УДК 517.977

В.А. Пепеляев, Ал.А. Чикрий

ОБ ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ

Раздел прикладной математики, посвященный методам принятия решений в условиях динамического противодействия, принято называть конфликтно-управляемыми процессами. Основы этого научного направления заложены в фундаментальных работах Л.С. Понтрягина [1] и Н.Н. Красовского [2]. Среди зарубежных следует выделить ранние исследования [3–5].

Рассмотрение игровых задач, как правило, происходит в условиях различной информированности, а эволюция процесса задается широким спектром динамических систем.

Так в работе [6] рассматривается позиционная информированность, а в [7] используется эффект запаздывания информации. Достаточно сложная динамика управлений с дробными производными описывает игровые задачи в [8, 9], импульсные и гибридные конфликтно-управляемые процессы изучены в [10], а интегральные ограничения на управления рассмотрены в работе [11]. Для последних из упомянутых работ базовым для исследования является метод разрешающих функций [12]. Следует напомнить, что этот метод дает полное теоретическое обоснование правила параллельного преследования, а также сближения по лучу [5]. Для задач с группами участников он применен в работах [12, 13], игровые задачи со случайными возмущениями изучены в [14], а в работе [15] введены верхние и нижние разрешающие функции двух типов, позволяющие исследовать динамические игры без классического условия Понтрягина.

Метод разрешающих функций является эффективным средством для решения прикладных задач. В работе [16] на его основе изучена проблема безопасного взлета и посадки самолета, а в исследованиях [17, 18] — задача о «мягкой посадке».

Данный метод используется при поражении маневрирующих движущихся целей и перехвате информации в каналах связи, может быть полезен при управлении дронами в ситуации противодействия, при анализе конкурентного взаимодействия в моделях экономической динамики, моделирования и стабилизации функционального состояния объекта при постоянно действующих возмущениях.

В настоящей работе метод разрешающих функций применяется для исследования нестационарных игровых задач, что соответствует изменяющейся обстановке в процессе игрового взаимодействия. Получены достаточные условия завершения игры за конечное время для различных классов стратегий, результаты иллюстрируются на модельном примере.

1. Постановка задачи

Пусть движение объекта в конечномерном евклидовом пространстве R^n представляет собой конфликтно-управляемый процесс, эволюция которого задается соотношением

$$z(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} \Omega(t, \tau)\,\varphi(\tau, u(\tau), v(\tau))\,d\tau, \quad t \ge t_0 \ge 0. \qquad (1)$$

Здесь функция $g(t)$, $g\colon R_{t_0} \to R^n$, $R_{t_0} = \{t : t \ge t_0 \ge 0\}$, представляет собой блок начальных данных, она измерима по Лебегу и ограничена при $t > t_0$, матричная функция $\Omega(t, \tau)$, $t \ge \tau \ge t_0$, измерима по t и суммируема по τ для каждого $t \in R_{t_0}$. Блок управления задается функцией $\varphi(\tau, u, v)$, которая определена на множестве $[t_0, +\infty) \times R^p \times R^q$, удовлетворяет условиям Каратеодори: для фиксированных $(u, v) \in R^p \times R^q$ она локально суммируема по τ и для любого фиксированного $\tau \in [t_0, +\infty)$ непрерывна по совокупности (u, v) на $R^p \times R^q$. При этом в каждый текущий момент времени параметры управления игроков u и v выбираются из областей управления $U(\tau)$ и $V(\tau)$, $U(\tau) \in K(R^p)$, $V(\tau) \in K(R^p)$, которые являются измеримыми компактнозначными отображениями для $\tau \in [t_0, +\infty)$.

Будем считать, что

$$\|\varphi(\tau, u, v)\| \le \lambda(\tau) \quad \forall\ u \in U(\tau), v \in V(\tau), \tau \in R_{t_0}, \qquad (2)$$

где $\lambda(\tau)$ — локально суммируемая функция.

Кроме нестационарного процесса (1), задано переменное терминальное множество $M^*(t)$ цилиндрического вида

$$M^*(t) = M_0 + M(t),\ t \in R_{t_0}, \qquad (3)$$

где M_0 — линейное подпространство из R^n, $M(t)$ — измеримое многозначное отображение, образы которого принадлежат $K(L)$, $L = M_0^{\perp}$ — ортогональное дополнение к M_0 в R^n.

