УДК 519.86

А.Ф. Махорт

О ВЛИЯНИИ МОНОПОЛИСТОВ И ФИНАНСОВЫХ ОБЯЗАТЕЛЬСТВ НА РАВНОВЕСИЕ В ОТКРЫТОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Введение

Моделирование поведения экономических систем важно для определения способов влияния на них. Реакция экономической системы на выбранные факторы воздействия позволяет определить инструменты влияния. Считается, что эволюция экономических систем состоит в переходах между состояниями равновесия. Широкий класс задач позволяет исследовать лишь отдельные состояния равновесия [1–3]. Особенно когда состояния равновесия часто не упорядочены во времени и динамика их переходов достаточно неоднозначна. Взаимодействие между субъектами экономической системы может приводить к финансовым обязательствам. Например, такие финансовые обязательства появляются в результате инвестиционных поступлений с последующими ожиданиями получения прибыли от них.

Рассмотрим экономическое равновесие вальрасового типа [1, 2]. В отличие от классических способов описания экономических систем, использующих функцию полезности, в данном исследовании в явном виде записаны выражения для спроса и предложения товаров. Такой подход более информативен в выявлении факторов, влияющих на баланс спроса и предложения. Еще один важный аспект описания экономики в общей теории рыночного равновесия связан с тем, что многим моделям необходим учет принципа совершенной конкуренции. Наличие совершенной конкуренции ставит под сомнение возможность рассмотрения монополистов в экономической системе. Данная модель экономики не требует наличия совершенной конкуренции.

Выясним, как наличие инвестиций и обязательств выплат по ним влияет на равновесие экономической системы, а также на реализацию состояний равновесия. Источником инвестиций может быть перераспределение капитала, который мог бы остаться не использованным, если субъекты экономической системы иначе выберут стратегии своего поведения.

Помимо перераспределения капитала, на состояние экономической системы существенно могут влиять и другие факторы. В частности, присутствие монополистов в экономической системе может приводить к негативным последствиям для ее функционирования. Определим, при каких условиях в этом случае возможна реализация приемлемых для всех субъектов экономической системы состояний равновесия. Приемлемость оценим, прежде всего, по способности удовлетворять минимальный уровень своих потребностей.

Описание модели экономики

Исследуемую экономическую систему рассмотрим как совокупность l потребителей. Потребители проявляют интерес к доступным на рынке товарам, ко-

 ISSN 0572-2691

личество разновидностей которых n. Финансовый ресурс, необходимый для приобретения требуемых товаров, потребители получают в результате продажи имеющихся у них избыточных товаров. Это могут быть новые товары, созданные ими в процессе производства, или же созданные ранее и находившиеся у них в запасе. Следовательно, часть потребителей являются в то же время и производителями одного из возможных типов товаров. Остальные $l-n$ потребителей не производят собственных товаров и не имеют их запасов для продажи на рынке. Они функционируют за счет внешнего финансирования. Источником такого финансирования может быть перераспределение капитала, полученного в результате налогообложения производителей. Объемы выпусков каждого изготовленного в экономической системе товара определяют компоненты вектора $x=\{x_i\}_{i=1}^n$, а технологии производства задает матрица $\| a_{kj}+b_{kj}/x_j \|_{k,j=1}^n$. Ее составляющая a_{kj} указывает количество k-го товара, необходимого для производства единицы j-го товара, а составляющая b_{kj} относится к постоянным затратам производства. В результате производства товаров и того, что у j-го производителя может быть в наличии b_{kj}^1 единиц k-го товара, предложение на k-й товар в открытой экономической системе Ψ_k имеет вид

$$\Psi_k = x_k - \sum_{i=1}^n a_{ki}x_i - \sum_{i=1}^n b_{ki} + \sum_{i=1}^n b_{ki}^1 - e_k + i_k, \quad k=\overline{1,n}, \tag{1}$$

где учтен импорт товаров в экономическую систему в объемах $\{i_i\}_{i=1}^n$ и экспорт товаров из нее, его объем задает вектор $\{e_i\}_{i=1}^n$. Реализовав на рынке имеющийся у них товар, субъекты экономической системы получат прибыль

$$\widetilde{D}_j^1(p) = \pi_j x_j \left(p_j - \sum_{k=1}^n a_{kj}p_k \right) - \pi_j \sum_{k=1}^n b_{kj}p_k + \pi_j \sum_{k=1}^n b_{kj}^1 p_k, \quad j=\overline{1,n}.$$

Вектор $\pi=\{\pi_i\}_{i=1}^n$ определяет стратегию налогообложения. Между производителями может быть дополнительное перераспределение капитала

$$\widetilde{D}_j(p) = \widetilde{D}_j^1(p) + D_j, \quad j=\overline{1,n}. \tag{2}$$

Среди величин $\{D_i\}_{i=1}^n$ имеются как положительные, что означает дополнительный приток капитала, так и отрицательные, означающие его отток. Отрицательные значения можно связать или с инвестированием, или с возмещением обязательств.

Потребительские предпочтения субъектов экономической системы опишем с помощью матрицы спроса $C=\| c_{kj} \|_{k=1,j=1}^{n,l}$. Элементы этой матрицы указывают максимальный запланированный набор товаров, который желает получить каждый субъект экономической системы. Ценные бумаги и банковские услуги также могут находиться среди товаров, которые входят в желаемый потребительский набор, поэтому считаем, что потребители тратят всю свою прибыль на покупку товаров из желаемого набора (ненасыщающиеся потребители). При векторе цен на товары $p=\{p_i\}_{i=1}^n$ прибыль потребителя запишем в виде

$$\widetilde{D}_j(p) = y_j \sum_{s=1}^n c_{sj}p_s, \quad j=\overline{1,l}, \tag{3}$$

где компоненты вектора $y=\{y_i\}_{i=1}^l$ описывают степень удовлетворения нужд соответствующего потребителя, т.е. показывают, какой объем товара из выбранного набора можно приобрести за счет полученной в результате его деятельности прибыли. Следовательно, компоненты вектора y будут находиться в интервале значений $(0, 1]$.

