) \\ s_{n31}(t) & s_{n32}(t) & s_{n33}(t) & s_{n34}(t) \\ s_{n41}(t) & s_{n42}(t) & s_{n43}(t) & s_{n44}(t) \end{bmatrix},
$$

где

$$
\begin{cases}
s_{n11}(t)=\cosh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t), s_{n21}(t)=\alpha_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t)-\beta_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t),\\
s_{n31}(t)=-\alpha_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t)-\beta_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t), s_{n41}(t)=\sinh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t),\\
s_{n12}(t)=\dfrac{\alpha_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t)+\beta_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t)}{\alpha_n^2+\beta_n^2}, s_{n22}(t)=\cosh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t),\\
s_{n32}(t)=-\sinh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t), s_{n42}(t)=\dfrac{\alpha_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t)-\beta_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t)}{\alpha_n^2+\beta_n^2},\\
s_{n13}(t)=\dfrac{\alpha_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t)-\beta_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t)}{\alpha_n^2+\beta_n^2}, s_{n23}(t)=\sinh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t),\\
s_{n33}(t)=\cosh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t), s_{n43}(t)=-\dfrac{\alpha_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t)+\beta_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t)}{\alpha_n^2+\beta_n^2},\\
s_{n14}(t)=-\sinh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t), s_{n24}(t)=-\alpha_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t)-\beta_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t),\\
s_{n34}(t)=-\alpha_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t)+\beta_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t), s_{n44}(t)=\cosh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t).
\end{cases}
\quad (26)
$$

Доказательство. Непосредственными вычислениями можно убедиться в справедливости соотношений

$$\frac{d\mathbf{S}_n(t)}{dt}=\mathbf{H}_n\mathbf{S}_n(t),\ \ \mathbf{S}_n(0)=\mathbf{I},$$

символ $\mathbf{I}$ обозначает единичную матрицу четвертого порядка.

Используя метод, предложенный в [8, с. 121], приходим к такому утверждению.

Теорема 4. Для вычисления матрицы $\mathbf{P}_n(t)$ справедлива формула

$$\mathbf{P}_n(t)=[\mathbf{F}_{n22}(t_1-t)-\mathbf{F}_{n12}(t_1-t)]^{-1}[\mathbf{F}_{n11}(t_1-t)-\mathbf{F}_{n21}(t_1-t)], \quad (27)$$

где использованы обозначения

$$\mathbf{F}_{n11}(t)=\begin{bmatrix} s_{n11}(t) & s_{n12}(t)\\ s_{n21}(t) & s_{n22}(t)\end{bmatrix},\ \mathbf{F}_{n12}(t)=\begin{bmatrix} s_{n13}(t) & s_{n14}(t)\\ s_{n23}(t) & s_{n24}(t)\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{n21}(t)=\begin{bmatrix} s_{n31}(t) & s_{n32}(t)\\ s_{n41}(t) & s_{n42}(t)\end{bmatrix},\ \mathbf{F}_{n22}(t)=\begin{bmatrix} s_{n33}(t) & s_{n34}(t)\\ s_{n43}(t) & s_{n44}(t)\end{bmatrix}.$$

Принимая во внимание формулы (14) и (15), равенство (27) приводит к таким выражениям:

$$p_{n11}(t)=\frac{q_{n11}(t_1-t)}{\sigma_n(t_1-t)},\ \ p_{n12}(t)=p_{n21}(t)=\frac{q_{n12}(t_1-t)}{\sigma_n(t_1-t)},\ \ p_{n22}(t)=\frac{q_{n22}(t_1-t)}{\sigma_n(t_1-t)}, \quad (28)$$

