УДК 519.85

О.А. Емец, Т.Н. Барболина

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ БЕЗУСЛОВНОЙ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА РАЗМЕЩЕНИЯХ

Введение

Задачи комбинаторной оптимизации, являющиеся моделями практических задач из различных отраслей, интересуют многих исследователей (см., например, [1–14]). Интерес к оптимизационным задачам с ограничениями комбинаторного характера обусловил выделение задач на так называемых евклидовых комбинаторных множествах ([5–14] и др.). Важный класс таких задач составляют задачи на общем множестве размещений. Исследованы свойства выпуклой оболочки общего множества размещений, предложены и обоснованы алгоритмы решения некоторых классов оптимизационных задач на размещениях. В частности, в [8, 11] рассматривается решение задач с дробно-линейной целевой функцией без дополнительных (некомбинаторных) ограничений: установлен ряд свойств таких задач, обоснован аналитический метод нахождения минимали дробно-линейной целевой функции на общем множестве размещений [8], предложен метод нахождения всех минималей [13].

Исследование дробно-линейных задач на размещениях в [8, 11] основывается на подходе «линеаризации» задачи, т.е. сведения ее к задаче линейного программирования путем применения определенного преобразования. При этом появляется дополнительное ограничение, что не позволяет использовать критерий минимали в линейной безусловной задаче на размещениях [14]. Вместе с тем отметим, что теоретические оценки эффективности аналитического метода решения задачи минимизации, в основе которого лежит перебор вершин некоторого многогранника, не получены.

Цель данной статьи — обоснование полиномиального метода для решения указанного класса задач. Предлагаемый метод предусматривает сведение задачи к решению конечной последовательности линейных задач оптимизации на размещениях, т.е. идейно близок параметрическому методу решения задач дробно-линейного программирования [15].

В дальнейшем будем использовать терминологию из [5] относительно евклидовых задач комбинаторной оптимизации. В частности, под мультимножеством понимаем совокупность элементов, среди которых могут быть одинаковые. Упорядоченной k-выборкой из мультимножества $G=\{g_1,...,g_\eta\}$ называется набор $(g_{i_1},...,g_{i_k})$, где $g_{i_j}\in G$ $i_j\ne i_t$ $\forall i_j, i_t\in J_\eta$, $\forall j,t\in J_k$ (здесь и далее J_n — множество n первых натуральных чисел). Множество всех упорядоченных k-выборок из мультимножества G называют общим множеством размещений $E_\eta^k(G)$.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу комбинаторной оптимизации дробно-линейной функции $\Phi(x)=\left(\sum_{j=1}^{k} c_j x_j + c_0\right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{k} d_j x_j + d_0\right)$ на размещениях в такой постановке: найти пару $\left\langle \Phi(x^*), x^* \right\rangle$ такую, что

$$\Phi(x^*)=\min_{x\in E_\eta^k(G)} \Phi(x),\ \ x^*=\arg\min_{x\in E_\eta^k(G)} \Phi(x), \tag{1}$$

где $x=(x_1,...,x_k)\in R^k$, $c_j, d_j \in R^1$ $\forall j\in J_k^0$ (здесь и далее $J_r^s=\{s, s+1,..., r\}$, в частности, $J_n^1=J_n$), $E_\eta^k(G)$ — общее множество размещений из элементов мультимножества $G=\{g_1,..., g_\eta\}$. Полагаем, что $d_1\ge d_2\ge ...\ge d_k$. Пусть также для произвольного $x\in E_\eta^k(G)$ выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^{k} d_j x_j + d_0 > 0. \tag{2}$$

