УДК 517.97

Г.Ф. Гулиев, *Х.И. Сейфуллаева*

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРАВОЙ ЧАСТИ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ

Известно, что колебания упругой пластины описываются дифференциальными уравнениями с частными производными четвертого порядка [1, 2]. Поэтому исследование обратных задач для уравнений с частными производными [3], в частности для уравнения упругой пластины, имеет большое теоретическое и практическое значение [4]. Один из подходов для решения обратных задач — оптимизационный метод. Суть его состоит в том, что обратная задача сводится к задаче оптимального управления, и эта новая задача исследуется методами теории оптимального управления.

Изучение таких задач начато с конца XX века, и в данное время они интенсивно исследуются [4–6].

1. Постановка задачи

Требуется найти пару функций $(u, \upsilon) \in W_2^{2,1}(Q_T) \times L_2(Q_T)$ из следующих соотношений:

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta(D\Delta u) + (1-\nu)\left(2\frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \upsilon(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u(x, y, 0) = \varphi_0(x, y), \ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x, y), \ (x, y) \in \Omega, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &u(0, y, t) = 0, \frac{\partial u(0, y, t)}{\partial x} = 0, u(x, 0, t) = 0, \frac{\partial u(x, 0, t)}{\partial y} = 0, \ 0 \le x \le a, \ 0 \le t \le T, \\ &u(a, y, t) = 0, \frac{\partial u(a, y, t)}{\partial x} = 0, u(x, b, t) = 0, \frac{\partial u(x, b, t)}{\partial y} = 0, 0 \le y \le b, \ 0 \le t \le T, \end{aligned} \tag{3}$$

$$u(x, y, T) = \chi_0(x, y), \ (x, y) \in \Omega. \tag{4}$$

Здесь $(x, y) \in \Omega = \{(x, y) : 0 < x < a, \ 0 < y < b\}$, $t \in (0, T)$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, a, b, T — заданные положительные числа, $\rho(x, y)$ — плотность массы пластины в точке (x, y), $h(x, y)$ — толщина пластины в точке (x, y), $u(x, y, t)$ — прогиб пластины в точке (x, y) в момент времени t, Δ — оператор Лапласа по x, y,

$D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость, ν $\left(0 < \nu < \dfrac{1}{2}\right)$ — коэффициент Пуассона, $E > 0$ — модуль Юнга, $h(x, y) \in W_2^3(\Omega)$ — заданная функция, причем $0 < \nu \le h(x, y) \le \mu$, $\left|\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right| \le M$, $\left|\dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\right| \le M$, $\left|\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right| \le M$, где ν, μ, M — заданные положительные числа, $\varphi_0(x, y) \in \overset{o}{W}{}_2^2(\Omega)$, $\varphi_1(x, y) \in L_2(\Omega)$ — заданные начальные функции, $\chi_0(x, y) \in L_2(\Omega)$ — заданная функция.

Обозначим $W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$ класс функций $W_2^{2,1}(Q_T)$, элементы которого удовлетворяют граничным условиям

$$\eta(0, y, t) = 0, \frac{\partial \eta(0, y, t)}{\partial x} = 0, \eta(x, 0, t) = 0, \frac{\partial \eta(x, 0, t)}{\partial y} = 0,$$
$$\eta(a, y, t) = 0, \frac{\partial \eta(a, y, t)}{\partial x} = 0, \eta(x, b, t) = 0, \frac{\partial \eta(x, b, t)}{\partial y} = 0.$$

Рассмотрим обобщенное решение задачи (1)–(3).

