УДК 519.85

О.А. Емец, Т.Н. Барболина

СВОЙСТВА КОМБИНАТОРНЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ БЕЗУСЛОВНЫХ ЗАДАЧ НА РАЗМЕЩЕНИЯХ С ЛИНЕЙНОЙ И ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ ЦЕЛЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Введение

Среди задач комбинаторной оптимизации, которые привлекают внимание исследователей (см., например, [1–14]), важный класс составляют задачи на евклидовых комбинаторных множествах. В [5–14] и других работах исследованы свойства комбинаторных и поликомбинаторных множеств, а также различных классов оптимизационных задач на таких множествах. В частности, для общего множества размещений получена несводимая система ограничений его выпуклой оболочки [13], предложены методы решения линейных и некоторых классов нелинейных задач [6–8], сформулировано достаточное условие решения линейной безусловной задачи [6]. Исследование безусловных задач продолжено в [14], где получен критерий экстремали линейной безусловной задачи оптимизации на размещениях для положительных коэффициентов целевой функции. Данная статья посвящена обоснованию такого критерия в общем случае, а также исследованию безусловных задач оптимизации дробно-линейной функции.

Критерий экстремали линейной безусловной задачи оптимизации на размещениях

Введем необходимую терминологию и обозначения относительно общего множества размещений [6]. Под мультимножеством понимаем совокупность элементов, среди которых могут быть и одинаковые. Любое мультимножество $G=\{g_1,...,g_\eta\}$ можно задать его основой $S(G)$, т.е. кортежем всех его различных элементов, и кратностью — числом повторов каждого элемента основы. Кортеж кратностей называют первичной спецификацией и обозначают G. Упорядоченной k-выборкой из мультимножества $G=\{g_1,...,g_\eta\}$ называется набор, $(g_{i_1},...,g_{i_k})$, где $g_{i_j}\in G$, $i_j\neq i_t$ $\forall i_j,i_t\in J_\eta$, $\forall j,t\in J_k$ (здесь и далее J_n обозначает множество n первых натуральных чисел). Множество всех упорядоченных k-выборок из мультимножества G называют общим множеством размещений $E_\eta^k(G)$.

Рассмотрим сначала решение линейной безусловной задачи комбинаторной оптимизации на размещениях в следующей постановке: найти пару $<L(x^*),x^*>$ такую, что

$$L(x^*)=\underset{x\in E_\eta^k(G)}{\operatorname{extr}}\sum_{j=1}^{k}c_jx_j,\quad x^*=\arg\underset{x\in E_\eta^k(G)}{\operatorname{extr}}\sum_{j=1}^{k}c_jx_j,\tag{1}$$

где $x=(x_1,...,x_k)\in R^k$, $c_j\in R^1$ $\forall j\in J_k$, $E_\eta^k(G)$ — общее множество размещений из элементов мультимножества $G=\{g_1,...,g_\eta\}$, причем элементы мультимножества удовлетворяют условию

$$g_1\leq...\leq g_\eta.\tag{2}$$

 ISSN 0572-2691

Также будем полагать, что коэффициенты целевой функции $L(x)=\sum_{j=1}^{k} c_j x_j$ упорядочены по невозрастанию, причем мультимножество $\{c_1, c_2, ..., c_k\}$ имеет основу $(\bar{c}_1, ..., \bar{c}_s)$ и первичную спецификацию $(\bar{t}_1, ..., \bar{t}_s)$. Обозначим $t_1 = 1$, $t_{i+1} = t_i + \bar{t}_i = 1 + \sum_{j=1}^{i} \bar{t}_j$ для $i \in J_s$, тогда выполняются соотношения

$$c_{t_1} = ... = c_{t_2 -1} > c_{t_2} = ... = c_{t_3 -1} > ... > c_{t_s} = ... = c_k. \tag{3}$$

Как известно [6], множество вершин выпуклой оболочки множества $E_\eta^k(G)$ — общего многогранника размещений $\Pi_\eta^k(G)$ — является подмножеством множества $E_\eta^k(G)$. При этом точка $x \in \Pi_\eta^k(G)$ будет вершиной общего многогранника размещений тогда и только тогда, когда ее компоненты являются перестановками чисел $g_1, ..., g_p, g_{\eta-r+1}, ..., g_\eta$, где $p, r \in J_k^0$, $p+r=k$ (здесь и далее для целых n и k $J_k^n = \{n, n+1, ..., k\}$).

Согласно критерию смежности вершин общего многогранника размещений [6] вершина x смежна с вершиной x', если она получена из вершины x' перестановкой компонент, равных элементам g_t, g_{t+1} ($g_t \ne g_{t+1}$ $t \in J_{p-1}$, $t \in J_{\eta-1}^{\eta-r+1}$), или заменой g_p (или $g_{\eta-r+1}$) на $g_{\eta-r}$ (или g_{p+1} соответственно) при условии $g_p \ne g_{\eta-r}$ ($g_{\eta-r+1} \ne g_{p+1}$), $p, r \in J_k^0$, $p+r=k$.

Теорема 1. Пусть для смежных вершин x' и x общего многогранника размещений выполняются соотношения $L(x') = L(x)$ и $x'_i \ne x_i$. Тогда выполняется по крайней мере одно из двух условий:

1) $c_j = 0$;

2) вершина x получена из x' перестановкой компонент $x'_i = g_t$ и $x'_q = g_{t+1}$ ($g_t \ne g_{t+1}$), причем $c_i = c_q$ ($i, q \in J_k$, $t \in J_{\eta-1}$).