Пусть функция $\phi(x, a)=\sum_{j=1}^{k} x_j \bar{c}_j(a)$, где $\bar{c}_j(a)=c_j-a\cdot d_j$. Вместе с задачей (1) рассмотрим задачу минимизации на множестве $E_\eta^k(G)$ функции $\phi(x, a)$ при определенном значении a: найти $\left\langle \phi(x^*, a), x^* \right\rangle$ такую, что

$$\phi(x^*, a)=\min_{x\in E_\eta^k(G)} \sum_{j=1}^{k} x_j \bar{c}_j(a),\ \ x^*=\arg\min_{x\in E_\eta^k(G)} \sum_{j=1}^{k} x_j \bar{c}_j(a). \tag{3}$$

Если для минимали в задаче (3) выполняется соотношение $\phi(x^*, a)= =ad_0-c_0$, то $\left\langle a, x^* \right\rangle$ — решение задачи (1). Действительно, так как x^* — минималь в задаче (3), то для произвольного $x\in E_\eta^k(G)$ выполняется неравенство $\phi(x, a)\ge \phi(x^*, a)$, т.е. $\sum_{j=1}^{k}(c_j-ad_j)x_j \ge ad_0-c_0$. Последнее неравенство с учетом условия (2) равносильно $\left(\sum_{j=1}^{k} c_j x_j + c_0\right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{k} d_j x_j + d_0\right)\ge a$, значит, a — минимум функции $\Phi(x)$ на $E_\eta^k(G)$. Поскольку также из $\sum_{j=1}^{k}(c_j-ad_j)x_j^* = ad_0-c_0$ следует $\Phi(x^*)=a$, то x^* удовлетворяет условию (1).

Общая схема метода

Если элементы мультимножества G упорядочены по неубыванию $g_1\le ...\le g_\eta$, а коэффициенты функции $\phi(x, a)$ при определенном a удовлетворяют условию $\bar{c}_1(a)\ge ...\ge \bar{c}_p(a)>0\ge \bar{c}_{p+1}(a)\ge ...\ge \bar{c}_k(a)$, то, как показано в [5], одна из минималей функции $\phi(x, a)$ на множестве $E_\eta^k(G)$ удовлетворяет условиям

$$x_j^*=g_j\ \ \forall j\in J_p^1\ \ x_j^*=g_{\eta-k+j}\ \ \forall j\in J_k^{p+1}. \tag{4}$$

Однако при ином значении a упорядочение коэффициентов может измениться и точка (4) не будет минималью в задаче (3). Выясним, при каких условиях выполняется неравенство $\bar{c}_i(a) \geq \bar{c}_j(a)$, где $i < j$. Так как неравенство $\bar{c}_i(a) \geq \bar{c}_j(a)$ равносильно $c_i - c_j \geq a(d_i - d_j)$, то при $d_i = d_j$ упорядочение величин $\bar{c}_i(a)$ и $\bar{c}_j(a)$ не зависит от значения a и совпадает с упорядочением величин c_i и c_j. Если $d_i \neq d_j$ (а тогда из условия $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_k$ имеем, что $d_i > d_j$), то $\bar{c}_i(a) \geq \bar{c}_j(a)$, если и только если $a \leq \dfrac{c_i - c_j}{d_i - d_j}$. Для всех $i \in J_{k-1}$, $j \in J_k^{i+1}$ определим величины

$$A(i, j) = \begin{cases} \dfrac{c_i - c_j}{d_i - d_j}, & \text{если } d_i \neq d_j; \\ M, & \text{если } d_i = d_j, c_i \geq c_j; \\ -M, & \text{если } d_i = d_j, c_i < c_j, \end{cases} \tag{5}$$

где M — достаточно большое положительное число. С учетом введенного обозначения при $|a| < M$ неравенство $\bar{c}_i(a) \geq \bar{c}_j(a)$ выполняется, если и только если $a \leq A(i, j)$.

Отметим, что при $d_1 = ... = d_k$ упорядочение коэффициентов функции $\phi(x, a)$ не зависит от значения a, поэтому в дальнейшем будем рассматривать случай, когда среди чисел $d_1, ..., d_k$ есть различные. Тогда среди величин (5) существует, по крайней мере, одна, отличная от $\pm M$.