Под обобщенным решением задачи (1)–(3) для каждой функции $\upsilon(x, y, t)$ из $L_2(Q_T)$ понимается такая функция $u(x, y, t) \in W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$, что для любой функции $\forall \eta(x, y, t) \in W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$, $\eta(x, y, T) = 0$, выполняется интегральное тождество

$$\int_{Q_T} \left[-\rho h \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} + D \Delta u \Delta \eta + (1-\nu) \left(2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \eta \right] dxdydt -$$
$$- \int_{\Omega} \rho h \varphi_1(x, y) \eta(x, y, 0) dxdy = \int_{Q_T} \upsilon(x, y, t) \eta dxdydt.$$

Приведем эту задачу к следующей задаче оптимального управления: найти минимум функционала

$$J_0(\upsilon) = \int_{\Omega} \left[u(x, y, T; \upsilon) - \chi_0(x, y) \right]^2 dxdy. \tag{5}$$

При ограничениях (1)–(3) $\upsilon(x, y, t)$ назовем управляющей функцией, $u = u(x, y, t; \upsilon)$ обозначим обобщенным решением задачи (1)–(3), соответствующим управлению $\upsilon(x, y, t)$. Классом допустимых управлений U_{ad} будем считать замкнутое множество из $L_2(Q_T)$.

Задачу (1)–(3), (5) регуляризуем следующим образом: вместо функционала (5) рассмотрим функционал

$$J_\alpha(\upsilon) = J_0(\upsilon) + \frac{\alpha}{2} \int_{Q_T} (\upsilon - \omega)^2 dxdydt, \tag{6}$$

где $\alpha > 0$ — положительное число, $\omega \in L_2(Q_T)$ — заданная функция.

Как и в работе [6], отметим, что при каждом фиксированном управлении $\upsilon(x, y, t)$ краевая задача (1)–(3) имеет единственное обобщенное решение из $W_2^{2,1}(Q_T)$.

В данной задаче выполняются все условия из работы [8]. Поэтому в новой задаче оптимального управления (1)–(3), (7) существует единственное оптимальное управление.

2. О разрешимости задачи (1)–(3), (5) в случае $U_{ad} = L_2(Q_T)$

Теперь рассмотрим задачу: при каких условиях

$$\inf_{\upsilon\in L_2(Q_T)} J_0(\upsilon) = 0. \tag{7}$$

Пусть $\psi_0(x, y)$ — заданная функция из $L_2(\Omega)$ такая, что

$$\int_\Omega \rho h\psi_0(x, y)u(x, y, T; \upsilon)dxdy = 0, \quad \forall\upsilon \in L_2(Q_T). \tag{8}$$

Выясним, будет ли отсюда следовать, что $\psi_0(x, y) \equiv 0$.

Введем функцию $W(x, y, t)$ как решение задачи:

$$\rho h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \Delta(D\Delta W) + (1-\nu)\left[2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}W\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}W\right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}W\right)\right] = 0 \tag{9}$$

$$(x, y, t) \in Q_T,$$

$$W(x, y, T) = 0, \frac{\partial W(x, y, T)}{\partial t} = -\psi_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &W(0, y, t) = 0, \frac{\partial W(0, y, t)}{\partial x} = 0, W(x, 0, t) = 0, \frac{\partial W(x, 0, t)}{\partial y} = 0, \ 0 \le x \le a, \ 0 \le t \le T, \\ &W(a, y, t) = 0, \frac{\partial W(a, y, t)}{\partial x} = 0, W(x, b, t) = 0, \frac{\partial W(x, b, t)}{\partial y} = 0, \ 0 \le y \le b, \ 0 \le t \le T. \end{aligned} \tag{11}$$

Как и в работе [7], покажем, что задача (9)–(11) имеет единственное обобщенное решение из класса $W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$.