Доказательство. Пусть для смежных вершин x и x' общего многогранника размещений выполняются условия $L(x') = L(x)$ и $x'_i \ne x_i$. Если вершина x получена из x' заменой $x'_i = g_p$ на $x_i = g_{\eta-r}$ ($g_p \ne g_{\eta-r}$), то

$$L(x') - L(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j (x'_j - x_j) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{k} c_j (x'_j - x_j) + c_i (g_p - g_{\eta-r}) = c_i (g_p - g_{\eta-r}),$$

так как $x'_j = x_j$ $\forall j \ne i$ $\forall j \in J_k$. Следовательно, в этом случае (замены координат) $L(x') = L(x)$ только при $c_i = 0$. Такой же результат получается, если $x'_i = g_{\eta-r+1}$ заменяется на $x'_i = g_{p+1} \ne g_{\eta-r+1}$.

Если вершина x получена из x' перестановкой компонент $x'_i = g_t$ и $x'_q = g_{t+1}$ ($g_t \ne g_{t+1}$), то

$$L(x') - L(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i;\, j \ne q}}^{k} c_j (x'_j - x_j) + c_i (x'_i - x_i) + c_q (x'_q - x_q) = c_i (x'_i - x_i) + c_q (x'_q - x_q).$$

Поскольку $x'_i = x_q$, $x'_q = x_i$, то равенство $L(x') = L(x)$ равносильно $(x'_i - x_i)(c_i - c_q) = 0$. Учитывая, что $x'_i \neq x_i$, получаем $c_i = c_q$.

Теорема доказана.

Отметим, что если для смежных вершин x' и x общего многогранника размещений выполняются соотношения $L(x') = L(x)$, $x'_i \neq x_i$ и $c_i \neq 0$, то в соответствии с теоремой 1 вершина x получена из x' перестановкой компонент $x'_i = g_t$ и $x'_q = g_{t+1}$ $(g_t \neq g_{t+1})$. Обозначим $W = \{w \in J_s \mid c_{t_w} \neq 0\}$.

Следствие 1. Если для смежных вершин x' и x общего многогранника размещений выполняется условие $L(x') = L(x)$, то для всех $w \in W$ мультимножества $\{x'_{t_w}, ..., x'_{t_{w+1}-1}\}$ и $\{x_{t_w}, ..., x_{t_{w+1}-1}\}$ равны между собой.

Пусть точки x' и x^* — минимали (максимали) в задаче (1). Это означает, что найдется последовательность вершин $x' = x^1, x^2 ..., x^r = x^*$ таких, что x^i, x^{i+1} $(i \in J_{r-1})$ — смежные вершины и $L(x^1) = ... = L(x^r)$. Согласно следствию 1 из теоремы 1 для всех $w \in W$, $i \in J_{r-1}$ имеют место равенства мультимножеств $\{x^i_{t_w}, ..., x^i_{t_{w+1}-1}\}$ и $\{x^{i+1}_{t_w}, ..., x^{i+1}_{t_{w+1}-1}\}$. Следовательно, $\{x'_{t_w}, ..., x'_{t_{w+1}-1}\} = \; = \{x^*_{t_w}, ..., x^*_{t_{w+1}-1}\}$ для всех $w \in W$. Иными словами, $(x'_{t_w}, ..., x'_{t_{w+1}-1}) \in E_{\bar{t}_w}(G^w)$, где $G^w = \{x^*_{t_w}, ..., x^*_{t_{w+1}-1}\}$, $|G^w| = t_{w+1} - t_w = \bar{t}_w$, а $E_{\bar{t}_w}(G^w)$ — множество перестановок элементов мультимножества G^w.

Поскольку $x' \in E^k_\eta(G)$, то для $v \in J_s$ такого, что $c_{t_v} = 0$ $(x'_{t_v}, ..., x'_{t_{v+1}-1})$ является $\bar{t}_v$-выборкой из мультимножества $G^v = G - \sum_{w \in W} G^w$ (операции над мультимножествами рассмотрены, например, в [15]). Таким образом, $(x'_{t_v}, ..., x'_{t_{v+1}-1}) \in E^{\bar{t}_v}_{n_v}(G^v)$, где $n_v = \left|G^v\right| = \eta - \sum_{w \in W} \bar{t}_w = \eta - \sum_{w=1}^{s} \bar{t}_w + \bar{t}_v = \eta - k + \bar{t}_v$.

Полученный результат целесообразно сформулировать с использованием понятия полиразмещения, которое определим в соответствии с [9].

Пусть $G = \{g_1, ..., g_\eta\}$ — мультимножество, содержащее n различных элементов. Рассмотрим упорядоченное разбиение J_η на s множеств $N_1, ..., N_s$, удовлетворяющее условиям $N_i \bigcap N_j = \varnothing, N_i \neq \varnothing$, $N_j \neq \varnothing$, $\forall i, j \in J_s$, а также упорядоченное разбиение числа k на s слагаемых $k_1, ..., k_s$, удовлетворяющее условиям $1 \leq k_i \leq n_i$ $\forall i \in J_p$, где $n_i = |N_i|$. Очевидно, что $\eta = n_1 + n_2 + ... + n_s$, $k = k_1 + k_2 + ... + k_s$.