где функции $q_{n11}(t)$, $q_{n12}(t)$, $q_{n22}(t)$, $\sigma_n(t)$ представлены формулами

$$q_{n11}(t)=(\alpha_n^2+\beta_n^2)[(\alpha_n^2+\beta_n^2-1)\cos(2\beta_n t)-$$

$$-(\alpha_n^2+\beta_n^2+1)\cosh(2\alpha_n t)]-2\alpha_n\sin(2\beta_n t)-2\beta_n\sinh(2\alpha_n t),$$

$$q_{n12}(t)=2\alpha_n\beta_n[\cosh(2\alpha_n t)-\cos(2\beta_n t)]-$$

$$-\beta_n(\alpha_n^2+\beta_n^2-1)\sin(2\beta_n t)+\alpha_n(\alpha_n^2+\beta_n^2+1)\sinh(2\alpha_n t),$$

$$q_{n22}(t)=(\alpha_n^2+\beta_n^2-1)\cos(2\beta_n t)+(\alpha_n^2+\beta_n^2+1)\cosh(2\alpha_n t)-$$

$$-2\alpha_n\sin(2\beta_n t)+2\beta_n\sinh(2\alpha_n t),$$

$$\sigma_n(t)=2\beta_n^2\cosh(2\alpha_n t)+2\alpha_n^2\cos(2\beta_n t)+$$

$$+\beta_n(\alpha_n^2+\beta_n^2+1)\sinh(2\alpha_n t)+\alpha_n(\alpha_n^2+\beta_n^2-1)\sin(2\beta_n t).$$

Ниже приведены графики функций $p_{ij1}(t)$ для случая, когда $a=2,\ l=0{,}1,\ t_0=0,$ $t_1=5,$ рис 1 ($p_{111}(t)$ — сплошная кривая; $p_{121}(t)$ — точечная кривая; $p_{122}(t)$ — пунктирная кривая); рис 2 ($p_{211}(t)$ — сплошная кривая; $p_{221}(t)$ — точечная кривая; $p_{222}(t)$ — пунктирная кривая).

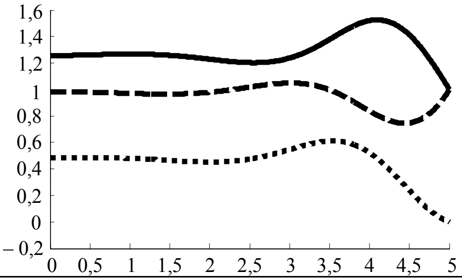

Рис. 1

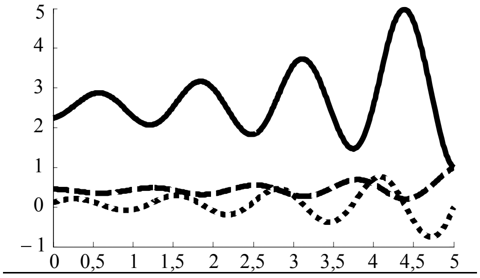

Рис. 2

Аналитическое конструирование регулятора

В практических приложениях задачи оптимального управления (1)–(4) важную роль играет случай, когда $t_1 \to \infty$. В теории оптимального управления такая задача называется задачей аналитического конструирования регулятора. В [8, с. 131] показано, что при $t_1 \to \infty$ имеем $\lim\limits_{t_1 \to \infty} \mathbf{P}_n(t) = \mathbf{P}_n = \text{const}$. Матрица $\mathbf{P}_n$ является решением алгебраического уравнения

$$\mathbf{P}_n(t)\,\mathbf{A}_n + \mathbf{A}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_n(t) - \mathbf{P}_n(t)\,\mathbf{F}_n\mathbf{P}_n(t) + \mathbf{Q}_n = \mathbf{0}. \tag{29}$$

Уравнение (29) имеет шесть решений:

$$\mathbf{P}_{n1} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{P}_{n2} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{n3} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}\sqrt{-\sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^4} & -\sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^4 \\ -\sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^4 & -\sqrt{2}\sqrt{-\sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^4} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{n4} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}\sqrt{-\sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^4} & -\sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^4 \\ -\sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^4 & \sqrt{2}\sqrt{-\sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^4} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{n5} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}\sqrt{\sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^4} & \sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^4 \\ \sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^4 & -\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^4} \end{bmatrix},$$

$$
\mathbf{P}_{n6}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}\sqrt{\sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^4} & \sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^4 \\ \sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^4 & \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^4}\end{bmatrix}.
$$