В силу определения обобщенного решения задачи (1)–(3) имеем: при $t = 0$ выполняется условие $u(x, y, 0) = \varphi_0(x, y)$ и для произвольной функции $\eta(x, y, t) \in W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$, $\eta(x, y, T) = 0$, выполняется интегральное тождество

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T}\left[-\rho h\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t} + D\Delta u\Delta\eta + (1-\nu)\left(2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\eta\right]dxdydt - \\ &\qquad - \int_\Omega \rho h\varphi_1(x, y)\eta(x, y, 0)dxdy = \int_{Q_T}\upsilon(x, y, t)\eta dxdydt, \end{aligned} \tag{12}$$

а в силу определения обобщенного решения задачи (9)–(11) при $t = T$ выполняется условие $W(x, y, T) = 0$ и для произвольной функции $g(x, y, t) \in W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$ выполняется интегральное тождество

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T}\left\{-\rho h\frac{\partial W}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t} + D\Delta W\Delta g + (1-\nu)\left[2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right]W\right\}dxdydt - \\ &\qquad - \int_\Omega \rho h\psi_0(x, y)g(x, y, T)dxdy = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Теперь если в (12) вместо $\eta(x, y, t)$ подставить $W(x, y, t)$, а в (13) вместо $g(x, y, t)$ подставить $u(x, y, t; \upsilon)$ и из (12) вычесть (13), получим соотношение

$$-\int_{\Omega} \rho h \varphi_1(x, y) W(x, y, 0) dxdy + \int_{\Omega} \rho h \psi_0(x, y) u(x, y, T; \upsilon) dxdy +$$

$$+\int_{\Omega} \rho h \frac{\partial W(x, y, 0)}{\partial t} \varphi_0(x, y) dxdy = \int_{Q_T} \upsilon(x, y, t) W(x, y, t) dxdydt.$$

Если учесть условие (8), то

$$\int_{\Omega} \left[\rho h \frac{\partial W(x, y, 0)}{\partial t} \varphi_0(x, y) - \varphi_1(x, y) W(x, y, 0) dxdy \right] - \int_{Q_T} \upsilon(x, y, t) W(x, y, t) dxdydt = 0. \quad (14)$$

Если (14) записать для произвольных $\upsilon_1(x, y, t)$ и $\upsilon_2(x, y, t)$, то:

$$\int_{\Omega} \left[\rho h \frac{\partial W(x, y, 0)}{\partial t} \varphi_0(x, y) - \varphi_1(x, y) W(x, y, 0) dxdy \right] - \int_{Q_T} \upsilon_1(x, y, t) W(x, y, t) dxdydt = 0,$$

$$\int_{\Omega} \left[\rho h \frac{\partial W(x, y, 0)}{\partial t} \varphi_0(x, y) - \varphi_1(x, y) W(x, y, 0) dxdy \right] - \int_{Q_T} \upsilon_2(x, y, t) W(x, y, t) dxdydt = 0.$$

Из полученных двух равенств имеем

$$\int_{Q_T} (\upsilon_1 - \upsilon_2) W dxdydt = 0, \quad \forall \upsilon_1, \upsilon_2 \in L_2(Q_T).$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что $W(x, y, t) \equiv 0$ почти всюду в Q_T. Значит, в силу (10) $\psi_0(x, y) \equiv 0$.

Таким образом, в силу теоремы Хана–Банаха [8] получаем, что

$$\inf_{\upsilon \in L_2(Q_T)} J_0(\upsilon) = 0.$$

Если образ $L_2(Q_T)$ при отображение $\upsilon \to u(x, y, T; \upsilon)$ замкнут в $L_2(\Omega)$, то, возможно, существует такой элемент $\upsilon_0(x, y, t) \in L_2(Q_T)$, что

$$\min_{\upsilon \in L_2(Q_T)} J_0(\upsilon) = J_0(\upsilon_0) = 0.$$

3. Дифференцируемость функционала (6) и необходимое и достаточное условие оптимальности