Учтем также, что дополнительное перераспределение капитала может изменять потребительские предпочтения субъектов экономической системы, но не менять их поведения (потребители остаются ненасыщающимися, но изменятся объемы товаров разных типов в выбранных ими наборах). Предположим, что в этом случае элементы матрицы спроса будут иметь вид $c_{kj} = c_{kj}^0 \widetilde{f}_k^0(D)$.

Для ненасыщающихся потребителей их спрос на товары запишем с помощью матрицы спроса C

$$\Lambda_{ik}(p) = \frac{c_{ki} p_k}{\sum\limits_{s=1}^{n} c_{si} p_s}, \quad i \in [1, l], \quad k = \overline{1, n}.$$

С учетом этого спрос на k-й товар в экономической системе может быть представлен выражением

$$\Phi_k = \frac{1}{p_k} \sum_{i=1}^{l} \Lambda_{ik}(p) \widetilde{D}_i(p), \quad k = \overline{1, n}. \tag{4}$$

Известно, что такие характеристики товаров, как цена, образовываются в результате согласия между покупателем и продавцом. Такое согласие отвечает принципам экономического равновесия: предложение Ψ_k на k-й товар должно превышать его спрос Φ_k. На основании этого условия появляется возможность описать вероятные состояния экономической системы и определить их характеристики.

Обратим внимание на то, что дополнительное перераспределение капитала между производителями может быть пояснено и с позиций потребителей. В частности, важен случай, когда потребителей не устраивают определенные качества некоторых товаров, которые они собирались приобрести. Тогда стоит говорить о том, что они меняют свои предпочтения относительно части товаров (предпочтения относительно остальных товаров остаются неизменными), а это приводит и к изменению их поведения — они перестают быть ненасыщающимися. Измененный потребительский набор товаров будут задавать элементы матрицы $\hat{C} = \| \hat{c}_{kj} \|_{k=1, j=1}^{n, l}$. Между элементами матриц C и $\hat{C}$ выполняются соотношения $\hat{c}_{kj} \leq c_{kj}$, $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, l}$. Для таких потребителей спрос на товары будет зависеть уже от обеих матриц C и $\hat{C}$

$$\Lambda_{ik} = \widetilde{\Lambda}_{ik}(p) = \frac{\hat{c}_{ki} p_k}{\sum\limits_{s=1}^{n} c_{si} p_s}, \quad i \in [1, l], \quad k = \overline{1, n}.$$

Вследствие изменения поведения потребителей в экономической системе будет накапливаться неиспользуемый капитал

$$D_i^*(p) = \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\Lambda}_{ik}(p)\right) \widetilde{D}_i(p) = \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\hat{c}_{ki} p_k}{\sum\limits_{s=1}^{n} c_{si} p_s}\right) y_i \sum_{s=1}^{n} c_{si} p_s, \quad i = \overline{1, l}.$$

Наличие неиспользуемого капитала — потенциально неблагоприятный фактор развития экономической системы. Поэтому в процессе ее функционирования желательно, чтобы объемы неиспользуемого капитала были как можно меньшими. Товары, которые не заинтересовали одного потребителя, при определенных условиях могут понадобиться другому. Вполне реальна ситуация, когда j-й потребитель остается ненасыщающимся (тогда его неиспользуемый капитал нулевой) и приобретает товары из набора $\{c_{ij}\}_{i=1}^{n}$, которые избыточны для набора $\{\hat{c}_{ij}\}_{i=1}^{n}$, тогда он сможет передать данные товары по договоренности другому потребителю. При этом договоренность может включать в себя условие касательно иной цены на товар, чем та, по которой он был приобретен. Соответственно, стоимость таких избыточных наборов и будут определять величины $\{D_i\}_{i=1}^{n}$. Заинтересованность в поставках определенных товаров можно связать и с получением других товаров по обусловленной цене в будущем, т.е. с наличием финансовых обязательств.

Математическая формулировка задачи

Требование равновесия приводит к некоторой системе неравенств, которую необходимо решить, чтобы описать возможные состояния экономической системы. Укажем, какие характеристики модели заданы, а какие определяются из требований равновесия.

Начальные условия, в которых находится экономическая система, зададим следующими характеристиками. Структуры потребления и производства товаров в экономической системе определят матрицы спроса $\| c_{kj} \|_{k=1,\, j=1}^{n,l}$, запаса товаров у субъектов экономической системы $\| b_{kj}^{1} \|_{k,\, j=1}^{n}$ и матрицы $\| a_{kj} \|_{k,\, j=1}^{n}$, $\| b_{kj} \|_{k,\, j=1}^{n}$. В дополнение к указанным величинам, в процессе планирования своей деятельности производителям товаров желательно было бы отталкиваться от ориентировочных значений, объемов выпуска товаров или же их цен. Эта информация способствует оценке ожидаемого уровня прибыли, а также попытке избежать производства избыточной продукции, которая не найдет своего потребителя. Считается, что влиять на цены товаров в экономической системе могут только производители-монополисты. Пусть их количество $n-t$. Следовательно, к указанным известным характеристикам добавим объемы выпусков товаров немонополистов $(x_1^0,\dots,x_t^0)$ и цены на товары монополистов $(p_{t+1}^0,\dots,p_n^0)$. Кроме того, вектор $(\pi_1^0,\dots,\pi_t^0)$ задает стратегию налогообложения.