Упорядочим величины (5) по неубыванию:

$$A(i_1, j_1) = ... = A(i_{r-1}, j_{r-1}) = -M < A(i_r, j_r) \leq ...$$
$$... \leq A(i_s, j_s) < M = A(i_{s+1}, j_{s+1}) = ... = A(i_m, j_m),$$

где $m = \dfrac{k(k-1)}{2}$. Обозначим $I(h) = \{a \,|\, A(i_h, j_h) < a \leq A(i_{h+1}, j_{h+1})\}$ для всех $h \in J_{s-1}^r$. Тогда $\forall a \in I(h)$ имеем $a > A(i_h, j_h) \geq A(i_t, j_t)$ $\forall t \in J_h$, откуда $\bar{c}_{i_t}(a) < \bar{c}_{j_t}(a)$. Аналогично вследствие $a \leq A(i_t, j_t)$ $\forall t \in J_m^{h+1}$ получаем $\bar{c}_{i_t}(a) \geq \bar{c}_{j_t}(a)$.

Пусть $I(r-1) = \{a \,|\, a \leq A(i_r, j_r)\}$, $I(s) = \{a \,|\, a > A(i_s, j_s)\}$. Тогда для произвольного $a \in I(r-1)$ имеем $\bar{c}_{i_t}(a) \geq \bar{c}_{j_t}(a)$ $\forall t \in J_m^r$. Также из $A(i_1, j_1) = ... = A(i_{r-1}, j_{r-1}) = -M$ (если $r - 1 \geq 1$) следует, что $\bar{c}_{i_t}(a) < \bar{c}_{j_t}(a)$ $\forall t \in J_{r-1}$ при произвольном a, в том числе для всех $a \in I(r-1)$. Аналогично для любого $a \in I(s)$ имеем $\bar{c}_{i_t}(a) < \bar{c}_{j_t}(a)$ $\forall t \in J_s$, $\bar{c}_{i_t}(a) \geq \bar{c}_{j_t}(a)$ $\forall t \in J_m^{s+1}$ (если $s + 1 \leq m$).

Таким образом, $\forall a \in I(h)$, где $h \in J_s^{r-1}$, коэффициенты функции $\phi(x, a)$ удовлетворяют условиям

$$\bar{c}_{i_t}(a) < \bar{c}_{j_t}(a) \quad \forall t \in J_h^1, \quad \bar{c}_{i_t}(a) \geq \bar{c}_{j_t}(a) \quad \forall t \in J_m^{h+1}. \tag{6}$$

Отметим также, что когда для $a \in I(h)$ $(h \in J_{s-1}^r)$, $t \in J_m$, $i_t < j_t$ выполняется неравенство $\bar{c}_{i_t}(a) \geq \bar{c}_{j_t}(a)$, то $a \leq A(i_t, j_t)$, т.е. $A(i_t, j_t) \geq A(i_{h+1}, j_{h+1})$. Аналогично из $\bar{c}_{i_t}(a) < \bar{c}_{j_t}(a)$ следует $A(i_t, j_t) \leq A(i_h, j_h)$.

Пример 1. Пусть $\Phi(x)=\dfrac{-3x_1-2x_2-3x_3+2x_4-1}{17x_1+17x_2+17x_3+16x_4+2}$. Вычислим величины (5): так как $d_1=d_2=17$, а $c_1=-3<c_2-2$, то $A(1;2)=-M$; аналогично $A(1;3)=-M$; $A(1;4)=\dfrac{-3-2}{17-16}=-5$; $A(2;3)=M$, так как $d_2=d_3$ и $c_2>c_3$; $A(2;4)=-4$; $A(3;4)=-5$. Упорядочение величин (5) по неубыванию имеет вид

$$A(1;2)=A(1;3)=-M<A(1;4)=A(3;4)<A(2;4)<M=A(2;3).$$

В этом случае $r=3$ $(i_r=1,\ \ j_r=4)$, $s=5$ $(i_s=2,\ \ j_s=4)$. Сформируем множества $I(h): I(r-1)=I(2)=\{a\mid a\le A(1;4)=-5\}$, $I(3)=\{a\mid -5<a\le A(3,4)=$ $=-5\}=\varnothing$, $I(4)=\{a\mid -5<a\le -4\}$, $I(5)=I(s+1)=\{a\mid a>-4\}$.

