УДК 681.51

Ю.Н. Базилевич, И.А. Костюшко

О ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ ТОЧНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ ЛИНЕЙНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Введение

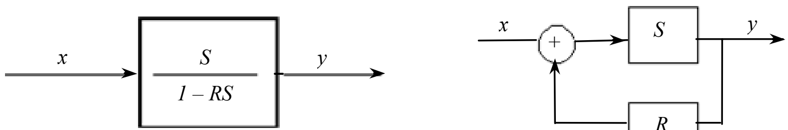
Термин «декомпозиция» используется в различных областях знаний. По отношению к прикладным исследованиям и, в частности, к математическим моделям управляемых систем Ю.Н. Павловский [1] охарактеризовал декомпозицию как «… разложение (разбиение, расслоение) исходного объекта на более простые объекты, как правило, той же природы, что и исходный, причем совокупность этих более простых объектов эквивалентна исходному объекту. Точно эквивалентна, если речь идет о точной декомпозиции, и приближенно эквивалентна, если речь идет о приближенной декомпозиции» [1, 2].

Постановка задачи

В настоящей работе рассматриваются различные подходы к понятию «декомпозиция» (разложение, расщепление) при исследовании линейных систем. Основное внимание уделяется точной декомпозиции, т.е. такой, при которой ничего не отбрасывается и никакие величины не заменяются приближенными. Естественно, полученная классификация не претендует на абсолютную полноту.

Декомпозиция уравнений и детализация блок-схемы

В первую очередь отделим задачи декомпозиции уравнений от других подходов, которые можно трактовать как детализацию (уточнение) блок-схемы, диаграммы либо расчетной схемы. Например, в теории автоматического управления передаточная функция звена с обратной связью равна S / $(1 - RS)$, где S и R — передаточные функции соответственно прямого и обратного звена. В этом случае декомпозиция — это переход от блока, изображенного на рис. 1, *а*, к схеме, изображенной на рис. 1, *б*.



а *б*

Рис. 1

Такое использование термина характерно для теории систем, системного анализа и теории баз данных. Так в [3, гл. 8] рассматривается декомпозиция конечного автомата, приводящая к изображению его в виде схемы из более простых элементов. В теории баз данных декомпозиция означает разделение на части диаграммы, соответствующей рассматриваемым функциональным зависимостям [4, гл. 3].

В теории матриц декомпозиция (разложение) матрицы нередко означает представление исходной матрицы в виде произведения двух или трех матриц специального вида. Совсем другой смысл имеет приведение матриц к блочно-диагональному виду, которое тоже иногда называют декомпозицией матриц (точнее, декомпозицией соответствующих уравнений; см. разд. «Алгебраические методы декомпозиции»).

Декомпозиция систем уравнений — разбиение систем уравнений на несколько более простых подсистем. Такая декомпозиция может быть приближенной или точной.

Для приближенной декомпозиции широко используются следующие подходы: обрыв связей, переход к парциальным системам, отделение высокочастотных колебаний от низкочастотных. Эти подходы хорошо известны в теории колебаний [5, 6]. При их применении надо различать величины коэффициентов связи и связанности. Понятие слабых коэффициентов связи и связанности, введенное для двухмассовых систем, обобщено на случай n-мерных систем в работе [7].

Декомпозиции (редукции) нелинейных систем посвящено огромное число публикаций, в том числе монографии сотрудников ВЦ РАН [2, 8]. Институт математики НАНУ проводил представительные конференции «Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics» по симметричному анализу нелинейных систем [9]. В настоящей работе декомпозиция нелинейных систем не рассматривается.

Методы точной декомпозиции

Рассмотрим методы точной (строгой) декомпозиции (рис. 2).