В результате деятельности ее субъектов, экономическая система может попасть в одно из состояний равновесия. В соответствии с выражениями (1), (4), состояния равновесия будут определены в результате решения системы нелинейных неравенств

$$\sum_{j=1}^{l} c_{kj} \frac{\widetilde{D}_j(p)}{\sum\limits_{s=1}^{n} c_{sj} p_s} \le x_k - \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i - \sum_{i=1}^{n} b_{ki} + \sum_{i=1}^{n} b_{ki}^{1} - e_k + i_k,\ \ k = \overline{1,\, n}. \tag{5}$$

Эту систему неравенств решим относительно вектора цен $(p_1,\dots,p_t)$, объемов выпуска товаров $(x_{t+1},\dots,x_n)$. Неизвестны также уровни налогообложения монополистов $(\pi_{t+1},\dots,\pi_n)$ и степени удовлетворения нужд потребителей $(y_1,\dots,y_l)$. Безусловно, все субъекты экономической системы стремятся действовать так, чтобы достичь прибыльности и наибольшего уровня удовлетворения своих потребностей. Если к выражению (5) добавить условие прибыльности производств

$$x_j\left(p_j-\sum_{k=1}^{n}a_{kj}p_k\right)-\sum_{k=1}^{n}b_{kj}p_k>0,\;\; j=\overline{1,n}, \tag{6}$$

то в выражении (5) можно перейти от неравенств к равенствам [1]. С учетом (2) и (3) окончательно получим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{l}c_{kj}y_j=x_k-\sum_{i=1}^{n}a_{ki}x_i-\sum_{i=1}^{n}b_{ki}+\sum_{i=1}^{n}b_{ki}^1-e_k+i_k,\;\; k=\overline{1,n}, \tag{7}$$

$$\pi_jx_j\left(p_j-\sum_{k=1}^{n}a_{kj}p_k\right)-\pi_j\sum_{k=1}^{n}b_{kj}p_k+\pi_j\sum_{k=1}^{n}b_{kj}^1p_k+D_j=y_j\sum_{s=1}^{n}c_{sj}p_s,\;\; j=\overline{1,n}. \tag{8}$$

Набор только положительных ее решений $\{p_i\}_{i=1}^{t}$, $\{x_i\}_{i=t+1}^{n}$, $\{\pi_i\}_{i=t+1}^{n}$, $\{y_i\}_{i=1}^{l}$ однозначно опишет состояния равновесия с прибыльными производствами товаров (6). Но прибыльность еще не гарантирует приемлемость состояний равновесия для отдельных субъектов экономической системы. Классификацию состояний равновесия можно осуществить по степеням удовлетворения нужд потребителей $\{y_i\}_{i=1}^{l}$. В частности, если задать нижний уровень удовлетворения нужд потребителей y^m, который устраивает всех потребителей, то каждое состояние равновесия со степенями удовлетворения потребностей, не ниже уровня $y_i\ge y^m$, $i=\overline{1,l}$, приемлемо для функционирования экономической системы. В нахождении характеристик состояний равновесия с такими свойствами и состоит задача исследования.

Равновесные экономические характеристики

Наиболее приемлемое состояние равновесия — когда нужды каждого потребителя удовлетворяются полностью. Если такое состояние равновесия невозможно, следует стремиться к состоянию с как можно большими значениями всех компонентов вектора степеней удовлетворения нужд потребителей, но не ниже минимально установленного уровня y^m. Определить приемлемые состояния равновесия можно, основываясь на ранее полученных результатах [4, 5].

Введем вектор $\hat z=\{\hat z_i\}_{i=1}^{n}$ с компонентами

$$\hat z_i=\tilde f_i^0(D)\sum_{j=1}^{l}c_{ij}^0y_j,\;\; i=\overline{1,n}.$$

Этот вектор однозначно определяется степенями удовлетворения нужд потребителей и может быть исключительно положительным. Если спектральный радиус матрицы $A=\|a_{jk}\|_{j,k=1}^{n}$ меньше единицы, подсистема уравнений (7) примет вид

$$\sum_{s=1}^{n}(E-A)_{ks}^{-1}\hat z_s=x_k^0-\sum_{s=1}^{n}(E-A)_{ks}^{-1}\left[e_s-i_s+\sum_{j=1}^{n}b_{sj}-\sum_{i=1}^{n}b_{si}^1\right],\;\; k=\overline{1,t}, \tag{9}$$

$$\sum_{s=1}^{n}(E-A)_{ks}^{-1}\hat z_s=x_k-\sum_{s=1}^{n}(E-A)_{ks}^{-1}\left[e_s-i_s+\sum_{j=1}^{n}b_{sj}-\sum_{i=1}^{n}b_{si}^1\right],\;\; k=\overline{t+1,n}. \tag{10}$$

 ISSN 0572-2691

То, что компоненты вектора $\hat{z} = \{\hat{z}_i\}_{i=1}^n$ должны быть положительными, приводит к требованию

$$b_k^0 = x_k^0 - \sum_{s=1}^n (E-A)_{ks}^{-1}\left[e_s - i_s + \sum_{j=1}^n b_{sj} - \sum_{i=1}^n b_{si}^1\right] > 0, \; k = \overline{1, t}. \tag{11}$$

