УДК 519.6:621.391

Ф.Г. Гаращенко, О.С. Дегтярь

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ПСЕВДОИНВЕРСИИ И РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В АДАПТИВНЫХ МОДЕЛЯХ СТРУКТУРНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

Введение

С уверенностью можно сказать, что решение линейных систем — одна из наиболее распространенных задач вычислительной математики. Множество задач, связанных с цифровой обработкой информации, сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), например задачи распознавания и идентификации, классификации, адаптивного контроля, аппроксимации сигналов и т.д. При этом следует учитывать, что и в прикладных задачах исследователь часто имеет дело с приближенно заданными данными, для которых вычислительные погрешности и распределение вероятностей случайной величины (экспериментальных данных) неизвестны. Дополнительно к задаче построения математической модели, описывающей процесс, возникают проблемы анализа устойчивости решений, оценки погрешностей и т.д.

В последнее время особого внимания заслуживают методы, ориентированные на работу в режиме реального времени. Для обработки динамических потоков данных важны свойства высокого быстродействия и адаптации. В данной статье предлагаются методы адаптивной обработки данных и их структурного представления, основанные на использовании математического аппарата регуляризации Тихонова, а значит, нацеленные на работу с приближенно заданными данными, поступающими в динамике.

Настоящая статья посвящена методам динамической обработки данных, которые способствуют эффективному решению задач идентификации, распознавания и классификации информации, поступающей в режиме реального времени. Для представления данных в заданных структурных формах предлагаются итерационные процедуры адаптивной коррекции вектора неизвестных параметров, основанные на прямой и двойственной задачах регуляризации Тихонова. Проводится анализ сходимости предложенных схем, в частности, получена оценка $\{c, B, \Phi_m, 1, N\}$-сходимости в классе эллипсоидов $G_0 = \{E_c(0, B)\}$.

Прямая и двойственная задачи регуляризации. Статический случай

Рассмотрим задачу представления данных в структурном виде. Она сводится к поиску неизвестных параметров $\alpha^{(m)}$ СЛАУ

$$\psi^{(m)} = \Phi^{(m)}\alpha^{(m)}. \qquad (1)$$

Здесь $\Phi^{(m)}$ — матрица n известных m-мерных сигналов размерности $m \times n$ (заданные структурные формы), $\psi^{(m)} = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m)^{\mathrm{T}}$ — известный вектор размерности m, который необходимо представить в структурном виде, $\alpha^{(m)} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^{\mathrm{T}}$ — вектор неизвестных параметров, m — текущий шаг алгоритма, $m = 1, 2, ..., N$ (временная переменная, когда речь идет о поступлении данных в динамике).

В большинстве случаев исходная система не имеет точных решений. Такая ситуация возникает, когда матрица $\Phi^{(m)}$ — квадратная особая, для которой не существует обратной, или же прямоугольная, т.е. $m \neq n.$ Задача поиска решения СЛАУ естественным образом сводится к поиску приближенного решения, минимального по норме (нормального псевдорешения). Таким образом, с помощью метода наименьших квадратов находятся псевдорешения системы, т.е. такие $\alpha^{(m)}$, при которых минимизируется евклидова норма невязки $\| \Phi^{(m)}\alpha^{(m)} - \psi^{(m)} \|^2$. При этом задача представления данных в заданных структурных формах сводится к задаче псевдообращения матрицы $\Phi^{(m)}$.

Однако в прикладных задачах, где высока вероятность погрешности исходной информации, неизвестные параметры, найденные как нормальное псевдорешение, не всегда удовлетворяют исследователя. Они дают минимальную невязку на тренировочной выборке (тех данных, которые учитывались при построении модели), однако может быть значительная погрешность и при поступлении новых наблюдений. Такой случай можно трактовать как переобучение модели.