Цели игроков противоположны. Первый (u) стремится вывести траекторию процесса (1) на терминальное множество (2) за кратчайшее время, а второй (v) — максимально оттянуть момент попадания траектории $z(t)$ на множество $M^*(t)$ или вообще избежать встречи.

Представление (1) позволяет в единой схеме рассмотреть широкий круг конфликтно-управляемых функционально-дифференциальных систем с аддитивно входящими в правую часть блоком начальных данных и блоком управления. Это, в частности, системы интегральных, интегро-дифференциальных, дифференциально-разностных уравнений, а также системы уравнений с классическими дробными производными Римана–Лиувилля, регуляризованными

ISSN 0572-2691

производными Джрбашяна–Нерсесяна–Капуто, секвенциальными производными Миллера–Росса, производными Хильфера и Грюнвальда–Летникова. Аналогичное представление в ситуации с дискретным временем позволяет исследовать многошаговые системы и импульсные процессы, в том числе и гибридные. При этом тип конфликтно-управляемого процесса определяют функции $g(t)$ и $\Omega(t,\tau)$.

Сосредоточим внимание на достаточных условиях выигрыша первого игрока в задаче (1)–(3). Будем считать допустимым управлением второго игрока произвольную измеримую функцию $v(t)$ со значениями $V(t)$, $t \geq t_0$. Поскольку многозначное отображение $V(t)$ измеримо и замкнутозначно, то в нем всегда существует хотя бы один измеримый селектор $v(t)$ [19]. Совокупность таких селекторов отображения $V(t)$ обозначим V_*.

Если игра (1)–(3) протекает на интервале $[t_0, T]$, то квазистратегия первого игрока [2] предписывает ему выбирать управление в момент t, $t \in [t_0, T]$, в виде измеримой функции

$$u(t) = u(g(T), v_t(\cdot)), \ \ t \in [t_0, T], \, u(t) \in U(t),$$

где $v_t(\cdot) = \{v(s) : s \in [t_0, t]\}$, т.е. на основе предыстории управления второго игрока. В этой же игре стробоскопическая стратегия Хайека [3] назначает первому игроку контруправление по Красовскому [2]

$$u(t) = u(g(T), v(t)), \ \ u(t) \in U(t), \, t \in [t_0, T],$$

причем при допустимом управлении $v(t)$ функция $u(t)$ должна быть измеримой.

Далее установим условия вывода траектории процесса (1) на множество $M^*(t)$ за некоторое гарантированное время для двух упомянутых типов информированности при любом допустимом противодействии второго игрока.

2. Схема метода

Пусть π — ортопроектор, действующий из R^n в L.

Положим

$$\varphi(\tau, U(\tau), v) = \{\varphi(\tau, u, v) : u \in U(\tau)\}, \ \ v \in V(\tau), \ \tau \geq t_0.$$

В силу предположений о параметрах конфликтно-управляемого процесса (1)–(3) и теоремы о прямом образе [19] это многозначное отображение измеримо по τ и непрерывно по v в метрике Хаусдорфа.

Введем многозначные отображения

$$W(t, \tau, v) = \pi\Omega(t, \tau)\, \varphi(\tau, U(\tau), v), \ \ v \in V(\tau),$$

$$W(t, \tau) = \bigcap_{v \in V(\tau)} W(t, \tau, v), \ \ t \geq \tau \geq t_0.$$

Обозначим

$$\Delta(t_0) = \{(t, \tau) : t_0 \leq \tau \leq t < +\infty\},$$

$$\operatorname{dom} W = \{(t, \tau) : W(t, \tau) \neq \varnothing\}.$$

Условие Понтрягина. Для конфликтно-управляемого процесса (1)–(3)

$$\operatorname{dom} W = \Delta(t_0).$$

Многозначное отображение $W(t,\tau)$ измеримо по τ и замкнутозначно для $(t,\tau)\in\Delta(t_0)$, поэтому в силу теоремы измеримого выбора [19] в нем существует измеримый по τ селектор $\gamma(t,\tau)$ такой, что $\gamma(t,\tau)\in W(t,\tau)$. Такие селекторы будем называть Понтрягинскими. Зафиксируем один из них и обозначим

$$\xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot)) = \pi g(t) + \int_{t_0}^{t} \gamma(t,\tau)\, d\tau\,, \quad t \ge t_0.$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$A(t,\tau,v) = \{\alpha \ge 0 : [W(t,\tau,v) - \gamma(t,\tau)] \bigcap \alpha[M(t) - \xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot))] \ne \varnothing\}, \tag{4}$$

$$(t,\tau)\in\Delta(t_0),\quad v\in V(\tau),\quad A(t,\tau,v)\in 2^{R_0},$$

образами которого являются числовые подмножества положительной полуоси R_0. Его опорная функция в направлении $+1$

$$\alpha(t,\tau,v) = \sup\{\alpha : \alpha\in A(t,\tau,v)\}$$

называется разрешающей [12].