Условие (6) определяет упорядочение коэффициентов функции $\phi(x,a)$. В этом случае для определения минимали в задаче (3), как видно из (4), достаточно знать среди коэффициентов $\bar{c}_l(a)$ количество положительных.

Пусть $p\in J_k$, точка x^* удовлетворяет условию (3), где $a\in I(h)$. Вычислим $a^*=\Phi(x^*)$. Если также $a^*\in I(t)$, причем среди чисел $c_l-a^*d_l$ $(l\in J_k)$ имеем p положительных, то x^* — также минималь функции $\phi(x,a^*)$ на множестве $E^k_\eta(G)$. Тогда, как показано выше, $\langle a^*, x^*\rangle$ является решением задачи (1).

Если ни для одного $p\in J_k$ минималь функции $\Phi(x)$ на множестве $E^k_\eta(G)$ найдена не будет, то перейдем к рассмотрению следующего значения t. При этом если $A(i_{h+f-1}, j_{h+f-1})=A(i_{h+1}, j_{h+1})$, то $I(h+f)=\varnothing$. Поэтому полагаем следующее значение h равным предыдущему, увеличенному на f, где f — наибольшее число, для которого $A(i_{h+f}, j_{h+f})=A(i_{h+1}, j_{h+1})$.

Так как $\bigcup\limits_{h\in J_s^{r-1}} I(h)=R^1$, то для некоторых значений h и p будет найдена точка x, которая удовлетворяет (3) и для которой $\Phi(x)\in I(h)$, причем среди чисел $c_l-a^*d_l$ $(l\in J_k)$ имеем p положительных. Как показано выше, эта точка является минималью в задаче (1).

Следовательно, приходим к такой схеме решения задачи (1).

Шаг 0. Полагаем $n=1$.

Шаг 1. Вычисляем согласно (5) величины $A(i,j)$ для всех $i\in J_k$, $j\in J_k^{i+1}$. Упорядочиваем их по неубыванию.

Шаг 2. Полагаем $h=r-1$, где r — номер первого слева (наименьшего) $A(i,j)\ne -M$.

Шаг 3. Используя соотношение (6), упорядочиваем коэффициенты $\bar{c}_l(a)$ функции $\phi(x,a)$.

Шаг 4. Количество p положительных среди коэффициентов $\bar{c}_l(a)$ полагаем равным 0.

Шаг 5. Формируем минималь x^n согласно (4) и вычисляем $a^n=\Phi(x^n)$.

Шаг 6. Если $a^n\in I(h)$ и среди чисел $\bar{c}_l(a^n)=c_l-a^nd_l$ $(l\in J_k)$ имеется p положительных, то процесс завершается: пара $\langle a^n, x^n\rangle$ является решением задачи (1). В противном случае увеличиваем p на единицу.

Шаг 7. Если $p<k$, то увеличиваем n на единицу и возвращаемся к шагу 5, иначе переходим к шагу 8.

Шаг 8. Находим наибольшее число f такое, что $A(i_{h+f}, j_{h+f}) = A(i_{h+1}, j_{h+1})$. Увеличиваем h до $h+f$ и переходим к шагу 3.

Отметим, что минималь, полученная в соответствии с предложенной выше схемой метода, может оказаться не единственной. Для получения остальных решений может использоваться поход, приведенный в [13].

Обоснование алгоритма

Рассмотрим детальнее реализацию предложенной выше схемы метода решения дробно-линейной задачи на размещениях.