Пусть H — множество всех k-выборок из множества J_η вида

$$\pi = (\pi(1), ..., \pi(k)) = (\pi_{11}, ..., \pi_{1k_1}, ..., \pi_{s1}, ..., \pi_{sk_s}) = (\pi^1, ..., \pi^s), \tag{4}$$

где $\pi^i = (\pi_{i1}, ..., \pi_{ik_i})$ — произвольная k_i-выборка из множества N_i $\forall i \in J_s$. Множество $E^{ks}_{\eta n}(G, H) = \{(g_{\pi(1)}, ..., g_{\pi(k)}) \mid \forall \pi \in H\}$ называют общим множеством полиразмещений.

Вернемся к рассмотрению свойств экстремалей линейной безусловной задачи комбинаторной оптимизации на размещениях. Пусть $x' = (g_{l_1}, ..., g_{l_k})$ — экстремаль (для определенности — минималь) в задаче (1). Рассмотрим разбиение множества J_η на s множеств $N_1, ..., N_s$ таким образом:

$$N_w = \begin{cases} \{l_{t_w}, ..., l_{t_{w+1}-1}\}, \text{ если } w \in W; \\ J_\eta \setminus \bigcup\limits_{v \in W} N_v, \text{ если } c_{t_w} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Легко видеть, что $N_i \cap N_j = \varnothing, N_i \neq \varnothing, N_j \neq \varnothing, \quad \forall i, j \in J_s$. Рассмотрим также разбиение числа k на s слагаемых: $k = \bar{t}_1 + ... + \bar{t}_s$. С учетом введенных обозначений $G^w = \{g_j \in G \mid j \in N_w\}$ для всех $w \in J_s$. Следовательно, любая минималь в задаче (1) удовлетворяет условию $x^* \in E_{\eta n}^{ks}(G, H)$, где H — множество всех k-выборок из J_η вида (4), множества N_w определяются согласно (5).

Пусть теперь для точки $x^* \in E_\eta^k(G)$ выполняется условие $x^* \in E_{\eta n}^{ks}(G, H)$. Тогда

$$L(x^*) = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j^* = \sum_{w=1}^{s} \left(c_{t_w} \sum_{j=t_w}^{t_{w+1}-1} x_j^* \right) = \sum_{w \in W} \left(c_{t_w} \sum_{j=t_w}^{t_{w+1}-1} x_j^* \right) = \sum_{w \in W} \left(c_{t_w} \sum_{j=t_w}^{t_{w+1}-1} x'_j \right) =$$

$$= \sum_{w=1}^{s} \left(c_{t_w} \sum_{j=t_w}^{t_{w+1}-1} x'_j \right) = L(x'),$$

т. е. x^* — минималь в задаче (1).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть точка $x' = (g_{l_1}, ..., g_{l_k})$ — минималь (максималь) в задаче (1), множества $N_w \ \forall w \in J_s$ определяются согласно (5), разбиение числа k на слагаемые имеет вид $k = \bar{t}_1 + ... + \bar{t}_s$. Точка x^* также является минималью (максималью) в задаче (1) тогда и только тогда, когда $x^* \in E_{\eta n}^{ks}(G, H)$, где H — множество выборок вида (4).

Пример 1. Пусть $G = \{2, 3,3, 7, 7, 7, 8, 9\}$, $L(x) = 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 2x_7$. Одной из минималей функции $L(x)$ на множестве $E_8^7(G)$ является точка $x^* =$ $= (2; 3; 3; 7; 7; 8; 9)$. Используя теорему 2, найдем остальные минимали.

Сначала сформируем множества (5). Так как $c_1 = c_2 > c_3 = c_4 = c_5 > c_6 > c_7$, то $\bar{t}_1 = 2$, $\bar{t}_2 = 3$, $\bar{t}_3 = \bar{t}_4 = 1$, $t_1 = 1$, $t_2 = t_1 + \bar{t}_1 = 3$, $t_3 = 6$, $t_4 = 7$, $t_5 = 8$. Поскольку также $c_{t_3} = c_6 = 0$, то $W = \{1, 2, 4\}$. Учитывая, что $x^* = (g_1; g_2; g_3; g_4; g_5; g_7; g_8)$, получаем $N_1 = \{1, 2\}$, $N_2 = \{3, 4, 5\}$, $N_4 = \{8\}$, $N_3 = J_8 \setminus \{1, 2, 3, 4, 5, 8\} = \{6, 7\}$.