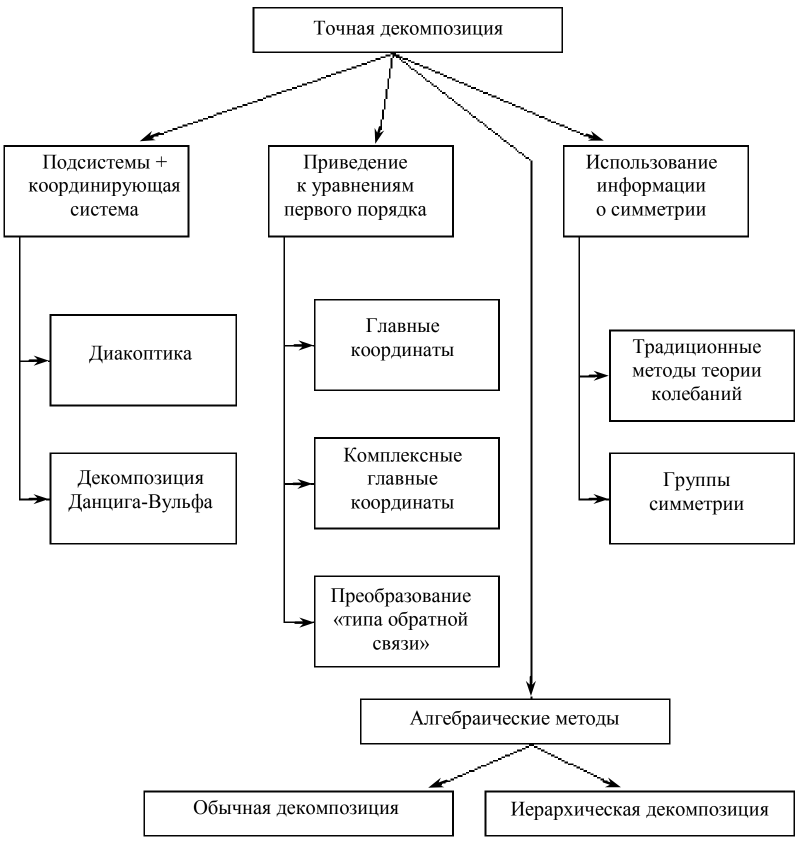


Рис. 2

Существуют методы приведения большой системы уравнений к отдельным подсистемам уравнений для блоков анализируемой системы и дополнительной координирующей системе уравнений, соответствующей связям между блоками.

 ISSN 0572-2691

Г. Крон [10, 11] назвал такой подход диакоптикой. Аналогичный подход используется в задачах линейного программирования — декомпозиция Данцига–Вульфа [12]. Методы Г. Крона развивает в настоящее время Е.В. Сметанин [13, 14].

Следует заметить, что возможность разбить уравнения на подсистемы, соответствующие блокам анализируемой системы, представляется не во всех задачах. При анализе собственных колебаний большой механической или электрической системы невозможно выбрать произвольные подсистемы уравнений. Это следует из того, что такой анализ требует решения алгебраического уравнения (либо нахождения собственных чисел матрицы). Если можно было бы произвольным образом понижать порядок любой системы уравнений, то это означало бы, что за конечное число шагов можно решить любое алгебраическое уравнение, что противоречит теореме Абеля. Далее рассматриваются методы декомпозиции, дающие положительный результат лишь в случае, когда свойства данной системы таковы, что декомпозиция соответствующих уравнений возможна.

Уравнения механических или электрических колебаний могут быть записаны в виде

$$B_1\ddot{\mathbf{x}} + +B_2\dot{\mathbf{x}} + B_3\mathbf{x} = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{x} \in R^n$; B_i — квадратные вещественные матрицы. Такие уравнения приводятся к обычным главным координатам [5, 6] в случае, когда две из матриц B_i симметрические, причем одна из них положительно определена, а третья является линейной комбинацией первых двух. При решении прикладных задач приведение к главным координатам, как правило, не выполняется, но сам факт существования главных координат является важной информацией о поведении системы.

В случае, когда уравнения не приводятся к обычным главным координатам, их можно привести к «главным фазовым координатам» [6, § 93]. Сначала приведем уравнения (1) к системе уравнений первого порядка

$$\dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u},\ \ \mathbf{u} \in R^{2n}. \tag{2}$$

Если A — матрица простой структуры, то уравнения (2) заменой переменных $\mathbf{u} = S\boldsymbol{\rho}$ приводятся к отдельным уравнениям первого порядка

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}_k = \lambda_k \boldsymbol{\rho}_k,\ \ k = \overline{1, 2n}. \tag{3}$$

Здесь S — матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы A, $\{\lambda_i\}$ — собственные числа матрицы A. Следует заметить, что при решении технических задач в подавляющем большинстве случаев матрица A является матрицей простой структуры.