Пусть $h \in J_s^{r-1}$, причем $I(h) \neq \varnothing$, $l \in J_k$. Условие (6) определяет соотношение между произвольной парой коэффициентов $\bar{c}_i(a)$ и $\bar{c}_j(a)$, $i \in J_k$, $j \in J_k^{i+1}$. Пользуясь этими соотношениями, найдем для каждого $l \in J_k$ множество $u_h(l)$ индексов тех коэффициентов функции $\phi(x, a)$, которые не больше $\bar{c}_l(a)$. При этом в случае равных коэффициентов неравенство $\bar{c}_l(a) \geq \bar{c}_j(a)$, где $l > j$, не будем учитывать.

Из (6) следует, что для всех $t \in J_h$ таких, что $j_t = l$, выполняется неравенство $\bar{c}_{i_t}(a) < \bar{c}_{j_t}(a) = \bar{c}_l(a)$. Аналогично для всех $t \in J_m^{h+1}$ таких, что $i_t = l$, выполняется неравенство $\bar{c}_{i_t}(a) = \bar{c}_l(a) \geq \bar{c}_{j_t}(a)$, причем $i_t < j_t$.

Следовательно, при заданном $h \in J_s^{r-1}$ множество $u_h(l)$, $l \in J_k$, формируется следующим образом:

$$u_h(l) = \{i_t \,|\, t \in J_h^1,\ j_t = l\} \cup \{j_t \,|\, t \in J_m^{h+1}, i_t = l\}. \tag{7}$$

Пример 2. Рассмотрим функцию $\Phi(x)$ из примера 1. Сформируем $u_h(l)$ для $h = 2$, $l \in J_4$. При $l = 1$ имеем:

- для $t \leq 2$: $j_1 = 2 \neq 1$, $j_2 = 3 \neq 1$;
- для $t \geq 3$: $i_3 = 1$, поэтому $j_3 = 4 \in u_2(1)$; учитывая, что i_4, i_5, i_6 отличны от 1, получаем $u_2(1) = \varnothing \cup \{4\} = \{4\}$;
- для $l = 2$: $j_1 = 2$, поэтому $i_1 = 1 \in u_2(2)$; $i_5 = i_6 = 2$, поэтому $j_5 = 4 \in u_2(2)$, $j_6 = 3 \in u_2(2)$. Таким образом, $u_2(2) = \{1; 3; 4\}$.

Поскольку $j_2 = i_4 = 3$, то $u_2(3) = \{i_2; j_4\} = \{1; 4\}$. Аналогично $u_2(4) = \varnothing$.

Покажем, как упорядочить коэффициенты функции $\phi(x, a)$ на основе сведений о количестве элементов во множествах (7).

Для всех $j \in u_h(l)$ имеем $\bar{c}_l(a) \geq \bar{c}_j(a)$. Так как для произвольных $l \in J_k$, $q \in J_k^{l+1}$ найдется такое $t \in J_m$, что $i_t = l$, $j_t = q$, то либо $l \in u_h(q)$ (если $t \leq h$), либо $q \in u_h(l)$ (если $t > h$). Пусть для определенности $l \in u_h(q)$. Тогда $\bar{c}_q(a) \geq \bar{c}_l(a) \geq \bar{c}_i(a)$ $\forall i \in u_h(l)$ $\forall a \in I(h)$. Значит, $|u_h(q)| > |u_h(q)|$ ($|U|$ обозначает количество элементов во множестве U). Поскольку рассуждения справедливы для произвольных $l, q \in J_k$, количество элементов во всех множествах $u_h(l)$ различное.