Таким образом, когда речь идет о распознавании более общих тенденций в зашумленных процессах, использование псевдообращения при $\lambda \to 0$ не всегда приводят к желаемым результатам. Для задач такого типа предлагается использование метода регуляризации Тихонова, который заключается во введении в решение параметра регуляризации [1]. Минимизируя функцию $\| \psi^{(m)} - \Phi^{(m)}\alpha^{(m)} \|^2 + \lambda * \| \alpha^{(m)} \|^2 \to \min\limits_{\alpha}$, можно получить регуляризированное решение, зависящее от $\lambda *$. Продифференцировав по $\alpha^{(m)}$, окончательно получим

$$\alpha^{(m)} = (\Phi^{(m)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m)} + \lambda * I_n)^{-1}\Phi^{(m)^{\mathrm{T}}}\psi^{(m)}. \tag{2}$$

Следует обратить внимание, что определение псевдорешения по Муру–Пенроузу является предельным случаем выражения (2). Параметр λ^* — параметр регуляризации. Наиболее часто употребляются методы выбора параметра регуляризации: кросс-валидации и L-кривой (они подробно описаны в [2, 3]).

Рассмотрим случай, когда задана возмущенная система $\tilde{\psi}^{(m)} = \tilde{\Phi}^{(m)}\alpha^{(m)}$, для которой погрешность задания входной информации известна. Пусть погрешность определяется согласно формуле

$$\| \tilde{\Phi}^{(m)} - \Phi^{(m)} \| < \delta, \ \| \tilde{\psi}^{(m)} - \psi^{(m)} \| < \delta,$$

тогда псевдорешение СЛАУ (1) можно найти с погрешностью порядка $\sqrt{\delta}$. Эта оценка непосредственно следует из теоремы, описанной в работе [4].

Приведенные выше результаты относятся к прямой задаче нахождения регуляризированного решения. В этом случае для нахождения n-мерного вектора не-

ISSN 0572-2691

известных параметров $\alpha^{(m)}$ приходится решать систему n линейных уравнений с n неизвестными. Вычислительная сложность такой задачи — $O(n^3)$. В результате аппроксимированные данные восстанавливаются по формуле

$$f(\alpha^{(m)}) = \left\langle \Phi^{(m)},\ \alpha^{(m)} \right\rangle = \Phi^{(m)}({\Phi^{(m)}}^{\mathrm{T}}\Phi^{(m)} + \lambda I_n)^{-1}{\Phi^{(m)}}^{\mathrm{T}}\psi^{(m)}.$$

Наряду с прямой задачей предлагается двойственная к задаче нахождения регуляризированного решения системы (1). Она заключается в переходе к задаче поиска m-мерного вектора неизвестных параметров $w^{(m)}$. Вывод соответствующих формул подробно описан в работе [5]. Окончательно выражение для вектора неизвестных параметров $w^{(m)}$ на m-м шаге имеет вид

$$w^{(m)} = (G^{(m)} + \lambda I_m)^{-1}\psi^{(m)}, \tag{3}$$

где $G^{(m)} = \Phi^{(m)}{\Phi^{(m)}}^{\mathrm{T}}$ (матрица Грамма составлена из вектор-строк матрицы $\Phi^{(m)}$), I_m — единичная матрица размерности $m \times m$.

Нахождение вектора неизвестных параметров $w^{(m)}$ сводится к решению m линейных уравнений с m неизвестными. Результирующая аппроксимация имеет вид

$$g({\Phi^{(m)}}^{\mathrm{T}}, \alpha^{(m)}(w^{(m)})) = \left\langle {\Phi^{(m)}}^{\mathrm{T}},\ \alpha^{(m)}(w^{(m)}) \right\rangle =$$

$$= \left\langle {\Phi^{(m)}}^{\mathrm{T}},\ \sum_{i=1}^{n} w_i^{(m)}\varphi_i^{(m)} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} w_i^{(m)} \left\langle \Phi^{(m)},\ \varphi_i^{(m)} \right\rangle.$$

Вычислительная сложность двойственной задачи — $O(m^3)$. Таким образом, в случае недоопределенной системы использование двойственной задачи существенно сокращает количество операций и ускоряет вычисления, что особенно важно при работе с динамическими потоками данных.

Из найденного решения двойственной задачи легко восстанавливается исходный вектор неизвестных параметров из соотношения $\alpha^{(m)} = {\Phi^{(m)}}^{\mathrm{T}} w^{(m)}$.