Переменные $\boldsymbol{\rho}_k$ называют главными (собственными, нормальными) фазовыми координатами. Решения $\mathbf{u}_k = c_k e^{\lambda_k t}$ уравнений (3) — это главные колебания (главные движения) исследуемой системы. Главные фазовые координаты, как правило, комплексные. Поэтому для расчетов иногда используют переход к отдельным подсистемам второго порядка с вещественными коэффициентами и переменными [15, п. 3.6.3].

Уравнения, описывающие эволюцию системы автоматического управления, имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \tag{4}$$

где $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$ — вектор переменных; $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ u_n \end{bmatrix}$ — вектор управления. При выполнении определенных условий [16, 17] эти уравнения могут быть приведены к отдельным уравнениям первого порядка с помощью преобразования «типа обратной связи», т.е. преобразования, при котором используется совместное преобразование переменных и управлений.

Группы симметрии

Симметрия физической системы проявляется в том, что существуют преобразования g_i пространства, относительно которых система, а следовательно, и ее математическая модель инвариантны (неизменны). К таким преобразованиям относятся отражения физической системы относительно плоскостей симметрии, повороты вокруг осей симметрии и т.п.

Элементарные приемы расщепления уравнений, описывающих симметричные системы, широко применяются в механике, электротехнике и теории колебаний [5, 18, 19].

Когда преобразований симметрии g_i много, удобнее использовать все сразу с помощью теории групп [20]. Если во множестве преобразований g_i ввести операцию последовательного применения преобразований $g_c = g_a g_b$, то это множество становится группой. Свойство инвариантности системы относительно преобразований g_i выражается в том, что матрицы преобразований симметрии $\mathrm{T}(g_i)$ коммутируют с матрицами коэффициентов системы уравнений. В литературе подробно описаны все конечные группы, встречающиеся в приложениях. Приведены также их неприводимые представления $\tau_k(g_i)$ (здесь $k = \overline{1, m}$, m — число различных неприводимых представлений данной группы). Разложение представлений $\{\mathrm{T}(g_i)\}$ на неприводимые соответствует разделению системы уравнений на несколько подсистем.

Имеется уже столетний опыт применения групп симметрии в теоретической физике. Очень эффективны эти методы при анализе колебаний молекул и кристаллов. С 1969 г. появляются работы о применении методов теории конечных групп в технических задачах: А.И. Кухтенко [21], Ю.И. Самойленко [22], В.М. Фомин [23], В.В. Удилов [24], Ю.Н. Базилевич [25], Г.В. Можаев [26].

Алгебраические методы декомпозиции

Данные методы декомпозиции позволяют либо привести данную систему уравнений к нескольким подсистемам, либо установить, что при выбранном классе преобразований такое приведение невозможно. Такая декомпозиция в случае линейных систем означает приведение матриц коэффициентов к блочно-диагональному или блочно-треугольному виду с помощью замены переменных.

Приведение матриц коэффициентов к блочно-диагональному виду соответствует декомпозиции уравнений на независимые подсистемы. Для тех систем уравнений, для которых такая декомпозиция возможна, существует преобразование переменных, инвариантное по отношению к данной системе [15, замечание 6.3]. Поэтому алгебраические методы декомпозиции можно трактовать как методы выявления скрытой симметрии исследуемой системы. Впервые вычислительные методы для этого были предложены Е.Д. Якубович [27] и А.К. Лопатиным [28] (см. также список литературы в [15]). Методы одновременного приведения нескольких квадратных матриц к одинаковому блочно-диагональному виду используются также для упрощения задач полуопределенного программирования [29, 30].