Пусть индексы q_t таковы, что выполняется неравенство

$$|u_h(q_1)| > |u_h(q_2)| > \ldots > |u_h(q_k)|. \tag{8}$$

Тогда $\bar{c}_{q_1}(a)$ не меньше всех других коэффициентов, $\bar{c}_{q_2}(a)$ меньше разве что $\bar{c}_{q_1}(a)$ и т.д. Таким образом,

$$\bar{c}_{q_1}(a) \geq \bar{c}_{q_2}(a) \geq \ldots \geq \bar{c}_{q_k}(a) \quad \forall a \in I(h). \tag{9}$$

Следовательно, для упорядочения коэффициентов функции $\phi(x, a)$ по неубыванию необходимо:

1) найти количество элементов во множествах вида (7) для всех $l \in J_k$;

2) упорядочить индексы q_t таким образом, чтобы выполнялось условие (8).

Отметим, что формирование множеств (7) для упорядочения коэффициентов необязательно: количество элементов во множествах можно подсчитать, просматривая величины (5) для $t \in J_m$. При этом для каждого $t \in J_h$ увеличиваем на единицу количество элементов во множестве $u_h(j_t)$, а для каждого $t \in J_m^{h+1}$ — количество элементов во множестве $u_h(i_t)$.

Схема решения задачи (1) предусматривает формирование точки вида (4) для количества p положительных коэффициентов функции $\phi(x, a)$ от 0 до k. Однако некоторые из коэффициентов могут быть положительными (отрицательными) при всех $a \in I(h)$. Зная количество таких коэффициентов, можно уменьшить количество «подозрительных» на минималь точек.

Так как для произвольного $l \in J_k$ $\overline{c}_l(a) = c_l - ad_l \geq c_l - A(i_{h+1}, j_{h+1})d_l$, то при $c_l > A(i_{h+1}, j_{h+1})d_l$ имеем $\overline{c}_l(a) > 0$ $\forall a \in I(h)$. Если v — наибольший индекс такой, что $c_{q_v} > A(i_{h+1}, j_{h+1})d_{q_v}$, то $\overline{c}_{q_t}(a) > 0$ $\forall t \in J_v$ $\forall a \in I(h)$. Если таких индексов не существует (т.е. $c_{q_v} \leq A(i_{h+1}, j_{h+1})d_{q_v}$ $\forall v \in J_k$), то нет коэффициентов, которые были бы положительными при всех $a \in I(h)$. В этом случае полагаем $v = 0$. Аналогично, если w — наименьший индекс такой, что $c_{q_{w+1}} \leq$ $\leq A(i_h, j_h)d_{q_{w+1}}$, то $\overline{c}_{q_t}(a) \leq 0$ $\forall t \in J_k^{w+1}$ $\forall a \in I(h)$ (если таких индексов не существует, то полагаем $w = k$). Таким образом, положительных среди коэффициентов функции $\phi(x, a)$ для произвольных $a \in I(h)$ не меньше v и не больше w.

Пример 3. Для функции $\Phi(x)$ из примеров 1, 2 при $h = 2$ имеем $|u_2(2)| >$ $> |u_2(3)| > |u_2(1)| > |u_2(4)|$. Значит, $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, $q_3 = 1$, $q_4 = 4$ и для всех $a \in I(2)$ выполняется неравенство $\overline{c}_2(a) \geq \overline{c}_3(a) \geq \overline{c}_1(a) \geq \overline{c}_4(a)$. Определим диапазон возможных значений для количества p положительных коэффициентов.

Поскольку $A(i_3, j_3) = -5$ и $c_4 = 2 > -5 \cdot d_4 = -5 \cdot 16$, причем $q_4 = 4$, то наименьшее возможное количество положительных коэффициентов $v = 4$. Вместе с тем вследствие $A(i_2, j_2) = -M$ имеем $c_j > A(i_h, j_h)d_j$ $\forall j \in J_k$, поэтому $w = k = 4$. Таким образом, при любом $a \in I(2)$ все коэффициенты функции $\phi(x, a)$ положительны.