Поскольку разбиение числа k на слагаемые имеет вид $k = 2 + 3 + 1 + 1$, то множество H формируется в виде

$$H = \{(1; 2; 3; 4; 5; 6; 8), (1; 2; 3; 4; 5; 7; 8), (1; 2; 3; 5; 4; 6; 8), (1; 2; 3; 5; 4; 7; 8),$$
$$(1; 2; 4; 3; 5; 6; 8), (1; 2; 4; 3; 5; 7; 8), (1; 2; 4; 5; 3; 6; 8), (1; 2; 4; 5; 3; 7; 8),$$
$$(1; 2; 5; 3; 4; 6; 8), (1; 2; 5; 3; 4; 7; 8), (1; 2; 5; 4; 3; 6; 8), (1; 2; 5; 4; 3; 7; 8),$$

$(2; 1; 3; 4; 5; 6; 8), (2; 1; 3; 4; 5; 7; 8), (2; 1; 3; 5; 4; 6; 8), (2; 1; 3; 5; 4; 7; 8),$

$(2; 1; 4; 3; 5; 6; 8), (2; 1; 4; 3; 5; 7; 8), (2; 1; 4; 5; 3; 6; 8), (2; 1; 4; 5; 3; 7; 8),$

$(2; 1; 5; 3; 4; 6; 8), (2; 1; 5; 3; 4; 7; 8), (2; 1; 5; 4; 3; 6; 8), (2; 1; 5; 4; 3; 7; 8)\}.$

Учитывая, что для некоторых элементов множества H соответствующие элементы $(g_{\pi(1)}, ..., g_{\pi(k)})$ множества полиразмещений равны (например, $(g_1; g_2; g_3; g_4; g_5; g_6; g_8) = (g_1; g_2; g_3; g_5; g_4; g_6; g_8) = (2; 3; 3; 7; 7; 7; 9)$, получаем следующее множество полиразмещений $E_{8,5}^{7,4}(G, H)$:

$$E_{8,5}^{7,4}(G, H) =$$
$$= \{(2; 3; 3; 7; 7; 7; 9), (2; 3; 3; 7; 7; 8; 9), (2; 3; 7; 3; 7; 7; 9), (2; 3; 7; 3; 7; 8; 9),$$
$$(2; 3; 7; 7; 3; 7; 9), (2; 3; 7; 7; 3; 8; 9), (3; 2; 3; 7; 7; 7; 9), (3; 2; 3; 7; 7; 8; 9),$$
$$(3; 2; 7; 3; 7; 7; 9), (3; 2; 7; 3; 7; 8; 9), (3; 2; 7; 7; 3; 7; 9), (3; 2; 7; 7; 3; 8; 9)\}.$$

В соответствии с теоремой 2 это множество является множеством минималей функции $L(x)$ на множестве $E_8^7(G)$.

Если среди коэффициентов целевой функции нет равных, то $\bar{t}_j = 1 \quad \forall j \in J_s$, а значит, каждая координата экстремали определяется однозначно и имеет место следствие из теоремы 2.

Следствие 1. Если для коэффициентов целевой функции в задаче (1) выполняется условие $c_1 > c_2 > ... > c_k$, то задача (1) имеет единственное решение.

Отметим, что если $c_j \neq 0 \quad \forall j \in J_k$, то $W = J_s$ и $|N_w| = \bar{t}_w \quad \forall w \in J_s$, поэтому множество $E_{\eta n}^{ks}(G, H)$ является множеством полиперестановок [6, 9] $E_{kn_1}^{s}(G_1, H)$, где $G_1 = \{g_{l_1}, ..., g_{l_k}\}$, $n_1 = |G_1|$.

Пусть для элементов мультимножества и коэффициентов целевой функции выполняются неравенства (2) и (3) соответственно, причем $c_k > 0$. Тогда, как показано в [14], одной из минималей в задаче (1) является точка $(g_1, g_2, ..., g_k)$, а одной из максималей — точка $(g_\eta, g_{\eta-1}, ..., g_{\eta-k+1})$. Следовательно, для минимали $x^* = (g_{l_1}, ..., g_{l_k})$ имеем $l_j = j \quad \forall j \in J_k$ и, учитывая, что $W = J_s$, вследствие $c_j \neq 0 \quad \forall j \in J_k$ получаем следующий вид множеств (5): $N_w = \{t_w, ..., t_{w+1} - 1\} \quad \forall w \in J_s$.

Для максимали имеем $l_j = \eta - j + 1 \quad \forall j \in J_k$, в частности $l_{t_w} = \eta - t_w + 1$, $l_{t_{w+1}-1} = \eta - t_{w+1} + 2$. Следовательно, множества (5) запишем $N_w = \{\eta - t_{w+1} + 2, ..., \eta - t_w + 1\} \quad \forall w \in J_s$.

Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Пусть для элементов мультимножества G и коэффициентов целевой функции в задаче (1) выполняются условия (2) и (3) соответственно, причем $c_k > 0$. Точка x^* является экстремалью в задаче (1) тогда и только тогда, когда $x^* \in E_{kn_1}^{s}(G_1, H)$, где:

- H — множество перестановок из множества J_k вида (4), $k = \bar{t}_1 + ... + \bar{t}_s$;
- $N_w = \{t_w, ..., t_{w+1} - 1\} \quad \forall w \in J_s$, $G_1 = \{g_1, ..., g_k\}$ в задачах минимизации;

ISSN 0572-2691

• $N_w = \{\eta - t_{w+1} + 2, ..., \eta - t_w + 1\}$ $\forall w \in J_s$, $G_1 = \{g_{\eta-k+1}, ..., g_\eta\}$ в задачах максимизации.

Рассмотрим теперь решение задачи (1), если $c_1 < 0$.