Легко видеть, что функция $\alpha(t,\tau,v)$ может быть выражена обратными функционалами Минковского [12] для замкнутых множеств X из R^n, содержащих 0,

$$\alpha_X(p) = \sup\{\alpha \ge 0 : \alpha p \in X\},\ \ p\in R^n,$$

а именно,

$$\alpha(t,\tau,v) = \sup_{m\in M(t)} \alpha_{W(t,\tau,v)-\gamma(t,\tau)}(m - \xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot))).$$

В силу условия Понтрягина многозначное отображение $A(t,\tau,v)$ корректно определено и обладает непустыми замкнутыми образами для всех допустимых значений аргументов. При $\xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot))\in M(t)$ для некоторого $t\in R_{t_0}$, $A(t,\tau,v) = [0,+\infty)$ и, соответственно, $\alpha(t,\tau,v) = +\infty$ при любых $v\in V(\tau)$, $\tau\in[t_0,t]$.

Из теорем об обратном образе и характеризации [19] следует, что многозначное отображение $A(t,\tau,v)$ является $L\times B$-измеримым по τ, v, $v\in V(\tau)$, $\tau\in[t_0,t]$, а функция $\alpha(t,\tau,v)$ $L\times B$-измерима по тем же переменным в силу теоремы об опорной функции [19], а следовательно, является суперпозиционно измеримой [20].

Последнее обстоятельство позволяет ввести множество

$$T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) = \left\{ t \ge t_0 : \inf_{v(\cdot)\in V_*} \int_{t_0}^{t} \alpha(t,\tau,v(\tau))d\tau \ge 1 \right\}. \tag{5}$$

Заметим, что если $\xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot))\in M(t)$, то $\alpha(t,\tau,v) = +\infty$ для $v\in V(\tau)$, $\tau\in[t_0,t]$, а значение интеграла в (5) положим равным $+\infty$. В случае, когда неравенство в (5) не имеет места при всех $t > t_0$, положим $T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) = \varnothing$.

3. Достаточные условия сближения

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. Пусть для игровой задачи (1)–(3) выполнено условие Понтрягина, отображение $M(t)$ выпуклозначно для $t \ge t_0$. Тогда, если для блока начальных данных $g(\cdot)$ и некоторого Понтрягинского селектора $\gamma(\cdot,\cdot)$

$$T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) \neq \varnothing,$$

то траектория процесса (1) может быть приведена на терминальное множество (3) в момент T с помощью подходящей квазистратегии.

Доказательство. Пусть $v(\tau)$ — измеримый селектор многозначного отображения $V(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$. Рассмотрим сначала случай $\xi(T, g(T), \gamma(T,\cdot)) \notin M(T)$.

Согласно общей схеме метода разрешающих функций [12] введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \int_{t_0}^{t} \alpha(T, \tau, v(\tau))\, d\tau\ ,\ t \geq t_0.$$

Как было указано ранее, функция $\alpha(T, \tau, v)$ суперпозиционно измерима, а значит, $h(t)$ абсолютно непрерывна. Она, к тому же, не возрастает, $h(t_0) = 1$ и $h(T) \leq 0$. Поэтому в силу известной теоремы анализа существует такой момент времени t_*, $t_* \in [t_0, T]$, зависящий от $v(\cdot)$, что $h\,(t_*) = 0$.