Для проверки, является ли точка x^n, сформированная согласно (4), минималью в задаче (1), необходимо определить количество положительных среди чисел $\overline{c}_l(a^n) = c_l - a^n d_l$, $l \in J_k$, где $a^n = \Phi(x^n)$. Так как выполняется условие (9), то:

- при $\overline{c}_{q_1}(a^n) \leq 0$ среди чисел $\overline{c}_l(a^n)$ нет положительных;
- при $\overline{c}_{q_k}(a^n) > 0$ все числа $\overline{c}_l(a^n)$ положительны;
- если $\overline{c}_{q_p}(a^n) > 0$ и $\overline{c}_{q_{p+1}}(a^n) \leq 0$ $(p \in J_{k-1}^1)$, то среди чисел $\overline{c}_l(a^n)$ имеем p положительных.

Для упрощения проверки положим $c_0 = M$, $c_{k+1} = -M$, $d_0 = d_{k+1} = 0$; тогда $\overline{c}_0(a^n) = M$, $\overline{c}_{k+1}(a^n) = -M$ для любых x^n, причем $\overline{c}_0(a^n)$ и $\overline{c}_{k+1}(a^n)$ соответственно наибольший и наименьший среди коэффициентов функции $\phi(x, a^n)$.

 ISSN 0572-2691

Следовательно, для проверки, является ли точка x^n минималью в задаче (1), необходимо вычислить значения целевой функции в точке x^n и проверить знак чисел $\bar{c}_{q_p}(a^n)$ и $\bar{c}_{q_{p+1}}(a^n)$: если $a^n \in I(h)$, $\bar{c}_{q_p}(a^n) > 0$ и $\bar{c}_{q_{p+1}}(a^n) \le 0$, то x^n — минималь в задаче (1).

Формулировка и оценка сложности алгоритма

На основании изложенных выше рассуждений сформулируем такой алгоритм решения дробно-линейной безусловной задачи комбинаторной оптимизации на размещениях.

Шаг 0. Полагаем $n = 1$, $c_0 = M$, $c_{k+1} = -M$, $d_0 = d_{k+1} = 0$.

Шаг 1. Вычисляем согласно (5) величины $A(i, j)$ для всех $i \in J_k$, $j \in J_k^{i+1}$. Упорядочиваем их по неубыванию.

Шаг 2. Полагаем $h = r - 1$, где r — номер первого слева (наименьшего) $A(i, j) \ne -M$.

Шаг 3. Для каждого $i \in J_k$ находим количество элементов во множестве (7).

Шаг 4. Упорядочиваем индексы q_t таким образом, чтобы выполнялось условие (8).

Шаг 5. Находим наибольший индекс v, для которого $c_{q_v} > A(i_{h+1}, j_{h+1})\, d_{q_v}$. Если такого индекса не существует, то полагаем $v = 0$.

Шаг 6. Находим наименьший индекс w, для которого $c_{q_{w+1}} \le A(i_h, j_h)\, d_{q_{w+1}}$. Если такого индекса не существует, то полагаем $w = k$.

Шаг 7. Полагаем $p = v$.

Шаг 8. Формируем минималь x^n согласно (4) и вычисляем $a^n = \Phi(x^n)$.

Шаг 9. Если $a^n \in I(h)$ и $c_{q_p} - a^n d_{q_p} > 0$, $c_{q_{p+1}} - a^n d_{q_{p+1}} \le 0$, то процесс завершается: пара $\langle a^n, x^n \rangle$ является решением задачи (1). В противном случае увеличиваем p на единицу и переходим к шагу 10.

Шаг 10. Если $p \le w$, то увеличиваем n на единицу и возвращаемся к шагу 8, иначе переходим к шагу 11.

Шаг 11. Находим наибольшее число f такое, что $A(i_{h+f}, j_{h+f}) = A(i_{h+1}, j_{h+1})$. Увеличив h до $h + f$, переходим к шагу 3.