Лемма 2. Пусть для элементов мультимножества и коэффициентов целевой функции в задаче (1) выполняются условия (2) и (3) соответственно, причем $c_1 < 0$. Точка x^* является экстремалью в задаче (1), если и только если $x^* \in E_{kn_1}^{s}(G_1, H)$:

• H — множество перестановок из множества J_k вида (4), $k = \bar{t}_1 + ... + \bar{t}_s$;

• $N_w = \{\eta - k + t_w, ..., \eta - k + t_{w+1} - 1\}$ $\forall w \in J_s$, $G_1 = \{g_{\eta-k+1}, ..., g_\eta\}$ в задачах минимизации;

• $N_w = \{k - t_{w+1} + 2, ..., k - t_w + 1\}$ $\forall w \in J_s$, $G_1 = \{g_1, ..., g_k\}$ в задачах максимизации.

Доказательство. Рассмотрим сначала задачу в случае минимизации целевой функции. Она эквивалентна задаче поиска пары $< \tilde{L}(\tilde{x}^*), \tilde{x}^* >$ такой, что

$$\tilde{L}(\tilde{x}^*) = \max_{\tilde{x} \in E_\eta^k(G)} \sum_{j=1}^{k} \tilde{c}_j \tilde{x}_j, \quad \tilde{x}^* = \arg \max_{\tilde{x} \in E_\eta^k(G)} \sum_{j=1}^{k} \tilde{c}_j \tilde{x}_j. \tag{6}$$

Зесь $\tilde{x}_j = x_{k-j+1}$, а коэффициенты функции $\tilde{L}(\tilde{x}) = \sum_{j=1}^{k} \tilde{c}_j \tilde{x}_j$ определяются так: $\tilde{c}_j = -c_{k-j+1}$. Поскольку коэффициенты функции $L(x)$ удовлетворяют условию (3), то $-c_k \ge ... \ge -c_1$ и коэффициенты функции $\tilde{L}(\tilde{x})$ упорядочены по невозрастанию. Значит, одна из максималей функции $\tilde{L}(\tilde{x})$ на $E_\eta^k(G)$ определяется соотношениями $\tilde{x}_j^* = g_{\eta-j+1}$. Тогда одна из минималей в задаче (1) удовлетворяет условиям $x'_j = \tilde{x}_{k-j+1}^* = g_{\eta-k+j}$. Таким образом, множества (5) принимают вид $N_w = \{\eta - k + t_w, ..., \eta - k + t_{w+1} - 1\}$ $\forall w \in W$ ($W = J_s$ вследствие $c_1 < 0$, т.е. $c_j \ne 0$ $\forall j \in J_k$), $G_1 = \{g_{\eta-k+1}, ..., g_\eta\}$. Из теоремы 2 следует, что любая минималь в задаче (1) удовлетворяет условию $x^* \in E_{kn_1}^{s}(G_1, H)$, где $N_w = \{\eta - k + t_w, ..., \eta - k + t_{w+1} - 1\}$ $\forall w \in J_s$, $G_1 = \{g_{\eta-k+1}, ..., g_\eta\}$.

В случае задачи максимизации целевой функции аналогично получаем, что одна из экстремалей удовлетворяет условию $x'_j = g_{k-j+1}$, а значит, $N_w = \{k - t_{w+1} + 2, ..., k - t_w + 1\}$ $\forall w \in J_s$, $G_1 = \{g_1, ..., g_k\}$.

Лемма доказана.

Теорема 3. Пусть элементы мультимножества G в задаче (1) удовлетворяют условию (2), а коэффициенты целевой функции — условию (3). Точка x^* является минималью в задаче (1) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию $x^* \in E_{\eta n}^{ks}(G, H)$, где H — множество k-выборок из множества J_η вида (4), при формировании которых $k = \bar{t}_1 + ... + \bar{t}_s$, а множества N_w определяются следующим образом:

$$N_w = \begin{cases} \{t_w, ..., t_{w+1}-1\}, & \text{если } c_{t_w} > 0, \\ \{\eta - k + t_w, ..., \eta - k + t_{w+1} - 1\}, & \text{если } c_{t_w} < 0, \\ J_\eta \setminus \bigcup\limits_{\nu \in w} N_\nu, & \text{если } c_{t_w} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Доказательство. Пусть r — наибольший индекс такой, что $c_{t_r} > 0$, а q — наименьший индекс такой, что $c_{t_q} < 0$. В соответствии с леммами 1 и 2 для любой точки $x = (x_1, ..., x_k) \in E_\eta^k(G)$ выполняются условия $\sum\limits_{j=1}^{t_{r+1}-1} c_j x_j \ge \sum\limits_{j=1}^{t_{r+1}-1} c_j g_j$ и $\sum\limits_{j=t_q}^{k} c_j x_j \ge \sum\limits_{j=t_q}^{k} c_j g_{\eta-k+j}$, отсюда $\sum\limits_{j=1}^{k} c_j x_j = \sum\limits_{j=1}^{t_{r+1}-1} c_j x_j + \sum\limits_{j=t_q}^{k} c_j x_j \ge \sum\limits_{j=1}^{t_{r+1}-1} c_j g_j + \sum\limits_{j=t_q}^{k} c_j g_{\eta-k+j}$. Таким образом, точка x', удовлетворяющая условиям $x'_j = g_j$ $\forall j \in J_{t_{r+1}-1}$, $x'_j = g_{\eta-k+j}$ $\forall j \in J_k^{t_q}$, является минималью в задаче (1). Тогда в соответствии с теоремой 1 точка x^* является минималью в задаче (1), если и только если $x^* \in E_{\eta n}^{ks}(G, H)$, где H — множество k-выборок из множества J_s вида (4), N_w определяются согласно (7).