Динамическая модель нахождения аппроксимации с использованием прямой и двойственной задач регуляризации

Когда речь идет о поступлении данных в режиме реального времени, естественно возникает вопрос, как изменится псевдообратная матрица при расширении исходной матрицы $\Phi^{(m)}$ на одну строку. При этом увеличение размерности может происходить как при поступлении новых наблюдений, так и при расширении системы базисных функций (т.е. увеличении точности аппроксимации).

Матрица $\Phi^{(m+1)}$ и вектор $\psi^{(m+1)}$ при поступлении новых наблюдений на ($m+1$)-м шаге принимают вид

$$\Phi^{(m+1)} = \begin{pmatrix} \Phi^{(m)} \\ \varphi^{(m+1)\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \Phi^{(m)} & \\ \varphi_1^{(m+1)} & \varphi_2^{(m+1)} & \ldots\ \varphi_n^{(m+1)} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\psi^{(m+1)} = \begin{pmatrix} \psi^{(m)} \\ x_{m+1} \end{pmatrix}.$$

Тогда регуляризированное решение системы $\Phi^{(m+1)}\alpha^{(m+1)}=\psi^{(m+1)}$, построенной с учетом новых данных, находится по формуле

$$\alpha^{(m+1)}=(\Phi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m+1)}+\lambda * I_n)^{-1}\Phi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}\psi^{(m+1)}.$$

В случае двойственной задачи вектор неизвестных параметров выразим следующим образом:

$$w^{(m+1)}=(G^{(m+1)}+\lambda I_{m+1})^{-1}\psi^{(m+1)},$$

где $G^{(m+1)}$ — матрица Грамма, составленная из вектор-строк матрицы $\Phi^{(m+1)}$.

Для коррекции вектора неизвестных параметров при поступлении новых экспериментальных данных справедливы итерационные схемы, которые приводятся в теоремах 1, 2.

Теорема 1. При добавлении к матрице $\Phi^{(m)}$ одной строки снизу коррекция вектора неизвестных параметров происходит по итерационной схеме

$$\alpha^{(m+1)}=Q^{(m)}(\alpha^{(m)}+c^{(m)}),\quad m=1,\ 2,\ ...,\ N, \tag{5}$$

где начальные данные вычисляются по формуле

$$\alpha^{(1)}=\frac{\varphi^{(1)\mathrm{T}}\psi^{(1)}}{\varphi^{(1)\mathrm{T}}\varphi^{(1)}+\lambda}.$$

Для доказательства теоремы необходимо выразить n-мерный вектор неизвестных параметров на $(m+1)$-й итерации через соответствующий n-мерный вектор на m-й итерации.

На m-й итерации вектор неизвестных параметров $\alpha^{(m)}$ вычисляется по формуле (2), на $(m+1)$-й итерации вектор $\alpha^{(m+1)}$ — по формуле

$$\alpha^{(m+1)}=(\Phi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m+1)}+\lambda I_n)^{-1}\Phi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}\psi^{(m+1)}. \tag{6}$$

Матрицу $(\Phi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m+1)}+\lambda I_n)$ в соответствии с (4) можно расписать следующим образом:

$$(\Phi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m+1)}+\lambda I_n)=(\Phi^{(m)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m)}+\lambda I_n+\varphi^{(m+1)}\varphi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}).$$

Тогда (6) преобразуется в

$$\alpha^{(m+1)}=(\Phi^{(m)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m)}+\lambda I_n+$$

$$+\varphi^{(m+1)}\varphi^{(m+1)^{\mathrm{T}}})^{-1}\begin{pmatrix}\Phi^{(m)}\\ \varphi^{(m+1)T}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\psi^{(m)}\\ x_{m+1}\end{pmatrix}.$$

Согласно формуле Шермана–Моррисона [6] $(\Phi^{(m)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m)}+\lambda I_n+\varphi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}\varphi^{(m+1)})^{-1}$ можно записать

$$(\Phi^{(m)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m)}+\lambda I_n+\varphi^{(m+1)}\varphi^{(m+1)^{\mathrm{T}}})^{-1}=(\Phi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m+1)}+\lambda I_n)^{-1}-$$

$$-\frac{(\Phi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m+1)}+\lambda I_n)^{-1}\varphi^{(m+1)}\varphi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}(\Phi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m+1)}+\lambda I_n)^{-1}}{1+\varphi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}(\Phi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m+1)}+\lambda I_n)^{-1}\varphi^{(m+1)}}.$$