Промежутки времени $[t_0, t_*)$, $[t_*, T]$ называют обычно активными и пассивными соответственно. Определим управление первого игрока на активном участке. Для этого рассмотрим компактнозначное отображение

$$U(\tau, v) = \{u \in U(\tau) : \pi\Omega(T, \tau)\,\varphi(\tau, u, v) - \gamma(T, \tau) \in$$

$$\in \alpha(T, t, v)[M(T) - \xi(T, g(T), \gamma(T,\cdot))]\},\ \ v \in V(\tau), \tau \in [t_0, t_*). \tag{6}$$

В силу теоремы об обратном образе [19] оно $L \times B$-измеримо и согласно теореме измеримого выбора содержит хотя бы один $L \times B$-измеримый селектор $u(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [20]. Положим управление первого игрока

$$u(\tau) = u(\tau, v(\tau)),\ \ \tau \in [t_0,\, t_*). \tag{7}$$

На пассивном участке рассмотрим многозначное отображение

$$U_0(\tau, v) = \{u \in U(\tau) : \pi\Omega(T, \tau)\,\varphi(\tau, u, v) - \gamma(T, \tau) = 0\}, \tag{8}$$

$$v \in V(\tau),\ \ \tau \in [t_*, \mathrm{T}],$$

совпадающее с отображением $U(\tau, v)$ при $\alpha(T, \tau, v) \equiv 0$.

По тем же причинам, что и в предыдущем случае, отображение $U_0(\tau, v)$ содержит суперпозиционно измеримый селектор $u_0(\tau, v)$. Положим управление первого игрока на пассивном участке равным

$$u_0(\tau) = u_0(\tau, v(\tau)),\ \ \tau \in [t_*, T]. \tag{9}$$

В случае $\xi(T, g(T), \gamma(T,\cdot)) \in M(T)$ выберем управление первого игрока на всем интервале $[t_0, T]$ в виде (9).

Далее покажем, что при указанном способе выбора управлений первым игроком траектория конфликтно-управляемого процесса (1) будет приведена на терминальное множество в момент T при любых допустимых управлениях второго игрока.

Пусть $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \notin M(T)$. Проекция траектории (1) на подпространство L имеет вид

$$\pi z(T) = \pi g(T) + \int_{t_0}^{T} \pi\Omega(T, \tau)\, \varphi(\tau, u(\tau), v(\tau))\, d\tau\,. \tag{10}$$

В силу соотношений (6)–(10) получим включение

$$\pi z(T) \in \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) + \int_{t_0}^{t_*} \alpha(T, \tau, v(\tau))\, M(T)\, d\tau\,. \tag{11}$$

Так как по предположению $M(T)$ — выпуклый компакт, а $\alpha(T, \tau, v(\tau))$ — неотрицательная измеримая функция для $\tau \in [t_0, t_*)$, причем $\int_{t_0}^{t_*} \alpha(T, \tau, v(\tau)) d\tau = 1$, то $\int_{t_0}^{t} \alpha(T, \tau, v(\tau))\, M(T)\, d\tau = M(T)$. Поэтому из включения (11) следует, что $\pi z(T) \in$ $\in M(T)$, т.е. $z(T) \in M^*(T)$.

В случае $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \in M(T)$ из представления (10) с учетом равенства в (8) получим

$$\pi z(T) = \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \in M(T).$$

Таким образом, теорема доказана.

Заметим, что для определения момента t_*, разделяющего активный и пассивный участки, необходимо знание предыстории управления второго игрока. Это свидетельствует о том, что первым игроком используется квазистратегия. Если же $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \in M(T)$, то, как видно из доказательства, первый игрок применяет стробоскопическую стратегию. В последнем случае, как неоднократно отмечалось, минимальное гарантированное время сближения данного метода совпадает с гарантированным временем первого прямого метода Понтрягина [12].

4. Стробоскопические стратегии

Представляет интерес вопрос о том, при каких дополнительных предположениях относительно параметров конфликтно-управляемого процесса (1)–(3) доказанная теорема может быть реализована во всех случаях в классе стробоскопических стратегий, т.е. без использования предыстории управления второго игрока, а только контруправлений.

Сформулируем эти условия для $T \in (T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \neq \emptyset$.

Условие 1. Отображение $A(t, \tau, v)$ является выпуклозначным, т.е.

$$A(t, \tau, v) = [0, \alpha(T, \tau, v(\tau))] \quad \forall v \in V(\tau), \;\; T \geq \tau \geq t_0.$$

Условие 2. Функция $\alpha(\tau) = \inf\limits_{v \in V(\tau)} \alpha(T, \tau, v)$ измерима по τ, $\tau \in [t_0, T]$, и

$$\inf_{v(\cdot) \in V_*} \int_{t_0}^{T} \alpha(T, \tau, v(\tau))\, d\tau = \int_{t_0}^{T} \alpha(\tau)\, d\tau.$$

Следствие. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1)–(3) выполнено условие Понтрягина, $M(t) = \mathrm{co}\, M(t)$, $t \geq t_0$, для некоторой функции $g(\cdot)$ и Понтрягинского селектора $\gamma(\cdot,\cdot)$ $T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) \neq \emptyset$.