А чтобы обеспечить существование положительного вектора выпусков товаров монополистами, согласно выражению (10) достаточно наложить условие

$$\sum_{s=1}^n (E-A)_{ks}^{-1}\left[e_s - i_s + \sum_{j=1}^n b_{sj} - \sum_{i=1}^n b_{si}^1\right] \geq 0, \; k = \overline{t+1, n}. \tag{12}$$

Подсистему уравнений (9), в которой задана правая часть, можно решить относительно вектора $\hat{z} = \{\hat{z}_i\}_{i=1}^n$. Это решение будет параметрическим, потому что неизвестных больше, чем уравнений. Чтобы описать все возможные положительные решения, выберем их представление в виде, предложенном в [1]

$$\hat{z}(\gamma) = \left\{(b^0, g_1) - \sum_{j=t+1}^n (d_j, g_1)\gamma_j z_j^*, \ldots, (b^0, g_t) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=t+1}^n (d_j, g_t)\gamma_j z_j^*, \gamma_{t+1} z_{t+1}^*, \ldots, \gamma_n z_n^*\right\}, \tag{13}$$

где учтено, что у матрицы $\|(E-A)_{ks}^{-1}\|_{k,s=1}^n$ все главные миноры положительные [6], поэтому существует обратная к $\|(E-A)_{ks}^{-1}\|_{k,s=1}^t$ матрица $\|g_{ki}\|_{k,i=1}^t$ и обозначено

$$(d_k, g_i) = \sum_{s=1}^t (E-A)_{sk}^{-1} g_{si}, \; k = \overline{t+1, n}.$$

Определенным ограничением использования представления (13) будет условие

$$(b^0, g_i) = \sum_{s=1}^t b_s^0 g_{si} > 0, \; i = \overline{1, t},$$

которое должно удовлетворяться за счет сбалансированности технологий производства (значения величин $\{b_i^0\}_{i=1}^t$ существенно зависят от компонентов заданного вектора $(x_1^0, \ldots, x_t^0)$). При фиксировании значений параметра γ_{n+1} (он может быть и отрицательным) и компонентов вспомогательного вектора $z^* = \{z_i^*\}_{i=t+1}^n$, относительно которых следует учитывать обязательное выполнение неравенств

$$(b^0, g_k) \geq (d_j, g_k) z_j^*, \; j = \overline{t+1, n}, \; k = \overline{1, t},$$

описание разных решений системы уравнений (9) осуществляется за счет вектора параметров $\gamma = (\gamma_{t+1}, ..., \gamma_n)$. Все возможные значения компонентов этого вектора принадлежат множеству, созданному ограничениями [1]

$$(b^0, g_k) > \sum_{j=t+1}^n (d_j, g_k)\gamma_j z_j^*, \; k = \overline{1, t}, \; \gamma_i > 0, \; i = \overline{t+1, n}. \tag{14}$$

$$\sum_{j=t+1}^{n+1} \gamma_j = 1. \tag{15}$$

Согласно определению вектора $\hat{z} = \{\hat{z}_i\}_{i=1}^{n}$, для каждого вектора параметров γ из множества значений, заданного требованиями (14), (15), будем иметь

$$\sum_{j=1}^{l} c_{ij}^{0} y_j = \frac{\hat{z}_i(\gamma)}{\tilde{f}_i^{0}(D)}, \ i = \overline{1, n}. \tag{16}$$

Определим сначала тот вектор параметров, при котором нужды потребителей могут удовлетворяться наиболее полно. Для этого решим оптимизационную задачу

$$\min_{\gamma} \mathsf{F}(\eta^*, \gamma), \ \mathsf{F}(\eta^*, \gamma) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} [\eta_j^* - \hat{z}_j(\gamma)]^2. \tag{17}$$

В соответствии с указанной целью компоненты вектора $\eta^* = \{\eta_j^*\}_{j=1}^{n}$ зададим формулой

$$\eta_j^* = y^M \tilde{f}_i^0(D) \sum_{j=1}^{l} c_{ij}^0, \ j = \overline{1, n},$$

где y^M — наибольший уровень удовлетворения нужд потребителей ($y^M \le 1$). Решение γ^0 оптимизационной задачи (17), для которого имеют место ограничения (14), (15), существует [4], а величины $\{\hat{z}_i(\gamma^0)\}_{i=1}^{n}$ содержатся в интервале значений $\alpha\eta_i^* \le \hat{z}_i \le \eta_i^*$, $i = \overline{1, n}$. Условия существования решения состоят в том, чтобы заданный параметр $0 < \alpha < 1$ и вектор η^* удовлетворяли неравенствам

$$(b^0, g_j) - \sum_{i \in M_j^+} \eta_i^*(d_i, g_j) - \alpha \sum_{i \in M_j^-} \eta_i^*(d_i, g_j) \ge \alpha\eta_j^*, \ j = \overline{1, t},$$

$$(b^0, g_j) - \alpha \sum_{i \in M_j^+} \eta_i^*(d_i, g_j) - \sum_{i \in M_j^-} \eta_i^*(d_i, g_j) \le \eta_j^*, \ j = \overline{1, t},$$

$$M_j^+ = \{k \in [t+1, n], k : (d_k, g_j) > 0\}, \ M_j^- = \{k \in [t+1, n], k : (d_k, g_j) < 0\} \ne \varnothing,$$

$$\sum_{j=1}^{t} \eta_j^* \left|(d_s, g_j)\right| \le \eta_s^*, \ s = \overline{t+1, n}.$$

Далее из выражения (10) по вектору $\{\hat{z}_i(\gamma^0)\}_{i=1}^{n}$ уже можно определить равновесные объемы выпуска товаров монополистами $\{x_i(\gamma^0)\}_{i=t+1}^{n}$. По вектору γ^0 определим и равновесные степени удовлетворения потребностей субъектов экономической системы. Сделаем это, решив экстремальную задачу

$$\min_{(y_1, \ldots, y_l)} \hat{\mathsf{F}}, \ \hat{\mathsf{F}} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l} \left[\sum_{k=1}^{t} \hat{\beta}_k c_{kj}^0 - y_j\right]^2 \tag{18}$$

при дополнительных требованиях (16). Знание равновесных степеней удовлетворения потребностей субъектов экономической системы позволит определить из выражения (8) равновесные цены и уровни налогообложения монополистов.