Введем сопряженную задачу к задаче (1)–(3), (6) для заданного управления $\upsilon(x,y,t) \in L_2(Q_T)$:

$$\rho h \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \Delta(D\Delta\psi) + (1-\nu)\left[2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y}\psi \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\psi \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\psi \right) \right] = 0, \quad (15)$$

$$(x, y, t) \in Q_T,$$

$$\psi(x, y, T) = 0, \quad \rho h \frac{\partial \psi(x, y, T)}{\partial t} = -[u(x, y, T; \upsilon) - \chi_0(x, y)], \quad (x, y) \in \Omega, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &\psi(0, y, t) = \psi(a, y, t) = 0, \ \frac{\partial \psi(0, y, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(a, y, t)}{\partial x} = 0, \ 0 \le x \le a, \ 0 \le t \le T, \\ &\psi(x, 0, t) = \psi(x, b, t) = 0, \ \frac{\partial \psi(x, 0, t)}{\partial y} = \frac{\partial \psi(x, b, t)}{\partial y} = 0, \ 0 \le y \le b, \ 0 \le t \le T, \end{aligned} \quad (17)$$

где $u(x, y, t; \upsilon)$ — решение задачи (1)–(3) для заданного управления $\upsilon(x, y, t)$.

Из условий, наложенных на данные задачи (1)–(4), следует, что сопряженная задача имеет единственное обобщенное решение в пространстве $W_2^{2,1}(Q_T)$ [6].

Для вывода необходимого условия оптимальности в рассматриваемой задаче возьмем два произвольных допустимых управления: $\upsilon_0(x, y, t)$ и $\upsilon_0(x, y, t) + \delta\upsilon(x, y, t)$. Соответствующие решения задачи (1)–(3) обозначим $u(x, y, t; \upsilon_0)$ и $u(x, y, t; \upsilon_0 + \delta\upsilon) \equiv u(x, y, t; \upsilon_0) + \delta u(x, y, t)$. Тогда $\delta u(x, y, t) = u(x, y, t; \upsilon_0 + \delta\upsilon) - u(x, y, t; \upsilon_0)$ — решение следующей краевой задачи:

$$\rho h \frac{\partial^2 (\delta u)}{\partial t^2} + \Delta(D\Delta(\delta u)) + (1-\nu)\left[2\frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 (\delta u)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 (\delta u)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 (\delta u)}{\partial x^2}\right] = \delta\upsilon(x, y, t), \tag{18}$$

$$\delta u(x, y, 0) = 0, \quad \frac{\partial(\delta u(x, y, 0))}{\partial t} = 0, \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &\delta u(0, y, t) = \delta u(a, y, t) = 0, \frac{\partial(\delta u(0, y, t))}{\partial x} = \frac{\partial(\delta u(a, y, t))}{\partial x} = 0, \\ &\delta u(x, 0, t) = \delta u(x, b, t) = 0, \frac{\partial(\delta u(x, 0, t))}{\partial y} = \frac{\partial(\delta u(x, b, t))}{\partial y} = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Покажем, что

$$\|\delta u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \le C\|\delta\upsilon\|_{L_2(Q_T)}. \tag{21}$$

Применим метод Фаедо–Галеркина. Берем базис $\{\omega_i(x, y)\}_{i=1}^{\infty}$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$, причем система $\{\omega_i(x, y)\}_{i=1}^{\infty}$ ортонормирована в $L_2(\Omega)$, и приближенное решение задачи (18)–(20) ищем в виде

$$\delta u^N(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N} c_i^N(t)\omega_i(x, y)$$

из следующих равенств:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \rho h \frac{\partial^2 \delta u^N}{\partial t^2}\omega_j(x, y)dxdy + \int_\Omega D\Delta\delta u^N \Delta\omega_j(x, y)dxdy + \\ &+ (1-\nu)\int_\Omega \left(2\frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \delta u^N}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \delta u^N}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \delta u^N}{\partial x^2}\right)\omega_j(x, y)\,dxdy = \\ &= \int_\Omega \delta\upsilon(x, y, t)\omega_j(x, y)dxdy, \; 1 \le j \le N, \end{aligned} \tag{22}$$

$$c_i^N(0) = 0, \; \left.\frac{d}{dt}c_i^N(t)\right|_{t=0} = 0.$$

Обе части равенства (22) умножим на $\frac{d}{dt}c_j^N(t)$ и просуммируем по j от 1 до N. Тогда получим