Вектор $\alpha^{(m+1)}$ получим из формулы

$$\alpha^{(m+1)}=\left[(\Phi^{(m)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m)}+\lambda I_n)^{-1}-\right.$$

$$\left.-\frac{(\Phi^{(m)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m)}+\lambda I_n)^{-1}\varphi^{(m+1)}\varphi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}(\Phi^{(m)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m)}+\lambda I_n)^{-1}}{1+\varphi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}(\Phi^{(m)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m)}+\lambda I_n)^{-1}\varphi^{(m+1)}}\right]\times$$

$$\times(\Phi^{(m)^{\mathrm{T}}}\psi^{(m)}+\varphi^{(m+1)}x_{m+1})=(\Phi^{(m)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m)}+\lambda I_n)^{-1}\Phi^{(m)^{\mathrm{T}}}\psi^{(m)}+(\Phi^{(m)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m)}+\lambda I_n)^{-1}\times$$

$$\times\varphi^{(m+1)}x_{m+1}-\frac{(\Phi^{(m)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m)}+\lambda I_n)^{-1}\varphi^{(m+1)}\varphi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}(\Phi^{(m)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m)}+\lambda I_n)^{-1}\Phi^{(m)^{\mathrm{T}}}\psi^{(m)}}{1+\varphi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}(\Phi^{(m)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m)}+\lambda I_n)^{-1}\varphi^{(m+1)}}-$$

$$-\frac{(\Phi^{(m)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m)}+\lambda I_n)^{-1}\varphi^{(m+1)}\varphi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}(\Phi^{(m)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m)}+\lambda I_n)^{-1}\varphi^{(m+1)}x_{m+1}}{1+\varphi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}(\Phi^{(m)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m)}+\lambda I_n)^{-1}\varphi^{(m+1)}}.$$

Обозначим $(\Phi^{(m)^{\mathrm{T}}}\Phi^{(m)}+\lambda I_n)=\Gamma'^{(m)}$. Тогда

$$\alpha^{(m+1)}=\alpha^{(m)}+(\Gamma'^{(m)})^{-1}\varphi^{(m+1)}x_{m+1}-\frac{(\Gamma'^{(m)})^{-1}\varphi^{(m+1)}\varphi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}\alpha^{(m)}}{1+\varphi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}(\Gamma'^{(m)})^{-1}\varphi^{(m+1)}}-$$

$$-\frac{(\Gamma'^{(m)})^{-1}\varphi^{(m+1)}\varphi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}(\Gamma'^{(m)})^{-1}\varphi^{(m+1)}x_{m+1}}{1+\varphi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}(\Gamma'^{(m)})^{-1}\varphi^{(m+1)}}=\left[I_n-\frac{(\Gamma'^{(m)})^{-1}\varphi^{(m+1)}\varphi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}}{1+\varphi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}(\Gamma'^{(m)})^{-1}\varphi^{(m+1)}}\right]\times$$

$$\times\alpha^{(m)}+\left[I_n-\frac{(\Gamma'^{(m)})^{-1}\varphi^{(m+1)}\varphi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}}{1+\varphi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}(\Gamma'^{(m)})^{-1}\varphi^{(m+1)}}\right](\Gamma'^{(m)})^{-1}\varphi^{(m+1)}x_{m+1}.$$

Для удобства вычислений выражение для $\alpha^{(m+1)}$ окончательно можно переписать в виде

$$\alpha^{(m+1)}=\left[I_n-\frac{(\Gamma'^{(m)})^{-1}\varphi^{(m+1)}\varphi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}}{1+\varphi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}(\Gamma'^{(m)})^{-1}\varphi^{(m+1)}}\right](\alpha^{(m)}+(\Gamma'^{(m)})^{-1}\varphi^{(m+1)}x_{m+1}).$$