Алгебраические методы декомпозиции применяются не только к системам уравнений с квадратными матрицами коэффициентов, но и к различным управляемым системам [15, 27, 31, 32], где в постановке задачи присутствуют прямоугольные матрицы. В качестве примера системы уравнений с прямоугольными матрицами коэффициентов рассмотрим уравнения (4). Ставится задача приведения к блочно-диагональному виду квадратной матрицы A и прямоугольной, вообще говоря, матрицы B с помощью преобразования

$$\widetilde{A} = S^{-1} A S; \;\; \hat{B} = S^{-1} B H,$$

где S и H — неособенные матрицы соответствующих порядков.

В отличие от обычной декомпозиции, приведение матриц к блочно-треугольному виду соответствует иерархической декомпозиции [1, 2]. Ранее использовались также термины «вертикальная», «последовательная декомпозиция», «агрегирование». По терминологии, используемой в [8], иерархическая декомпозиция — это редукция с помощью факторизации. При иерархической декомпозиции первая из подсистем не содержит «чужих» переменных, в следующую подсистему, кроме «своих» переменных, войдут переменные предыдущей подсистемы и т.д. Число таких подсистем может быть бóльшим, чем при обычной декомпозиции. Методы выполнения иерархической декомпозиции квадратных матриц изложены в [15, 33].

Заключение

Рассмотрены различные постановки задач точной декомпозиции систем линейных уравнений. Перечислены основные работы по этим направлениям.

Слово «декомпозиция» имеет широкое применение, даже в более узком смысле: декомпозиция систем, описываемых линейными уравнениями. Активизировалась работа по этой тематике в 70–80-е годы. Но развитие и применение методов на этом не остановилось [7, 8, 20, 29, 30, 34].

В настоящее время еще не создан вычислительный метод иерархической декомпозиции управляемых систем, описываемых прямоугольными матрицами коэффициентов.

Ю.М. Базилевич, І.А. Костюшко

ПРО ПОСТАНОВКУ ЗАДАЧ ТОЧНОЇ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ЛІНІЙНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Описано різні підходи до проблеми декомпозиції і математичні моделі, які дозволяють ефективно її використовувати. Основну увагу приділено декомпозиції систем лінійних рівнянь, що описуються декількома матрицями коефіцієнтів. Наведено короткий опис літератури по декомпозиції.

Yu.N. Bazilevich, I.A. Kostyushko

ON FORMULATION OF PROBLEMS OF PRECISE DECOUPLING OF LINEAR MATHEMATICAL MODELS

Various approaches to the problem of decoupling and mathematical models that allow you to use it effectively are described. Emphasis is placed on the decoupling of systems of linear equations by several matrices of coefficients. A brief description of the literature on decoupling is given.

1. *Павловский Ю.Н.* Декомпозиция моделей управляемых систем. — М. : Знание, 1985. — 32 с.
2. *Павловский Ю.Н., Смирнова Т.Г.* Проблема декомпозиции в математическом моделировании. — М. : ФАЗИС, 1998. — VI+266 с.
3. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. — М. : Мир, 1971. — 400 с.
4. *Джексон Г.* Проектирование реляционных баз данных для использования с микроЭВМ. — М. : Мир, 1991. — 252 с.
5. *Мандельштам Л.И.* Лекции по теории колебаний. — М. : Наука, 1972. — 470 с.
6. *Стрелков С.П.* Введение в теорию колебаний. — М. : Наука, 1964. — 440 с.
7. *Банах Л.Я.* Методы декомпозиции и редукции динамических моделей при колебаниях механических систем // Вестник научно-технического развития. — 2012. — № 6 (58). — С. 3–8.
8. *Елкин В.И.* Основы геометрической теории нелинейных управляемых систем. — М. : Физматлит, 2014. — 204 с.