$$\int_\Omega \rho h \frac{\partial^2 \delta u^N}{\partial t^2}\frac{\partial \delta u^N}{\partial t}dxdy + \int_\Omega D\Delta\delta u^N \Delta\frac{\partial \delta u^N}{\partial t}dxdy +$$

$$+(1-\nu)\int_{\Omega}\left(2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\delta u^N}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2\delta u^N}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2\delta u^N}{\partial x^2}\right)\frac{\partial\delta u^N}{\partial t}dxdy=$$

$$=\int_{\Omega}\upsilon(x,y,t)\frac{\partial\delta u^N}{\partial t}dxdy.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left[\rho h\left(\frac{\partial\delta u^N}{\partial t}\right)^2+D(\Delta\delta u^N)^2\right]dxdy=$$

$$=-(1-\nu)\int_{\Omega}\left(2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\delta u^N}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2\delta u^N}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2\delta u^N}{\partial x^2}\right)\frac{\partial\delta u^N}{\partial t}dxdy+$$

$$+\int_{\Omega}\delta\upsilon(x,y,t)\frac{\partial\delta u^N}{\partial t}dxdy.$$

Если проинтегрировать это равенство по t, при заданных условиях на данные задачи получим следующее неравенство:

$$\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial\delta u^N(x,y,t)}{\partial t}\right)^2+(\Delta\delta u^N(x,y,t))^2\right]dxdy\le C+C\int_0^t\int_{\Omega}\left[(\delta u^N(x,y,s))^2+\right.$$

$$+\left(\frac{\partial\delta u^N(x,y,s)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\delta u^N(x,y,s)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\delta u^N(x,y,s)}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\delta u^N(x,y,s)}{\partial x^2}\right)^2+$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2\delta u^N(x,y,s)}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\delta u^N(x,y,s)}{\partial y^2}\right)^2\right]dxdyds+\int_0^t\int_{\Omega}|\delta\upsilon|^2dxdyds,\quad\forall t\in[0,T],$$

где C — различные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и допустимых управлений.

В силу эквивалентности норм в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ имеем

$$\int_{\Omega}\left[(\delta u^N(x,y,t))^2+\left(\frac{\partial\delta u^N(x,y,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\delta u^N(x,y,t)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\delta u^N(x,y,t)}{\partial y}\right)^2+\right.$$

$$\left.+(\Delta\delta u^N(x,y,t))^2\right]dxdy\le C+C\int_0^t\int_{\Omega}\left[(\delta u^N(x,y,s))^2+\left(\frac{\partial\delta u^N(x,y,s)}{\partial t}\right)^2+\right.$$

$$+\left(\frac{\partial\delta u^N(x,y,s)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\delta u^N(x,y,s)}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\delta u^N(x,y,s)}{\partial x^2}\right)^2+\qquad(23)$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2\delta u^N(x,y,s)}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\delta u^N(x,y,s)}{\partial y^2}\right)^2\right]dxdyds+C\int_0^t\int_{\Omega}|\delta\upsilon|^2dxdyds.$$

В силу известного неравенства [10]

$$\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial^2\delta u^N}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\delta u^N}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\delta u^N}{\partial y^2}\right)^2\right]dxdy\le\int_{\Omega}\left[\frac{\partial^2\delta u^N}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\delta u^N}{\partial y^2}\right]^2dxdy,$$

из неравенства (23) получим

$$\int_{\Omega}\left[(\delta u^N(x,y,t))^2+\left(\frac{\partial\delta u^N(x,y,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\delta u^N(x,y,t)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\delta u^N(x,y,t)}{\partial y}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2\delta u^N(x,y,t)}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\delta u^N(x,y,t)}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\delta u^N(x,y,t)}{\partial y^2}\right)^2\right]dxdy\le C+$$

$$+C\int_0^t\int_{\Omega}\left[(\delta u^N(x,y,s))^2+\left(\frac{\partial\delta u^N(x,y,s)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\delta u^N(x,y,s)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\delta u^N(x,y,s)}{\partial y}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2\delta u^N(x,y,s)}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\delta u^N(x,y,s)}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\delta u^N(x,y,s)}{\partial y^2}\right)^2\right]dxdydt+C\int_0^T\int_{\Omega}|\delta\upsilon|^2\,dxdydt.$$