ISSN 0572-2691

Тогда для любого $T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$, такого, что выполнены условия 1 и 2, траектория системы (1) может быть приведена на терминальное множество $M^*(t)$ в момент T с использованием стробоскопической стратегии.

Доказательство. Пусть $v(\cdot) \in V_*$ и $\xi(T, g(T), \gamma(T,\cdot)) \notin M(T)$.

Обозначим $\alpha_T = \int\limits_{t_0}^{T} \inf\limits_{v \in V(\tau)} \alpha(T, \tau, v)\, d\tau$ и положим $\alpha^*(T, \tau) = 1 / \alpha_T \times$ $\times \inf\limits_{v \in V(t)} \alpha(T, \tau, v)$.

Поскольку $\alpha_T \geq 1$ в силу формулы (5) и условия 2, а также учитывая условие 1, получим неравенство

$$\alpha^*(T, \tau) \leq \alpha(T, \tau, v) \quad \forall v \in V(\tau), \ \tau \in [t_0, T],$$

следовательно, $\alpha^*(T, \tau)$ является измеримым селектором многозначного отображения $A(T, \tau, v)$, т.е. $\alpha^*(T, \tau) \in A(T, \tau, v)$, $v \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$.

Рассмотрим многозначное отображение

$$U^*(\tau, v) = \{u \in U(\tau) : \pi\Omega(T, \tau)\varphi(\tau, u, v) - \gamma(T, \tau) \in$$

$$\in \alpha^*(T, \tau)[M(T) - \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))]\}, \ v \in V(\tau), \tau \in [t_0, T]. \quad (12)$$

Из выражения (12) и предположений о параметрах конфликтно-управляемого процесса (1)–(3) следует, что отображение $U^*(\tau, v)$ компактнозначно и $L \times B$-измеримо. Поэтому в силу теоремы об измеримом выборе [19] в нем существует $L \times B$-измеримый селектор $u^*(\tau, v)$, являющийся суперпозиционно измеримой функцией. Положим управление первого игрока равным

$$u^*(\tau) = u^*(\tau, v(\tau)), \ \tau \in [t_0, T]. \quad (13)$$

При $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \in M(T)$ выберем управление первого игрока на всем интервале $[t_0, T]$ в виде (9). Проследим за траекторией процесса (1). При $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \notin M(T)$ из представления (10) с учетом включения в выражении (12) и закона управления (13)

$$\pi z(T) \in \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \left[1 - \int\limits_{t_0}^{T} \alpha^*(T, \tau)\, d\tau\right] + \int\limits_{t_0}^{T} \alpha^*(T, \tau)\, M(T)\, d\tau. \quad (14)$$

Поскольку $M(T)$ — выпуклый компакт, $\alpha^*(T, \tau)$ — неотрицательная функция и $\int\limits_{t_0}^{T} \alpha^*(T, \tau) = 1$,

$$\int\limits_{t_0}^{T} \alpha^*(T, \tau)\, M(T)\, d\tau = M(T).$$

Таким образом, из включения (14) получим $\pi z(T) \in M(T)$. Это же включение получим и при $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \in M(T)$ из представления (10) с учетом закона выбора управления первым игроком в виде (9) на всем интервале $[t_0, T]$.

5. Иллюстративный пример

Рассмотрим иллюстративный пример конфликтно-управляемого процесса, который задается системой линейных дифференциальных уравнений с простой матрицей

$$\dot{z} = -a(t)\,z + b(t)\,u - c(t)\,v, \quad z(t_0) = z_0, \quad t \ge t_0 \ge 0,$$

где $u \in S, v \in S, \quad S = \{z : \|z\| \le 1\}$ — единичный шар, а непрерывные ограниченные функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ принимают неотрицательные значения при $t \ge t_0$. Терминальное множество $M^*(t) = \varepsilon(t)\,S$ — переменная окрестность начала координат, $\varepsilon(t) \ge 0, \varepsilon(t)$ — непрерывная ограниченная функция.