Равновесные степени удовлетворения нужд потребителей

Укажем условия существования решения задачи (18). Необходимо учитывать, что нужды потребителей не должны удовлетворяться ниже минимально ус-

 ISSN 0572-2691

тановленного уровня y^m, поэтому параметр α определим так, чтобы $\alpha y^M = y^m$. Тогда величины $\{\hat{\beta}_i\}_{i=1}^t$ выберем исходя из оценок $y^M \geq \sum_{k=1}^{t} \hat{\beta}_k c_{kj}^0 \geq y^m, \quad j = \overline{1, l}.$

Теорема 1. Пусть матрица $\left\| \sum_{i \in [1,l]} c_{ki}^0 c_{ji}^0 \right\|_{k,j=1}^t$ вырождена и выполняются условия

$$\max\left[\sum_{s=1}^{t} c_{sj}^0 \sum_{k=1}^{t} \tilde{C}_{sk}^{-1}\left(\frac{\hat{z}_k(\gamma^0)}{\tilde{f}_k^0(D)} - y^M \sum_{j \in M_1^1} c_{kj}^0\right), \sum_{s=1}^{t} c_{sj}^0 \sum_{k=1}^{t} \tilde{C}_{sk}^{-1}\left(\frac{\hat{z}_k(\gamma^0)}{\tilde{f}_k^0(D)} - y^m \sum_{j \in M_1^1} c_{kj}^0\right)\right] \leq y^M,$$
$$s = \overline{1, l}.$$

$$\min\left[\sum_{s=1}^{t} c_{sj}^0 \sum_{k=1}^{t} \tilde{C}_{sk}^{-1}\left(\frac{\hat{z}_k(\gamma^0)}{\tilde{f}_k^0(D)} - y^M \sum_{j \in M_1^1} c_{kj}^0\right), \sum_{s=1}^{t} c_{sj}^0 \sum_{k=1}^{t} \tilde{C}_{sk}^{-1}\left(\frac{\hat{z}_k(\gamma^0)}{\tilde{f}_k^0(D)} - y^m \sum_{j \in M_1^1} c_{kj}^0\right)\right] \geq y^m,$$
$$s = \overline{1, l}.$$

$$\left(\sum_{s=1}^{t} c_{sj}^0 \sum_{k=1}^{t} \tilde{C}_{sk}^{-1} \frac{\hat{z}_k(\gamma^0)}{\tilde{f}_k^0(D)}\right)\left(\sum_{s=1}^{t} c_{sj}^0 \sum_{k=1}^{t} \tilde{C}_{sk}^{-1} c_{kj}\right) > 0, \quad j \in M_1^1, \quad s = \overline{1, l},$$

где $M_0^1 \cup M_1^1 = [1, l]$, а $\| \tilde{C}_{kj}^{-1} \|_{k,j=1}^t$ — матрица, обратная к $\left\| \sum_{i \in M_0^1} c_{ki}^0 c_{ji}^0 \right\|_{k,j=1}^t$. Подмножество $M_0^1 \subset [1, l]$ выбирается так, чтобы его размерность была наибольшей из возможных. Тогда найдутся положительные значения величин $\{\hat{\beta}_i\}_{i=1}^t$, при которых существует решение $\{y_j\}_{j \in [1, l]}$ экстремальной задачи (18), (16) с компонентами, принадлежащими интервалу значений $[y^m, y^M]$.

Доказательство. Составим функцию Лагранжа оптимизационной задачи (18), (16)

$$\hat{L} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}\left[\sum_{k=1}^{t} \hat{\beta}_k c_{kj}^0 - y_j\right]^2 + \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \left[\sum_{j=1}^{n} c_{kj}^0 y_j - \frac{\hat{z}_k(\gamma^0)}{\tilde{f}_k^0(D)}\right].$$

При такой функции Лагранжа для любого произвольно выбранного ненулевого вектора $(y_1, \ldots, y_n)$ справедливы неравенства

$$\sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial y_i \partial y_j} y_i y_j = \sum_{s=1}^{l} y_s^2 > 0.$$

Решение экстремальной задачи (18), (16) найдем из условий

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial y_s} = y_s - \sum_{j=1}^{t} \hat{\beta}_j c_{js}^0 + \sum_{k=1}^{t} \hat{\lambda}_k c_{ks}^0 = 0, \quad s = \overline{1, l}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{\lambda}_k} = \sum_{j=1}^{l} c_{kj}^0 y_j - \frac{\hat{z}_k(\gamma^0)}{\tilde{f}_k^0(D)} = 0, \quad k = \overline{1, t}. \tag{20}$$

Из равенств (20), с учетом выражения (19), получим уравнение на множители Лагранжа $\{\hat{\lambda}_i\}_{i=1}^t$

$$\sum_{j=1}^{t}\left[\sum_{i\in M_0^1} c_{ki}^0 c_{ji}^0\right](\hat{\beta}_j-\hat{\lambda}_j)=\frac{\hat{z}_k(\gamma^0)}{\tilde{f}_k^0(D)}-\sum_{j\in M_1^1} c_{kj}^0 y_j,\ k=\overline{1,t}.$$