Пример 2. Рассмотрим задачу минимизации функции $C(x) = 3x_1 + 3x_2 + x_3 - x_6 - x_7 - 2x_8$ на множестве $E_\eta^k(G)$, где $G = \{-1, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5, 10, 10, 10\}$. Так как мультимножество коэффициентов функции $C(x)$ имеет вид $\{3, 3, 1, 0, 0, -1, -1, -2\}$, то $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_3 = 4$, $t_4 = 6$, $t_5 = 8$, $t_6 = 9$. Учитывая, что $c_{t_1} > 0$, $c_{t_2} > 0$, $c_{t_3} = 0$, $c_{t_4} < 0$, сформируем множества (7): $N_1 = \{1, 2\}$, $N_2 = \{3\}$, $N_4 = \{9, 10\}$, $N_5 = \{11\}$, $N_3 = J_{11} \setminus \{1, 2, 3, 9, 10, 11\} = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Поскольку $g_2 = g_3 = g_4 = 2$, $g_5 = g_6 = g_7 = g_8$, $g_9 = g_{10} = g_{11} = 10$, то множество полиразмещений

$$E_{11,4}^{8,5}(G, H) = \{(-1; 2; 2; 2; 5; 10; 10; 10), (-1; 2; 2; 5; 2; 10; 10; 10),$$
$$(2; -1; 2; 2; 5; 10; 10; 10), (2; -1; 2; 5; 2; 10; 10; 10)\}.$$

На основе теоремы 3 получаем, что минималями функции $L(x)$ на множестве $E_\eta^k(G)$ являются точки $(-1; 2; 2; 2; 5; 10; 10; 10)$, $(-1; 2; 2; 5; 2; 10; 10; 10)$, $(2; -1; 2; 2; 5; 10; 10; 10)$, $(2; -1; 2; 5; 2; 10; 10; 10)$. Соответствующее значение целевой функции равно –35.

Аналогичная теорема имеет место и в случае максимизации.

Теорема 4. Пусть элементы мультимножества в задаче (1) удовлетворяют условию (2), а коэффициенты целевой функции — условию (3). Точка x^* является максималью в задаче (1), если и только если она удовлетворяет условию $x^* \in E_{\eta n}^{ks}(G, H)$, где H — множество k-выборок из множества J_η вида (4), при формировании которых $k = \bar{t}_1 + ... + \bar{t}_s$, а множества N_w определяются следующим образом:

$$N_w = \begin{cases} \{\eta - t_{w+1} + 2, ..., \eta - t_w + 1\}, \text{ если } c_{t_w} > 0, \\ \{k - t_{w+1} + 2, ..., k - t_w + 1\}, \text{ если } c_{t_w} < 0, \\ J_\eta \setminus \bigcup\limits_{\nu \in w} N_\nu, \qquad\qquad \text{если } c_{t_w} = 0. \end{cases}$$

Пример 3. Рассмотрим задачу максимизации функции $L(x) = x_1 + x_2 - 2x_4 - 2x_5 - 2x_6 - 4x_7$ на множестве $E_\eta^k(G)$, где $G = \{-3, 2, 2, 2, 5, 5, 8, 10, 10\}$. Учитывая, что $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_3 = 4$, $t_4 = 7$, $t_5 = 8$, причем $c_{t_2} = 0$, имеем, что $N_1 = \{8, 9\}$ $(\eta - t_2 + 2 = 8, \eta - t_1 + 1 = 9)$, $N_3 = \{2, 3, 4\}$ $(k - t_4 + 2 = 2, k - t_3 + 1 = 4)$, $N_4 = \{1\}$, $N_2 = J_9 \setminus \{1, 2, 3, 4, 8, 9\} = \{5, 6, 7\}$. Так как множество полиразмещений $E_{9,5}^{7,4}(G, H) = \{(10; 10; 5; 2; 2; 2; -3), (10; 10; 8; 2; 2; 2; -3)\}$, то согласно теореме 4 максималями функции $L(x)$ на множестве $E_\eta^k(G)$ являются точки $(10; 10; 5; 2; 2; 2; -3)$ и $(10; 10; 8; 2; 2; 2; -3)$. Соответствующее значение целевой функции равно 20.

Свойства безусловной задачи оптимизации дробно-линейной функции на размещениях

Используя критерий экстремали в линейной безусловной задаче оптимизации на размещениях, рассмотрим возможность получения всех экстремалей для дробно-линейных задач. Для нахождения одной из таких экстремалей x^* может использоваться аналитический метод, предложенный в [8]. Он позволяет также определить экстремали, являющиеся смежными вершинами с x^*, однако не дает ответа на вопрос о существовании иных экстремалей.

Рассмотрим безусловную задачу комбинаторной оптимизации на размещениях с дробно-линейной целевой функцией $\Phi(x) = \dfrac{\sum_{j=1}^{k} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{k} d_j x_j + d_0}$, т.е. задачу поиска пары $< \Phi(x^*), x^* >$ такой, что

$$\Phi(x^*) = \underset{x \in E_\eta^k(G)}{\text{extr}} \frac{\sum_{j=1}^{k} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{k} d_j x_j + d_0}; \quad x^* = \arg \underset{x \in E_\eta^k(G)}{\text{extr}} \frac{\sum_{j=1}^{k} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{k} d_j x_j + d_0}. \qquad (8)$$

Будем считать, что для любой точки $x \in E_\eta^k(G)$ справедливо неравенство $\sum_{j=1}^{k} d_j x_j + d_0 > 0.$

Пусть $< \Phi^*, x^* >$ — решение задачи (8). Для определенности рассмотрим случай минимизации.