В данном примере

$$g(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} z_0, \quad \Omega(t, \tau) = e^{-\int_{\tau}^{t} a(s)ds} \cdot E, \; E \text{ — единичная матрица},$$

$$U(t) = b(t)\,S, \; V(t) = c(t)\,S, \; M_0 = \{0\}, \; L = M_0^{\perp} = R^n, \; \pi = E, \; M(t) = \varepsilon(t)\,S,$$

$$\varphi(\tau, u, v) = b(\tau)\,u - c(\tau)\,v.$$

Понтрягинское многозначное отображение

$$W(t, \tau) = e^{-\int_{\tau}^{t} a(s)ds} \cdot b(\tau)\,S \overset{*}{-} e^{-\int_{\tau}^{t} a(s)ds} \cdot c(\tau)\,S = e^{-\int_{\tau}^{t} a(s)ds} (b(\tau) - c(\tau))\,S,$$

где $\overset{*}{-}$ — геометрическая разность множеств Минковского [12]. Условие Понтрягина выполнено, если $b(\tau) \ge c(\tau)$ для $\tau \ge t_0$.

В шарообразном отображении $W(t, \tau)$ в качестве понтрягинского селектора $\gamma(t, \tau)$ выберем его центр, т.е. $\gamma(t, \tau) \equiv 0.$ Тогда

$$\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} z_0,$$

а многозначное отображение

$$A(t, \tau, v) = \left\{ \alpha \ge 0 : e^{-\int_{\tau}^{t} a(s)ds} (b(\tau)\,S - c(\tau)\,v) \cap \alpha[\varepsilon(t)\,S - e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} z_0] \ne \varnothing \right\} =$$

$$= \left\{ \alpha \ge 0 : \alpha e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} z_0 - e^{-\int_{\tau}^{t} a(s)ds} c(\tau)v \in [\alpha\varepsilon(t) + e^{-\int_{\tau}^{t} a(s)ds} b(\tau)]\,S \right\}.$$

Опорная функция образов этого многозначного отображения в направлении $+1$ является большим положительным корнем квадратного уравнения относительно α

$$\left\| \alpha e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} z_0 - e^{-\int_{\tau}^{t} a(s)ds} c(\tau)v \right\| = \alpha\varepsilon(t) + e^{-\int_{\tau}^{t} a(s)ds} b(\tau).$$

Далее, обозначив $\Phi(t, \tau) = e^{-\int_{\tau}^{t} a(s)ds}$, а $\Phi(t, t_0) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$, получим

$$\alpha(t,\tau,v)=\frac{(\Phi(t,\tau)\,c(\tau)\,v,\,\Phi(t,t_0)\,z_0)+\varepsilon(t)\,\Phi(t,\tau)\,b(\tau)}{\|\Phi(t,t_0)\,z_0\|^2-\varepsilon^2(t)}+$$

$$+\frac{\sqrt{(\Phi(t,\tau)c(\tau)v,\Phi(t,t_0)z_0)+\varepsilon(t)\Phi(t,\tau)b(\tau)+(\|\Phi(t,t_0)z_0\|^2-\varepsilon^2(t))\Phi^2(t,\tau)(b^2(\tau)-c^2(\tau)\|v\|^2)}}{\|\Phi(t,t_0)z_0\|^2-\varepsilon^2(t)}.$$

Тогда

$$\min_{v\in S}\alpha(t,\tau,v)=\frac{\Phi(t,\tau)(b(\tau)-c(\tau))}{\|\Phi(t,t_0)\,z_0\|-\varepsilon(t)}$$

и достигается на элементе $v=-\frac{z_0}{\|z_0\|}$, следовательно,

$$T(\Phi(t,t_0)\,z_0,0)=\left\{t\geq t_0:\int_{t_0}^{t}\frac{\Phi(t,\tau)(b(\tau)-c(\tau))}{\|\Phi(t,t_0)\,z_0\|-\varepsilon(t)}d\tau\geq 1\right\}.$$

В некоторых частных случаях наименьшее гарантированное время может быть найдено в явном виде. Если $t_0=0,\ a(t)=0,\ b(t)=0,\ c(t)=c,\ \varepsilon(t)=\varepsilon,$ при $t\geq 0,$ то

$$t_1=\min\{t:t\in T(z_0,0)\}=\frac{\|z_0\|-\varepsilon}{b-c},$$

а если же $t_0=0,\ a(t)=a,\ b(t)=b,\ c(t)=c,\ \varepsilon(t)=0,$ то

$$t_2=\min\{t:t\in T(e^{-at}z_0,0)\}=\frac{1}{a}\ln\left(1+\frac{\|z_0\|}{b-c}\right),$$

причем t_1 и t_2 являются оптимальными гарантированными временами сближения.