При соответствующем выборе величин $\{\hat{\beta}_i\}_{i=1}^t$ любое решение этого уравнения гарантирует существование ненулевых множителей Лагранжа $\{\hat{\lambda}_i\}_{i=1}^t$

$$\hat{\lambda}_s=\hat{\beta}_s-\sum_{k=1}^{t}\tilde{\mathsf{C}}_{sk}^{-1}\left(\frac{\hat{z}_k(\gamma^0)}{\tilde{f}_k^0(D)}-\sum_{j\in M_1^1} c_{kj}^0 y_j\right),\ s=\overline{1,t}.$$

В этом случае выражение (19) примет вид

$$y_j=\sum_{s=1}^{t} c_{sj}^0\sum_{k=1}^{t}\tilde{\mathsf{C}}_{sk}^{-1}\frac{\hat{z}_k(\gamma^0)}{\tilde{f}_k^0(D)}-\sum_{s=1}^{t} c_{sj}^0\sum_{k=1}^{t}\tilde{\mathsf{C}}_{sk}^{-1}\sum_{j\in M_1^1} c_{kj}^0 y_j,\ j=\overline{1,l}. \tag{21}$$

Для индексов из множества $M_1^1\subset[1,l]$ получим уравнение

$$y_j=\hat{\mathsf{Y}}_j^1(\{y_k\}_{k\in M_1^1}),\ j\in M_1^1. \tag{22}$$

По условиям теоремы оператор $\{\hat{\mathsf{Y}}_j^1\}_{j\in M_1^1}$ переводит множество

$$\left\{\left|y_j-\frac{y^M+y^m}{2}\right|\le\frac{y^M-y^m}{2},\ j\in M_1^1\right\}$$

само в себя. На основании принципа Шаудера [7] получим решение уравнения (22), которое содержится в требуемом интервале значений $[y^m,\ y^M]$. Если теперь по компонентам $\{y_j\}_{j\in M_1^1}$ из выражения (21) определить оставшиеся компоненты $\{y_j\}_{j\in M_0^1}$, то условия теоремы также гарантируют принадлежность их значений к интервалу $[y^m,\ y^M]$.

Теорема доказана.

Следствие. Если множество M_1^1 пустое и $M_0^1=[1,l]$, теорема 1 имеет место при условии выполнения оценок

$$y^m\le\sum_{s=1}^{t} c_{sj}^0\sum_{k=1}^{t}\tilde{\mathsf{C}}_{sk}^{-1}\frac{\hat{z}_k(\gamma^0)}{\tilde{f}_k^0(D)}\le y^M,\ j=\overline{1,t}.$$

Равновесные цены и уровни налогообложения монополистов

По вектору $y=y(\gamma^0)$ определим равновесный вектор цен $\{p_i(\gamma^0)\}_{i=1}^t$. Исходя из предположения о спектральном радиусе матрицы $A=\|a_{jk}\|_{j,k=1}^n$ выражение (8) перепишем в форме уравнения

$$p_k=\mathsf{P}_k^1(p),\ k=\overline{1,t}, \tag{23}$$

$$\mathsf{P}_k^1(p)=\sum_{j=1}^{t}(E-A)_{jk}^{-1}\left[\sum_{s=t+1}^{n} a_{sj}p_s^0+\frac{y_j\tilde{f}_j^0(D)}{\pi_j x_j}\sum_{s=1}^{n} c_{sj}^0 p_s+\frac{1}{x_j}\sum_{s=1}^{n}(b_{sj}-b_{si}^1)\,p_s-D_j\right],$$

$$k=\overline{1,t}.$$

Чтобы избежать избыточного накопления товаров, когда запас определенных типов товаров в экономической системе таков, что их дальнейшее производство может быть нецелесообразно, установим ограничение на элементы матрицы запаса товаров

$$\frac{y^m \tilde{f}_j^0(D)}{\pi_j} c_{sj}^0 + b_{sj} - b_{sj}^1 \geq 0, \quad j = \overline{1, t}, \quad s = \overline{1, t}. \tag{24}$$

Также следует учесть, что у субъектов экономической системы не может быть достаточного запаса товаров монополистов, который они могут выставлять на продажу.

Теорема 2. При условии выполнения ограничений (24) и неравенств

$$\sum_{k=1}^{t} \sum_{j=1}^{t} (E - A)_{jk}^{-1} \frac{1}{x_j^0} \max_{s \in [1,t]} \left(\frac{y^M \tilde{f}_j^0(D)}{\pi_j} c_{sj}^0 + b_{sj} - b_{sj}^1 \right) < 1,$$

$$\sum_{j=1}^{t} (E - A)_{jk}^{-1} \left[\sum_{s=t+1}^{n} a_{sj} p_s^0 + \frac{y^m \tilde{f}_j^0(D)}{\pi_j x_j^0} \sum_{s=t+1}^{n} c_{sj}^0 p_s^0 + \frac{1}{x_j^0} \sum_{s=t+1}^{n} b_{sj} p_s^0 - D_j \right] > 0$$

существует положительное решение уравнения (23).