Тогда для любой точки $x \in E_\eta^k(G)$ имеет место неравенство

$$\frac{\sum_{j=1}^{k} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{k} d_j x_j + d_0} \geq \Phi^*. \tag{9}$$

Вместе с функцией $\Phi(x)$ рассмотрим функцию $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{k}(c_j - \Phi^* d_j) x_j$. Так как при условии $\sum_{j=1}^{k} d_j x_j + d_0 > 0$ неравенство (9) равносильно неравенству $\sum_{j=1}^{k}(c_j - \Phi^* d_j) x_j \geq \Phi^* d_0 - c_0$, то для любой точки $x \in E_\eta^k(G)$ имеем $\varphi(x) \geq \Phi^* d_0 - c_0$, т.е. величина $\varphi^* = \Phi^* d_0 - c_0$ — минимум линейной функции $\varphi(x)$ на множестве $E_\eta^k(G)$. Из эквивалентности условий $\Phi(x) = \Phi^*$ и $\varphi(x) = \varphi^*$ также следует, что точка x' — минималь функции $\varphi(x)$ на множестве $E_\eta^k(G)$, если и только если она — минималь задачи (8).

Перенумеруем переменные таким образом, чтобы коэффициенты функции $\varphi(x)$ были упорядочены по невозрастанию:

$$c_{u_1} - \Phi^* d_{u_1} \geq c_{u_2} - \Phi^* d_{u_2} \geq \ldots \geq c_{u_k} - \Phi^* d_{u_k}, \tag{10}$$

и обозначим $c'_j = c_{u_j} - \Phi^* d_{u_j}$, $y_j = x_{u_j}$ для всех $j \in J_k$. Пусть $(\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_m)$ — первичная спецификация мультимножества $\{c'_1, \ldots, c'_k\}$, элементы которой упорядочены согласно порядку возрастания элементов основы; $p_1 = 1$, $p_{i+1} = $ $= p_i + \overline{p}_i \;\; \forall i \in J_m$.

Пусть $x^* = (g_{l_1}, \ldots, g_{l_k})$, тогда соответствующая точка $y^* = (x_{u_1}, \ldots, x_{u_k}) =$ $= (g_{r_1}, \ldots, g_{r_k})$, где $r_j = l_{u_j}$. Обозначим $I = \{i \in J_m \mid c_{p_i} \neq 0\}$ и рассмотрим разбиение числа k на m слагаемых $(k = \overline{p}_1 + \ldots + \overline{p}_m)$ и разбиение множества J_η на m подмножеств N'_i по правилу

$$N'_i = \begin{cases} \{l_j \mid j \in \overline{N}_i\}, \text{где } \overline{N}_i = \{u_{p_i}, \ldots, u_{p_{i+1}-1}\}, \text{если } i \in I, \\ J_\eta \setminus \bigcup\limits_{j \in I} N'_j, \text{если } c_{p_i} = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Из теоремы 2 следует, что точка $y' = (y'_1, \ldots, y'_k)$ — минималь функции $\varphi(y) = \sum_{j=1}^{k} c'_j y_j$, если и только если $y' \in E_{\eta n}^{ks}(G, H)$, где H — множество выборок вида (4), где $\pi^i = (\pi_{i1}, \ldots, \pi_{ik_i})$ — произвольная k_i-выборка из множества N'_i $\forall i \in J_m$, определенного согласно (11). Так как аналогичные рассуждения справедливы и в случае максимизации, то имеет место следующая теорема.

Теорема 5. Пусть x^* — минималь (максималь) в задаче (8), $\Phi^* = \Phi(x^*)$, индексы u_j $\forall j \in J_k$ таковы, что выполняется условие (10), H — множество выборок вида (4), где $\pi^i = (\pi_{i1}, \ldots, \pi_{ik_i})$ — произвольная k_i-выборка из множества

N'_i $\forall i \in J_m$, определенного согласно (11), $k = \overline{p}_1 + ... + \overline{p}_m$. Точка x' — также минималь (максималь) в задаче (8), если и только если для всех $j \in J_k$ выполняются равенства $x'_{u_j} = y_j$, где $(y_1, ..., y_k) \in E^{ks}_{\eta n}(G, H)$.

Пример 4. Рассмотрим решение задачи минимизации функции $\Phi(x) = \dfrac{5x_1 + x_2 + 4x_3 - 24}{x_1 + x_2 - 4}$ на множестве $E^3_5(G)$ размещений из элементов мультимножества $G = \{2, 3, 5, 5, 7\}$. С помощью аналитического метода из [7], начиная процесс с точки $x^0 = (2; 3; 5)$, получим минималь $x^* = (2; 5; 3) = (g_1; g_3; g_2)$. Соответствующее значение целевой функции равно $\Phi^* = \Phi(x^*) = 1$. В этом случае функция $\varphi(x)$ принимает вид $\varphi(x) = (5 - 1\cdot 1)x_1 + (1 - 1\cdot 1)x_2 + (4 - 0\cdot 1)x_3 = 4x_1 + 4x_3$. Тогда $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 2$; $c'_1 = c'_2 = 4$, $c'_3 = 0$, $p_1 = 1$, $p_2 = 3$, $p_3 = 4$. Сформируем множества (11):

- поскольку $c_{p_1} \neq 0$, то $\overline{N}_1 = \{u_1, u_2\} = \{1, 3\}$, $N'_1 = \{l_1, l_3\} = \{1, 2\}$;
- поскольку $c_{p_2} = 0$, то $N'_2 = J_6 \setminus N'_1 = \{3, 4, 5\}$.