Следовательно, имеем итерационную схему (5), где параметры $Q^{(m)}$, $c^{(m)}$ получим из формул

$$Q^{(m)} = I_n - \frac{(\Gamma'^{(m)})^{-1} \varphi^{(m+1)} \varphi^{(m+1)^{\mathrm{T}}}}{1 + \varphi^{(m+1)^{\mathrm{T}}} (\Gamma'^{(m)})^{-1} \varphi^{(m+1)}},$$

$$c^{(m)} = (\Gamma'^{(m)})^{-1} \varphi^{(m+1)} x_{m+1},$$

что и доказывает теорему.

Теорема 2. Для коррекции вектора неизвестных параметров при последовательном поступлении экспериментальных данных справедлива итерационная схема

$$w^{(m+1)} = \begin{pmatrix} P^{(m)} w^{(m)} + c^{(m)} \\ p^{(m)} \end{pmatrix}, \quad m = 1, 2, ..., N, \tag{7}$$

где начальные данные задаются такими:

$$w^{(1)} = \frac{\psi^{(1)}}{\varphi^{(1)T} \varphi^{(1)} + \lambda}.$$

Доказательство теоремы основано на рекурсивном вычислении квадратной матрицы $\Gamma = (G + \lambda I)$, которая на m-м шаге имеет вид $(m \times m)$-мерной квадратной матрицы

$$\Gamma^{(m)} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_k^i \varphi_k^j, & i \neq j,\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, m}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (\varphi_k^i)^2 + \lambda, & i = j,\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, m}. \end{cases}$$

При поступлении $(m+1)$-го наблюдения матрица $\Gamma^{(m+1)}$ принимает вид

$$\Gamma^{(m+1)} = \begin{pmatrix} \Gamma^{(m)} & \gamma^{(m+1)} \\ \gamma^{(m+1)^{\mathrm{T}}} & \delta + \lambda \end{pmatrix}.$$

Используя формулы для нахождения матрицы, обратной матрице, представленной в блочном виде [7], получим выражение для матрицы $(\Gamma^{(m+1)})^{-1}$:

$$(\Gamma^{(m+1)})^{-1} = \begin{pmatrix} (\Gamma^{(m)})^{-1} + \dfrac{(\Gamma^{(m)})^{-1} \gamma^{(m+1)} \gamma^{(m+1)^{\mathrm{T}}} (\Gamma^{(m)})^{-1}}{\mu} & -\dfrac{(\Gamma^{(m)})^{-1} \gamma^{(m+1)}}{\mu} \\ -\left(\dfrac{(\Gamma^{(m)})^{-1} \gamma^{(m+1)}}{\mu} \right)^{\mathrm{T}} & \dfrac{1}{\mu} \end{pmatrix},$$

где $\mu = \delta + \lambda - \gamma^{(m+1)T} (\Gamma^{(m)})^{-1} \gamma^{(m+1)}$ — дополнение Шура матрицы $\Gamma^{(m)}$ к матрице $\Gamma^{(m+1)}$ [8].

 ISSN 0572-2691

Подставив ее в (7), получим

$$\begin{pmatrix} w^{(m+1)} \\ w' \end{pmatrix} = (\Gamma^{(m+1)})^{-1} \begin{pmatrix} \psi^{(m)} \\ x_{m+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\Gamma^{(m)})^{-1}\psi^{(m)} + \dfrac{(\Gamma^{(m)})^{-1}\gamma^{(m+1)}\gamma^{(m+1)\mathrm{T}}(\Gamma^{(m)})^{-1}}{\mu}\psi^{(m)} - \dfrac{(\Gamma^{(m)})^{-1}\gamma^{(m+1)}}{\mu}x_{m+1} \\ -\left(\dfrac{(\Gamma^{(m)})^{-1}\gamma^{(m+1)}}{\mu}\right)^{\mathrm{T}}\psi^{(m)} + \dfrac{x_{m+1}}{\mu} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, имеет место итерационная схема

$$\begin{pmatrix} w^{(m+1)} \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^{(m)}\left(I_m + \dfrac{(\Gamma^{(m)})^{-1}\gamma^{(m+1)}\gamma^{(m+1)\mathrm{T}}}{\mu}\right) - \dfrac{(\Gamma^{(m)})^{-1}\gamma^{(m+1)}}{\mu}x_{m+1} \\ -\left(\dfrac{(\Gamma^{(m)})^{-1}\gamma^{(m+1)}}{\mu}\right)^{\mathrm{T}}\psi^{(m)} + \dfrac{x_{m+1}}{\mu} \end{pmatrix}.$$