В.А. Пепеляєв, Ол.А. Чикрій

ПРО ІГРОВІ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ДЛЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ КЕРОВАНИХ ПРОЦЕСІВ

Розглянуто ігрові задачі про зближення для нестаціонарних динамічних процесів загального вигляду з циліндричною термінальною множиною. На основі методу розв’язуючих функцій отримано достатні умови завершення гри за скінчений час в класі квазі- та стробоскопічних стратегій. Результати ілюструються на модельному прикладі з простою матрицею.

V.A. Pepelyaev, Al.A. Chikrii

ON THE GAME DYNAMIC PROBLEMS FOR NONSTATIONARY CONTROLLED PROCESSES

The game problems of pursuit for nonstationary controlled processes of general type with cylindrical terminal set are considered. On the basis of the method of resolving functions the sufficient conditions for the game termination in the finite time in the class of quasi- and stroboscopic strategies are derived. The results are illustrated on the model example with simple matrix.

1. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. — М. : Наука, 1988, — **2**. — 576 с.
2. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. — М. : Наука, 1970. — 420 с.
3. *Hajek O.* Pursuit games. — New York : Academic Press, 1975. — **12**. — 266 p.
4. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры . — М. : Мир, 1967. — 480 с
5. *Локк А.С.* Управление снарядами. — М. : Гос.изд-во техн.-теор. л-ры, 1957. — 775 с.
6. *Chikrii A.A., Chikri G.Ts., Volyanskiy K.Y.* Quasilinear positional integral games of approach // Journal of Automation and Information Sciences. — 2001. — **33**, N 10. — P. 31–43.
7. *Chikri G.Ts.* Using the effect of information delay in differential pursuit games // Cybernetics and systems analysis. — 2007. — **43**, N 2. — P. 233–245.
8. *Чикрий А.А., Эйдельман С.Д.* Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана–Лиувилля // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 6. — С. 66–99.
9. *Чикрий А.А., Эйдельман С.Д.* Обобщенные матричные функции Миттаг–Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка // Там же. — 2000. — № 3. — С. 3–32.
10. *Кривонос Ю.Г, Матичин И.И., Чикрий А.А.* Динамические игры с разрывными траекториями. — Киев : Наук. думка, 2005. — 220 с.
11. *Чикрий А.А., Белоусов А.А.* О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. — Труды ИММ УрО РАН. — 2009. — **15**. № 4. — С. 290–301.
12. *Chikrii A.A.* Conflict controlled processes. — Boston; London; Dordrecht: Springer Science and Busines Media, 2013. — 424 p.
13. *Chikrii A.A., Kalashnikova S.F.* Pursuit of a group of evaders by a single controlled object // Cybernetics. — 1987. — **23**, N 4. — P. 437–445.
14. *Chikrii V.K.* Mean approach time for game problems with random perturbations // Journal of Automation and Information Sciences. — 2015. — **47**, N 8. — P. 74–84.
15. *Chikrii A.A., Chikrii V.K.* Image structure of multivalued mapping in game problems of motion control // Ibid. — 2016. — **48**, N 3. — P. 20–35.
16. *Belousov A.A., Kuleshyn V.V.* Game approach to control of running start of aircraft on its take off // Ibid. — 2012. — **44**, N 8. — P. 78–84.
17. *Chikrii A.A., Belousov A.A.* Game problems of «soft landing» for second — order systems // Journal of Mathematical Sciences. — 2006. — **139**(5). — P. 6997–7012.
18. *Analitical* method for solution of the game problem of soft landing for moving objects / J. Albus, A. Meystel, A.A. Chikrii, A.A. Belousov, A.J. Kozlov // Cybernetics and systems analysis. — 2001. — **37**, N 1. — P. 75–91.
19. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. — Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. — 461 p.
20. *Chikrii A.A.* An analitical method in dynamic pursuit games // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2010. — **271**. — P. 69–85.

Получено 13.12.2016