Доказательство. Для суммы $\sum_{k=1}^{t} \mathsf{P}_k^1(p)$ справедлива цепочка неравенств

$$\sum_{k=1}^{t} \mathsf{P}_k^1(p) \leq \sum_{k=1}^{t} \sum_{j=1}^{t} (E - A)_{jk}^{-1} \left[\sum_{s=t+1}^{n} a_{sj} p_s^0 + \frac{y^M \tilde{f}_j^0(D)}{\pi_j x_j^0} \sum_{s=1}^{n} c_{sj}^0 p_s + \frac{1}{x_j^0} \sum_{s=1}^{n} (b_{sj} - b_{sj}^1) p_s - D_j \right] \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{t} \sum_{j=1}^{t} (E - A)_{jk}^{-1} \left[\sum_{s=t+1}^{n} a_{sj} p_s^0 + \frac{y^M \tilde{f}_j^0(D)}{\pi_j x_j^0} \sum_{s=t+1}^{n} c_{sj}^0 p_s^0 + \frac{1}{x_j^0} \sum_{s=t+1}^{n} b_{sj} p_s^0 - D_j \right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{t} \sum_{j=1}^{t} (E - A)_{jk}^{-1} \frac{1}{x_j^0} \max_{s \in [1,t]} \left(\frac{y^M \tilde{f}_j^0(D)}{\pi_j} c_{sj}^0 + b_{sj} - b_{sj}^1 \right) \sum_{s=1}^{t} p_s.$$

А из условий теоремы следует, что всегда найдется параметр $\rho_0 > 0,$ для которого имеет место оценка

$$\mathsf{P}_k^1(p) \geq \sum_{j=1}^{t} (E - A)_{jk}^{-1} \left[\sum_{s=t+1}^{n} a_{sj} p_s^0 + \frac{y^m \tilde{f}_j^0(D)}{\pi_j x_j^0} \sum_{s=1}^{n} c_{sj}^0 p_s + \frac{1}{x_j^0} \sum_{s=1}^{n} (b_{sj} - b_{sj}^1) p_s - D_j \right] \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{t} (E - A)_{jk}^{-1} \left[\sum_{s=t+1}^{n} a_{sj} p_s^0 + \frac{y^m \tilde{f}_j^0(D)}{\pi_j x_j^0} \sum_{s=t+1}^{n} c_{sj}^0 p_s^0 + \frac{1}{x_j^0} \sum_{s=t+1}^{n} b_{sj} p_s^0 - D_j \right] +$$

$$+ \rho_0 \sum_{j=1}^{t} (E - A)_{jk}^{-1} \frac{1}{x_j^0} \sum_{s=1}^{t} \left(\frac{y^m \tilde{f}_j^0(D)}{\pi_j} c_{sj}^0 + b_{sj} - b_{sj}^1 \right) \geq \rho_0, \quad k = \overline{1, t}.$$

В результате, если определить параметр $\rho,$ для которого будет выполняться требование

$$\frac{\sum_{k=1}^{t} \sum_{j=1}^{t} (E - A)_{jk}^{-1} \frac{1}{x_j^0} \left[x_j^0 \sum_{s=t+1}^{n} a_{sj} p_s^0 + \frac{y_j}{\pi_j} \sum_{s=t+1}^{n} c_{sj}^0 p_s^0 + \sum_{s=t+1}^{n} b_{sj} p_s^0 - D_j x_j^0 \right]}{1 - \sum_{k=1}^{t} \sum_{j=1}^{t} (E - A)_{jk}^{-1} \frac{1}{x_j^0} \max_{s \in [1,t]} \left(\frac{y_j}{\pi_j} c_{sj}^1 + b_{sj} - b_{sj}^1 \right)} \leq \rho,$$

получим, что оператор $\{\mathrm{P}_k^1(p)\}_{k=1}^t$ будет переводить компактное выпуклое множество

$$\left\{ p_k \geq \rho_0,\, k = \overline{1, t},\ \sum_{k=1}^{t} p_k \leq \rho \right\}$$

само в себя. Этого достаточно, чтобы исходя из принципа Шаудера [7] сделать вывод о существовании решения уравнения (23).

Теорема доказана.

Используя найденные равновесные характеристики, для стратегии налогообложения монополистов из равенств (8) получим формулу

$$\pi_j = \frac{\sum_{s=1}^{t} c_{sj} y_j p_s + \sum_{s=t+1}^{n} c_{sj} y_j p_s^0 - D_j}{p_j^0 x_j - \sum_{k=1}^{t} (a_{kj} x_j + b_{kj} - b_{kj}^1)\, p_k - \sum_{k=t+1}^{n} (a_{kj} x_j + b_{kj} - b_{kj}^1) p_k^0}, \quad j = \overline{t+1, n}. \quad (25)$$

Оценим возможные значения уровней налогообложения. Для величин $\{\hat{z}_i(\gamma^0)\}_{i=1}^n$ указан интервал их значений, по которым можно оценить и значения $\{x_i(\gamma^0)\}_{i=t+1}^n$. Теорема 2 не дает оценок интервала значений равновесных цен. Однако получить их можно на основании формул, приведенных в [8]. Для компонентов равновесного вектора цен справедливо представление $p_k = p_k(y, \tilde{f}^0)$,

$$p_k(y, \tilde{f}^0) = \sum_{j=1}^{t} (E - G(y, \tilde{f}^0))_{jk}^{-1} \left\{ \sum_{s=t+1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{t} (E - A)_{ij}^{-1} a_{si} + G_{sj}(y, \tilde{f}^0) \right] p_s^0 - \hat{D}_j \right\}, \quad k = \overline{1, t},$$

$$\hat{D}_j = \sum_{s=1}^{t} (E - A)_{sk}^{-1} D_s, \quad j = \overline{1, t}.$$

$$G_{sk}(y, \tilde{f}^0) = \sum_{j=1}^{t} (E - A)_{jk}^{-1} \left[\frac{y_j \tilde{f}_k^0(D)}{\pi_j x_j} c_{sj}^0 + \frac{1}{x_j^0} (b_{sj} - b_{sj}^1) \right], \quad s, k = \overline{1, n}.$$