Окончательно получим

$$P^{(m)} = I_m + \frac{(\Gamma^{(m)})^{-1}\gamma^{(m+1)}\gamma^{(m+1)\mathrm{T}}}{\mu},$$

$$c^{(m)} = -\frac{(\Gamma^{(m)})^{-1}\gamma^{(m+1)}}{\mu}x_{m+1},$$

$$p^{(m)} = -\left(\frac{(\Gamma^{(m)})^{-1}\gamma^{(m+1)}}{\mu}\right)^{\mathrm{T}}\psi^{(m)} + \frac{x_{m+1}}{\mu},$$

что доказывает теорему.

Исследование сходимости разработанных схем

Для общих методов анализа сходимости разработанных итерационных схем рассмотрим систему в виде

$$\alpha^{(m+1)} = A^{(m)}\alpha^{(m)} + b^{(m)},\ m = 1,\ 2, \ldots, N, \tag{8}$$

где $\alpha^{(m)} \in R^n$ — искомый вектор неизвестных параметров на m-м шаге, $A^{(m)}$ — $(n \times n)$-мерные невырожденные матрицы, $b^{(m)} \in R^n$.

Пусть $G_0 = E_c(\alpha^c, B)$ — множество начальных условий, которое задается в виде эллипсоида радиуса c с центром в точке α^c, где B — положительно-определенная симметричная матрица размерности $n \times n$, ограничения на траектории системы задаются в виде параллелепипеда

$$\Phi_m = \bigcap_{s=1}^{k_m} \{\alpha \in R^n : \left| l_{sm}^{\mathrm{T}}\alpha \right| \le 1\},\ m = 1, 2, \ldots, N,\ l_{sm} \in R^n,$$

где l_{sm} — n-мерные векторы, k_m — количество фазовых ограничений на m-м шаге.

Определение 1. Дискретную итерационную процедуру (8) будем называть $\{G_0, \Phi_m, 1, N\}$-сходящейся, если для любых начальных данных $\alpha^{(1)} \in G_0$ соответствующие решения системы (8) $\alpha^{(m)}(\alpha^{(1)}) \in \Phi_m$, $m = \overline{2, N}$.

Определение 2. Дискретную итерационную процедуру (8) будем называть $\{c, B, \Phi_m, 1, N\}$-сходящейся, если для любых исходных данных $\alpha^{(1)} \in G_0 = E_c(\alpha^c, B)$ соответствующие решения системы (8) $\alpha^{(m)}(\alpha^{(1)}) \in \Phi_m$, $m = \overline{2, N}$.

Решение (8) можно записать в виде $\alpha^{(m)} = Q^{(m)}\alpha^{(1)} + g^{(m)}$, $m = \overline{2, N}$, где $Q^{(m)} = A^{(m-1)} \ldots A^{(1)}$, $g^{(m)} = \sum_{j=1}^{m-1} A^{(m-1)}A^{(m-2)} \ldots A^{(j)}b^{(j)} + b^{(m)}$, $g^{(m)} = \sum_{j=1}^{m-1} A^{(m-1)}A^{(m-2)} \ldots$ $\ldots A^{(j)}b^{(j)} + b^{(m)}$, $m = \overline{2, N}$, $Q^{(1)} = I$, $g^{(1)} = 0$. Справедлива оценка (9), основанная на результатах, полученных в работе [9] (для доказательства необходимо выбрать функцию Ляпунова в виде $V^{(m)}(\alpha) = 1 - c + \left\| B^{1/2} Q^{(m)^{-1}} (\alpha - g^{(m)}) \right\|$, $m = 1, 2, \ldots, N$).