С другой стороны, переходя к пределу при $t_1\to\infty$ в формулах (28), получим

$$
\begin{cases}\lim\limits_{t_1\to\infty} p_{n11}(t)=p_{n11}=\dfrac{\alpha_n^2+\beta_n^2}{\beta_n},\ \lim\limits_{t_1\to\infty} p_{n12}(t)=p_{n12}=\dfrac{\alpha_n}{\beta_n},\\ \lim\limits_{t_1\to\infty} p_{n21}(t)=p_{n21}=\dfrac{\alpha_n}{\beta_n},\ \lim\limits_{t_1\to\infty} p_{n22}(t)=p_{n22}=\dfrac{1}{\beta_n}.\end{cases} \tag{30}
$$

С учетом формул

$$
\alpha_n=\sqrt{\frac{\sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^4}{2}},\quad \beta_n=\sqrt{\frac{\sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}+\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^4}{2}}
$$

соотношения (30) запишем

$$
\begin{cases}p_{n11}=\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}\sqrt{\sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^4},\ p_{n12}=\sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^4,\\ p_{n21}=\sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^4,\ p_{n22}=\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^8+1}-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^4}.\end{cases}
$$

Таким образом, окончательно имеем $\lim\limits_{t_1\to\infty}\mathbf{P}_n(t)=\mathbf{P}_n=\mathbf{P}_{n6}$.

Заключение

В настоящей статье исследуется линейно-квадратическая задача оптимального управления процессом колебаний балки. Актуальность этой задачи не вызывает сомнений. В противовес наиболее распространенным методам исследования задач подобного типа (принцип максимума Понтрягина, метод динамического программирования Беллмана) в статье использован метод множителей Лагранжа. В результате получены необходимые условия оптимальности. Выведена система интегро-дифференциальных уравнений Риккати. Решение этой системы позволяет выписать явную формулу для вычисления оптимального управления. Как следствие результатов статьи, получено решение задачи об аналитическом конструировании регулятора. Представлена графическая иллюстрация основных результатов статьи. Заслуживает внимания более детальное исследование функций (26) и (28). Также интересно рассмотреть аналогичную задачу с учетом случайных параметров. Перспективным исследованием является обобщения результатов, полученных в данной работе, на случай систем с дробными производными [10].

М.М. Копець

ОПТИМІЗАЦІЯ ПРОЦЕСУ КОЛИВАНЬ БАЛКИ

Розглянуто лінійно-квадратичну задачу оптимального керування процесом коливань балки. Для даної задачі оптимізації отримано необхідні умови оптимальності. Аналіз цих умов дав можливість вивести систему інтегро-диференціальних рівнянь Ріккаті, розв’язок якої подано в замкненому вигляді.

M.M. Kopets

OPTIMIZATION OF THE PROCESS OF VIBRATIONS OF A BEAM

Consideration in given to the linear-quadratic optimal control problem of the process of a beam vibrations. For a considered optimization problem the necessary conditions of optimality are received. The analysis of these conditions has given the chance to deduce the system of Riccati integro-differential equations which solution is presented in closed form.

1. *Пановко Я.Г.* Основы прикладной теории упругих колебаний. — М. : Машиностроение, 1957. — 336 с.
2. *Селезов И.Т., Кривонос Ю.Г.* Волновые гидравлические модели распространения возмущений. — Киев : Наук. думка, 2015. — 172 с.
3. *Стрэтт (лорд Рэлей) Дж.В.* Теория звука. — М. : Гостехиздат, 1940. — **1**. — 499 с.
4. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. — М. : Машиностроение, 1985. — 472 с.
5. *Знаменская Л.Н.* Управление упругими колебаниями. — М. : Физматлит, 2004. — 176 с.
6. *Комков В.* Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. — М. : Мир, 1975. — 160 с.
7. *Копец М.М.* Оптимальное управление процессом колебаний тонкого прямоугольного стержня // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2015. — № 3. — С. 42–55.
8. *Черноусько Ф.Л.* Ограниченные управления в системах с распределенными параметрами // Прикладная математика и механика. — 1992. — **56**, № 5. — С. 810–826.
9. *Naidu D.S.* Optimal control systems.(Electrical engineering textbook series). — Boka Raton London; New York; Washington: CRC PRESS, 2003. — 460 p.
10. *Чикрий А.А., Эйдельман С.Д.* Обобщенные матричные функции Миттаг–Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 3. — С. 3–32.

Получено 05.04.2016