Применяя лемму Гронуолла, получаем

$$\int_{\Omega}\left[(\delta u^N(x,y,t))^2+\left(\frac{\partial\delta u^N(x,y,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\delta u^N(x,y,t)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\delta u^N(x,y,t)}{\partial y}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2\delta u^N(x,y,t)}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\delta u^N(x,y,t)}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\delta u^N(x,y,t)}{\partial y^2}\right)^2\right]\times \tag{24}$$

$$\times\,dxdy\le C\|\delta\upsilon\|^2_{L_2(Q_T)},\quad \forall t\in[0,T].$$

Отсюда, интегрируя по t, имеем

$$\left\|\delta u^N\right\|^2_{W_2^{2,1}(Q_T)}\le C\|\delta\upsilon\|^2_{L_2(Q_T)}. \tag{25}$$

Из этого неравенства следует, что из последовательности $\{\delta u^N(x,y,t)\}$ можно выделить такую подпоследовательность (которую тоже обозначим $\{\delta u^N(x,y,t)\}$, что она слабо сходится в $W_2^{2,1}(Q_T)$ к некоторой функции $\delta u(x,y,t)$ при $N\to\infty$. Тогда в силу слабой полунепрерывности снизу норм в гильбертовом пространстве из (25) следует оценка (21).

Вычислим приращение функционала $J_\alpha(\upsilon)$:

$$\Delta J_\alpha(\upsilon)=J_\alpha(\upsilon+\delta\upsilon)-J_\alpha(\upsilon)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\{[u(x,y,T;\upsilon+\delta\upsilon)-\chi_0(x,y)]^2-[u(x,y,T;\upsilon)-\chi_0(x,y)]^2\}\,dxdy+$$

$$+\frac{\alpha}{2}\left(\|\upsilon+\delta\upsilon-\omega\|^2_{L_2(Q_T)}-\|\upsilon-\omega\|^2_{L_2(Q_T)}\right)=$$

$$=\int_{\Omega}[u(x,y,T;\upsilon)-\chi_0(x,y)]\,\delta u(x,y,T)dxdy+\alpha\int_{Q_T}(\upsilon-\omega)\delta\upsilon dxdydt+R, \tag{26}$$

где $R=\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\delta u(x,y,T)|^2\,dxdy+\frac{\alpha}{2}\int_{Q_T}|\delta\upsilon|^2\,dxdydt$ — остаточный член.

Поскольку δu — обобщенное решение задачи (18)–(20), для произвольной функции $\eta(x, y, t) \in W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$, $\eta(x, y, T) = 0$, имеем

$$\int_{Q_T} \left\{ -\rho h \frac{\partial \delta u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + D\Delta \delta u \Delta \eta + (1-\nu) \left[2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} \right] \eta \right\} \times$$
$$\times\, dxdydt - \int_{Q_T} \delta \upsilon(x, y, t)\, \eta\, dxdydt = 0. \tag{27}$$

Так как $\psi(x, y, t)$ — решение сопряженной задачи (15)–(17), для любой функции $g(x, y, t) \in W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$, $g(x, y, 0) = 0$, получим

$$\int_{Q_T} \left\{ -\rho h \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial t} + D\Delta \psi \Delta g + (1-\nu) \left[2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right] \psi \right\} \times$$
$$\times\, dxdydt + \int_{\Omega} \rho h \frac{\partial \psi(x, y, T)}{\partial t} g(x, y, T) dxdy = 0. \tag{28}$$