9. *Eighth* international conference «Symmetry in nonlinear mathematical physics». June 21–27, 2009. http://www.imath.kiev.ua/~appmath/conf.html
10. *Крон Г.* Исследование сложных систем по частям — диакоптика. — М. : Наука, 1972. — 544 с.
11. *Крон Г.* Тензорный анализ сетей. — М. : Сов. радио, 1978. — 720 с.
12. *Лэсдон Л.* Оптимизация больших систем. — М. : Наука, 1975. — 432 с.
13. *Сметанин Е.В., Иванова Н.Б.* К расчету крупномасштабной сети декомпозиционным и диакоптическим методами в рамках категорно-тензорной модели сетей. Поиск наиболее эффективного разбиения сети на подсети // Вестник Иван. гос. ун-та. — 2008. — Вып. 2 — С. 40–44.
14. *Сметанин Е.В.* Категорно-тензорная модель сетей с движущимися элементами // Там же — С. 44–49.
15. *Базилевич Ю.Н.* Численные методы декомпозиции в линейных задачах механики. — Киев : Наук. думка, 1987. — 156 с.
16. *Falb P.L., Wolovich W.A.* Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1967. — **12**, N 6. — P. 651–659.
17. *Wonham W.M., Morse A.S.* Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems : a geometric approach // SIAM J. Contr. — 1970. — **8**, N 1. — P. 1–18.
18. *Рабинович И.М.* Курс строительной механики. — М. : Госстройиздат, 1954. — Ч. 2. — 544 с.
19. *Бидерман В.Л.* Теория механических колебаний. — М. : Высш. шк., 1980. — 408 с.
20. *Любарский Г.Я.* Теория групп и ее применение в физике: Курс лекций для физиков-теоретиков, изд. 2. — М. : URSS, 2016. — 360 с.
21. *Кухтенко А.И.* Проблема многомерности в теории сложных систем // Кибернетика и вычисл. техника. — 1969. — Вып. 1. — С. 6–35.
22. *Самойленко Ю.И.* Методы теории линейных представлений групп симметрии и применение этих методов для дискретных систем // Там же. — 1969. — Вып. 2. — С. 37–66.
23. *Фомин В.М.* Применение теории представлений групп к определению частот и форм свободных колебаний стержневых систем с данной группой симметрии // Распределенное управление процессами в сплошной среде. — Киев : ИК АН УССР, 1969. — Вып. 1. — С. 58–71.
24. *Удилов В.В.* Об аналитическом конструировании многомерных систем с известной группой симметрии // Кибернетика и вычисл. техника. — 1970. — Вып. 5. — С. 13–18.
25. *Базилевич Ю.Н.* Расщепление уравнений неконсервативной колебательной системы, обладающей симметрией, с помощью теории групп // Некоторые задачи механики скоростного наземного транспорта. — Киев : Наук. думка, 1974. — С. 53–56.
26. *Можаев Г.В.* Об использовании симметрии в линейных задачах оптимального управления с квадратичным критерием качества // Автоматика и телемеханика. — 1975. — № 6. — С. 22–30.
27. *Якубович Е.Д.* Построение систем замещения для некоторого класса многомерных линейных систем автоматического управления // Изв. вузов. Радиофизика. — 1969. — **12**, № 3. — С. 362–377.
28. *Лопатин А.К.* Об алгебраической приводимости систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1968. — **4**, № 3. — С. 439–445.
29. *Klerk E. de, Dobre Cr., Ṗasechnik D.V.* Numerical block diagonalization of matrix $*$-algebras with application to semidefinite programming // Math. Program., Ser. B. — 2011. — **129**. — P. 91–111.
30. *Базилевич Ю.Н.* Об упрощении задачи полуопределенного программирования // Теорія оптимальних рішень: Зб. наук. пр. — 2016. — № 15. — С. 103–107.
31. *Удилов В.В.* Применение методов абстрактной алгебры при исследовании многомерных систем автоматического управления // Кибернетика и вычисл. техника. — 1974. — Вып. 23. — С. 20–27.
32. *Белозеров В.Е., Можаев Г.В.* О декомпозиции линейных стационарных систем автоматического управления // Там же. — 1983. — Вып. 58. — С. 71–78.
33. *Bazilevich Yu.N.* The Simultaneous Reduction of Matrices to the Block-Triangular Form [E-resource] // Physics Journal. — 2015. — **1**, N 2. — P. 54–61. http://files.aiscience.org/journal/article/html/70400061.html
34. *Павловский Ю.Н.* Теория декомпозиции и некоторые ее приложения // VIII Всероссийская научная конференция с международным участием «Математическое моделирование развивающейся экономики, экологии и технологий (ЭКОМОД-2014)». — 2014. http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=10235

Получено 11.05.2016
После доработки 24.06.16