Пусть величины $\{D_i\}_{i=1}^n$, относящиеся к монополистам, удовлетворяют ограничениям $D_j^m \leq D_j \leq D_j^M$, $j = \overline{t+1, n}$. В этом случае появятся ограничения и на функции $\{\tilde{f}_k^0(D)\}_{k=1}^n$

$$\tilde{f}_k^m = \tilde{f}_k^0(\{D_i\}_{i=1}^t, \{D_i^m\}_{i=t+1}^n) \leq \tilde{f}_k^0(D) \leq \tilde{f}_k^0(\{D_i\}_{i=1}^t, \{D_i^M\}_{i=t+1}^n) = \tilde{f}_k^M, \quad k = \overline{1, n}.$$

Тогда k-я компонента вектора цен p_k будет содержаться в интервале

$$[p_k(y^m, \tilde{f}^m),\, p_k(y^M, \tilde{f}^M)], \quad k = \overline{1, t}.$$

Соответственно, граничные значения равновесных уровней налогообложения монополистов получим, подставив в выражение (25) граничные значения других равновесных характеристик.

Заключение

В результате проведенного исследования выяснено комплексное влияние монополистов и перераспределения капитала, связанного с инвестиционными вложениями и финансовыми обязательствами, на достижение равновесия открытой экономической системы. Найдены характеристики состояний равновесия, пребывание экономической системы в которых позволит избежать негативных проявлений монополизма.

Одним из инструментов влияния на экономическую систему является механизм выбора стратегии налогообложения. Известно, что эффективное воздействие на монополистов можно осуществить путем налогообложения. Получены формулы для расчета равновесных уровней налогообложения монополистов. Обратим

 ISSN 0572-2691

внимание на то, что расчет уровней налогообложения монополистов по этим формулам обеспечит реализацию состояния равновесия, которое характеризуется векторами $\{p_i(\gamma^0)\}_{i=1}^{t}$, $\{x_i(\gamma^0)\}_{i=t+1}^{n}$ и $y(\gamma^0)$. Данное состояние равновесия приемлемо для всех субъектов экономической системы, так как позволяет им наиболее полно и не ниже минимально заданного уровня удовлетворять свои потребительские нужды.

А.П. Махорт

ПРО ВПЛИВ МОНОПОЛІСТІВ І ФІНАНСОВИХ ЗОБОВ'ЯЗАНЬ НА РІВНОВАГУ ВІДКРИТОЇ ЕКОНОМІЧНОЇ СИСТЕМИ

Досліджено умови рівноваги відкритої економічної системи з урахуванням перерозподілу капіталу між її суб'єктами. Використано принципи рівноваги вальрасового типу. У моделі споживачі товарів є ненасичуваними. Частина виробників товарів є монополістами. Модель враховує наявність оподаткування прибутків суб'єктів економічної системи. Знайдено обмеження на модельні характеристики, виконання яких гарантуватиме рівновагу економічної системи у випадку комплексної дії чинників монополізму та перерозподілу капіталу. Запропоновано алгоритм розв'язання задачі про економічну рівновагу. Вказано стани рівноваги з прийнятними для всіх суб'єктів економічної системи рівнями споживання. Виконано оцінку граничних значень рівноважних характеристик. Відзначено дію вибору стратегії оподаткування на реалізацію конкретного стану рівноваги економічної системи.

A.Ph. Makhort

ON INFLUENCE OF MONOPOLIES AND FINANCIAL OBLIGATIONS ON EQUILIBRIUM OF AN OPEN ECONOMY

There is an investigation of equilibrium conditions of an open economy with a redistribution of capitals between economy subjects. The equilibrium principles are of Walrasian type. The model takes into account the presence of insatiable consumers only. There are monopolies. The model considers a taxation of profits of subjects of the economy. The limitations of model characteristics are found. Their satisfaction will guarantee the equilibrium of economic system under complex action of a monopoly effect and the redistribution of capitals. The solution algorithm of the equilibrium problem is proposed. The characteristics of discovered equilibrium states lead to an acceptable level of a needs satisfaction of all economy subjects. There is an estimation of marginal values of the equilibrium characteristics. The choice of a taxation strategy contributes a realization of the particular equilibrium state.

1. *Гончар М.С.* Фондовий ринок, економічний ріст. — К. : Обереги, 2001. — 826 с.
2. *Debreu G.* Existence of competitive equilibrium // Handbook of Mathematical Economics / ed. by K.J. Arrow, M.D. Intriligator. — Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1982. — **II**. — P. 698–742.
3. *Magill M., Quinzii M.* Theory of incomplete markets. — Cambridge MIT Press. — 2002. — **1**. — 558 p.
4. *Махорт А.Ф.* Равновесие в экономической системе с разными типами стратегий поведения потребителей // Проблемы управления и информатики. — 2009. — №1. — С. 107–117.
5. *Махорт А.П.* Про вплив на рівновагу в економічній системі нелінійної залежності структури споживання товарів від ціни // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2013. — № 3. — С. 30–44.
6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М. : Наука, 1966. — 576 с.
7. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. — М. : Наука, 1977. — 442 с.
8. *Махорт А.Ф.* О влиянии зависимости структуры потребления товаров от цены на равновесие в экономической системе // Кибернетика и системный анализ. — 2015. — № 2. — С. 52–61.

Получено 21.07.2016
После доработки 05.01.2017