Тогда

$$H = \{(1; 2; 3), (1; 2; 4), (1; 2; 5), (2; 1; 3), (2; 1; 4), (2; 1; 5)\},$$

$$E^{3,\,2}_{5,\,4}(G, H) = \{(2; 3; 5),\ (2; 3; 7), (3; 2; 5), (3; 2; 7)\}.$$

В соответствии с теоремой 5 любая минималь в рассматриваемой задаче удовлетворяет условиям $x_1 = y_1$, $x_3 = y_2$, $x_2 = y_3$, где $(y_1, y_2, y_3) \in E^{3,\,2}_{5,\,4}(G, H)$. Таким образом, минималями являются точки $x^1 = (2; 5; 3)$, $x^2 = (2; 7; 3)$, $x^3 = (3; 5; 2)$, $x^4 = (3; 7; 2)$.

Заключение

В настоящей статье сформулирован и обоснован критерий экстремали линейной безусловной задачи комбинаторной оптимизации на размещениях. Показано, что любая экстремаль является элементом определенного множества полиразмещений. Предложен и обоснован способ получения всех экстремалей, если известна одна из них, в безусловной задаче с дробно-линейной целевой функцией на размещениях.

Полученные результаты могут использоваться при изучении свойств других классов задач евклидовой комбинаторной оптимизации, в первую очередь — условных на размещениях, в том числе и с неопределенностью, а также для разработки методов решения таких задач.

О.О. Ємець, Т.М. Барболіна

ВЛАСТИВОСТІ КОМБІНАТОРНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ БЕЗУМОВНИХ ЗАДАЧ НА РОЗМІЩЕННЯХ З ЛІНІЙНОЮ І ДРОБОВО-ЛІНІЙНОЮ ЦІЛЬОВИМИ ФУНКЦІЯМИ

Розглянуто властивості безумовних евклідових задач комбінаторної оптимізації на розміщеннях з лінійною і дробово-лінійною цільовими функціями. Показано, що будь-яка екстремаль у лінійній задачі є елементом певної множини полірозміщень. Для задач із дробово-лінійною цільовою функцією обгрунтовано спосіб формування множини всіх екстремалей, якщо відома одна з них.

O.A. Iemets, T.N. Barbolina

PROPERTIES OF COMBINATORIAL OPTIMIZATION UNCONDITIONAL PROBLEMS ON ARRANGEMENTS WITH LINEAR AND LINEAR-FRACTIONAL OBJECTIVE FUNCTIONS

The properties of unconditional combinatorial optimization problems on a set of arrangements with linear and linear-fractional objective functions are considered. We prove that in linear problem any extremal is an element of certain set of polyarrangements. Also we substantiate how to construct the set of extremals in a problem with linear-fractional objective function when one of extremals is known.

1. *Сергиенко И.В. Каспшицкая М.Ф.* Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — Киев : Наук. думка, 1981. — 288 с.
2. *Згуровский М.З., Павлов А.А.* Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами. — Киев : Наук. думка, 2010. — 573 с.
3. *Панишев А.В., Плечистый Д.Д.* Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера. — Житомир : ЖГТУ, 2006. — 300 с.
4. *Гуляницкий Л.Ф., Сиренко С.И.* Метаэвристический метод комбинаторной оптимизации ОМК-Н // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2010. — № 4. — С. 31–42.
5. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. — Киев : Наук. думка, 1986. — 268 с.
6. *Стоян Ю.Г., Ємець О.О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/487.
7. *Емец О.А., Барболина Т.Н.* Комбинаторная оптимизация на размещениях. — http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/473.
8. *Емец О.А., Черненко О.А.* Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях. — http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/467.
9. *Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М.* Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. — http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/376.
10. *Гребенник И.В., Баранов А.В.* Оценки минимума выпуклых функций на классах комбинаторных множеств перестановок // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. — 2009. — № 1. — С. 81–87.
11. *Донець Г.П., Колєчкіна Л.М.* Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. — http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/560.
12. *Емец О.А., Устьян Н.Ю.* Исследование задач комбинаторной оптимизации игрового типа на размещениях // Проблемы управления и информатики. — 2007. — № 1. — С. 26–36.
13. *Ємець О.О., Роскладка О.В., Недобачій С.С.* Незвідна система обмежень для загального многогранника розміщень // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 1. — С. 3–11.
14. *Емец О.А., Барболина Т.Н.* О свойствах линейной безусловной задачи комбинаторной оптимизации на размещениях с вероятностной неопределенностью // Кибернетика и системный анализ. — 2016. — № 2. — С. 127–139.
15. *Ємець О.О., Парфьонова Т.О.* Дискретна математика. — http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/552

Получено 22.03.2016