Если в (27) вместо $\eta(x, y, t)$ подставить $\psi(x, y, t)$, а в (28) вместо $g(x, y, t)$ подставить $\delta u(x, y, t)$ и из (27) вычесть (28), учитывая формулу (26), получим

$$\Delta J_\alpha(\upsilon) = \int_{Q_T} [-\psi + \alpha(\upsilon_0 - \omega)]\, \delta \upsilon dxdydt + R. \tag{29}$$

Поскольку вложение $W_2^{2,1}(Q_T) \to L_2(\Omega)$ ограничено, справедливо неравенство

$$\| \delta u(x, y, T) \|_{L_2(\Omega)}^2 \le C \| \delta u \|_{W_2^{2,1}(Q_T)}^2.$$

Отсюда и из оценки (21) имеем

$$\| \delta u(x, y, T) \|_{L_2(\Omega)}^2 \le C \| \delta \upsilon \|_{L_2(Q_T)}^2. \tag{30}$$

Теперь, учитывая оценку (30), оценим остаточный член R:

$$0 \le R = \frac{1}{2} \int_{Q_T} |\delta u(x, y, T)|^2 dxdy + \frac{\alpha}{2} \int_{Q_T} |\delta \upsilon(x, y, t)|^2 dxdydt \le C \| \delta \upsilon \|_{L_2(Q_T)}^2.$$

Тогда из (29) получим, что градиент функционала имеет вид

$$\operatorname{grad} J_\alpha(\upsilon) = -\psi + \alpha(\upsilon - \omega).$$

Таким образом, в силу известной теоремы из [11], для того чтобы управление $\upsilon_0(x, y, t)$ было оптимальным, необходимо выполнение неравенства

$$\int_{Q_T} [-\psi + \alpha(\upsilon - \omega)]\, \delta(\upsilon - \upsilon_0)\, dxdydt \ge 0, \quad \forall \upsilon \in U_{ad}. \tag{31}$$

Поскольку функционал (6) строго выпуклый в U_{ad}, а задача (1)–(3) линейная, условие (31) является и достаточным условием оптимальности.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть выполняются вышеналоженные условия на данные задачи (1)–(3), (6). Тогда для оптимальности управления $\upsilon_0(x, y, t)$ в этой задаче необходимо и достаточно выполнение неравенства (31).

Г.Ф. Гулієв, Х.І. Сейфуллаєва

ПРО ВИЗНАЧЕННЯ ПРАВОЇ ЧАСТИНИ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ ПРУЖНОЇ ПЛАСТИНИ

Розглянуто обернену задачу з визначення правої частини лінійного рівняння коливань пружної пластини. Задачу зведено до задачі оптимального керування, досліджено функціональну диференційовність і отримано необхідні і достатні умови оптимальності.

H.F. Guliyev, Kh.I. Seyfullayeva

ON DETERMINATION OF THE RIGHT PART OF LINEAR EQUATION OF ELASTIC PLATE VIBRATION

The inverse problem of determining the right part of linear equation of elastic plate vibration is considered. The problem is reduced to the problem of optimal control, the differentiallity of the functional is studied, necessary and sufficient optimality conditions are obtained.

1. *Комков В.* Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. — М. : Мир, 1975. — 160 с.
2. *Арман Ж.-Л.П.* Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций. — М. : Мир, 1977, — 144 с.
3. *Латтес Р, Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. — М. : Наука, 1970. — 280 с.
4. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск : Сибирские научные издания, 2009. — 457 с.
5. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. — М. : Наука, 1988. — 288 с.
6. *Gasimov Y.S.* On a shape design problem for one spectral functional // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2013. — **21**, N. 5, — P. 629–637.
7. *Guliyev H.F., Seyfullayeva Kh. I.* On an optimal control problem for the vibration equation of the thin plate // News of Baku State University. — 2013. — N 3. — P. 64–73.
8. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М. : Мир, 1972. — 416 с.
9. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М. : Наука, 1981. — 544 с.
10. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973. — 408 с.
11. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач — М. : Наука, 1981. — 399 с.

Получено 22.11.2016