Критерий 1. Для дискретной итерационной процедуры (9) оптимальная оценка $\{c, B, \Phi_m, 1, N\}$-сходимости в классе эллипсоидов $G_0 = \{E_c(0, B)\}$ такова:

$$c_{\text{opt}} = \min_{m=\overline{1,N}} \min_{s=\overline{1,k_m}} \frac{1 - \left| l_{sm}^{\mathrm{T}} g^{(m)} \right|}{\sqrt{l_{sm}^{\mathrm{T}} Q^{(m)\mathrm{T}} B^{-1} Q^{(m)} l_{sm}}}. \tag{9}$$

Заключение

Разработаны итерационные схемы для динамической обработки данных в целях их аппроксимации в заданных структурных формах. Такие схемы основываются на использовании математического аппарата регуляризации и нацелены на работу с приближенно заданными данными с гарантированной точностью аппроксимации.

На основе прямой и двойственной задач регуляризации Тихонова в статическом случае разработаны итерационные процедуры, позволяющие корректировать вектор неизвестных параметров по мере поступлений новых наблюдений. Они представлены в виде дискретных итерационных схем, анализ сходимости которых можно проводить по одному из известных методов. В частности, в настоящей работе получена оценка сходимости с начальным приближением в классе эллипсоидов.

Разработанные алгоритмы могут эффективно применяться к задачам распознавания, идентификации и классификации, которые возникают при решении задач в различных прикладных областях.

Ф.Г. Гаращенко, О.С. Дегтяр

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ ПСЕВДОІНВЕРСІЇ ТА РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ В АДАПТИВНИХ МОДЕЛЯХ СТРУКТУРНОГО ЗОБРАЖЕННЯ ТА ОБРОБКИ ДАНИХ

Наведено математичні моделі представлення даних в структурному вигляді для статичного випадку, що базуються на прямій та двоїстій задачах регуляризації, та оцінки обчислювальної складності відповідних методів. На їх основі розроблено ітераційні схеми для корекції вектора невідомих параметрів у випадку динамічного надходження експериментальних даних. Отримано оцінки збіжності запропонованих ітераційних схем у класі еліпсоїдів, де фазові обмеження задаються у вигляді паралелепіпеда.

F.G. Garashchenko, O.S. Degtiar

THE USE OF PSEUDOINVERSION AND REGULARIZATION METHODS IN ADAPTIVE MODELS OF STRUCTURED REPRESENTATION AND PROCESSING OF DATA

Mathematical models representing data in a structured form based on direct and dual regularization problems are described for a static case. Their computational complexity is evaluated. Iterative schemes for unknown parameters vector correction are developed on their basis for the dynamic flow of experimental data. Convergence of the proposed iterative schemes was received in ellipsoids classes, where the phase limitations were set in the polygon form.

1. *Дегтяр О.С.* Алгоритм розв’язання задачі оцінювання концентрації хлорофілу за допомогою введення параметра регуляризації // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. — 2013. — № 4. — С. 104–107.
2. *Bowman A.* An alternative method of cross-validation for the smoothing of density estimates // Biometrica. — 1984. — **71**. — P. 353–360.
3. *Hansen P.C.* The *L*-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems // Computational Inverse Problems in Electrocardiology. — Southampton: WIT Press, 2001. — P. 119–142.
4. *Беклемишев Д.В.* Дополнительные главы линейной алгебры. — М. : Наука, 1983. — 335 с.
5. *Дегтяр О.С.* Метод оцінювання концентрацій хлорофілу за допомогою використання двоїстої задачі до задачі регуляризації Тихонова // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. — 2014. — № 2. — С. 118–123.
6. *Meyer Carl D.* Matrix analysis and applied linear algebra book and solutions manual. — Philadelphia : SIAM, 2001. — 718 p.
7. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. — М. : Наука, 1987. — 360 с.
8. *Прасолов В.В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. — М. : Наука, 1996. — 304 с.
9. *Башняков О.М., Пічкур В.В., Хітько І.В.* Умови практичної стійкості дискретних систем і функції Ляпунова // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2012. — № 3. — С. 125–133

Получено 14.03.2017