Пример 4. Рассмотрим задачу (1), где $\Phi(x) = \dfrac{-3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 1}{17x_1 + 17x_2 + 17x_3 + 16x_4 + 2}$, $G = \{2; 4; 7; 9; 11; 13; 15; 15; 18\}$.

Шаг 0. $n = 1$, $c_0 = M$, $c_{k+1} = -M$, $d_0 = d_{k+1} = 0$.

Шаг 1. Как показано в примере 1, $r = 3$, $s = 5$,

$$-M = A(1;2) = A(1;3) < A(1;4) = A(3;4) < A(2;4) < A(2;3) = M.$$

Шаг 2. Полагаем $h = r - 1 = 2$. Тогда $A(i_h, j_h) = A(i_2, j_2) = -M$, $A(i_{h+1}, j_{h+1}) = -5$.

Итерация 1

Шаг 3. $|u_2(1)| = 1$, $|u_2(2)| = 3$, $|u_2(3)| = 2$, $|u_2(4)| = 0$ (см. пример 2).

Шаг 4. $|u_2(2)| > |u_2(3)| > |u_2(1)| > |u_2(4)|$. Значит, для $a \in I(2)$ имеем $\bar{c}_2(a) \ge \bar{c}_3(a) \ge \bar{c}_1(a) \ge \bar{c}_4(a)$.

Шаг 5–6. $v = w = 4$ (см. пример 3)

Шаг 7. Полагаем $p = v = 4$.

Шаг 8. Определяем минималь x^1. Согласно (4) точка x^1 удовлетворяет условиям $x_2^1 = 2$, $x_3^1 = 4$, $x_1^1 = 7$, $x_4^1 = 9$, т.е. $x^1 = (7; 2; 4; 9)$. При этом $a^1 = \Phi(x^1) = -\frac{19}{365} > -5$.

Шаг 9. Учитывая, что $a^1 \notin I(2)$, полагаем $p = 5$.

Шаг 10. Вследствие $p > w = 4$ переходим к шагу 11.

Шаг 11. Так как $A(i_4, j_4) = A(i_3, j_3) = -5$, то $f = 2$. Следовательно, полагаем $h = 4$, тогда $A(i_h, j_h) = -5$, $A(i_{h+1}, j_{h+1}) = -4$.

Итерация 2

Шаг 3. $|u_4(1)| = 0$, $|u_4(2)| = 3$ $(j_1 = i_5 = i_6 = 2)$, $|u_4(3)| = 1$ $(j_2 = 3)$, $|u_4(4)| = 2$ $(j_3 = j_4 = 4)$.

Шаг 4. $|u_4(2)| > |u_4(4)| > |u_4(3)| > |u_4(1)|$. Значит, для $a \in I(4)$ имеем $\bar{c}_2(a) \geq \bar{c}_4(a) \geq \bar{c}_3(a) \geq \bar{c}_1(a)$.

Шаг 5–7. $v = w = p = 4$ $(c_1 = -3 > -4 \cdot d_1 = -4 \cdot 17)$.

Шаг 8–10. $x^2 = (9; 2; 7; 4)$, $\Phi(x^2) = -\frac{22}{185} \notin I(4)$, поэтому $p = 5 > w$.

Шаг 11. $f = 1$, $h = 5$.

Итерация 3

Шаг 3–4. $|u_5(1)| = 0$, $|u_5(2)| = 2$, $|u_5(3)| = 1$, $|u_5(4)| = 3$, поэтому $\bar{c}_4(a) \geq \bar{c}_2(a) \geq \bar{c}_3(a) \geq \bar{c}_1(a)$.

Шаг 5–7. $v = 0$, $w = 4$, $p = 0$.

Шаг 8–10.

- $x^3 = (18; 15; 15; 13)$, $\Phi(x^3) = -\frac{17}{169} \in I(5)$, но $\bar{c}_{q_1}(a) = \bar{c}_4(a) = 3\frac{39}{64} > 0$, т.е. количество положительных коэффициентов функции $\phi(x, a)$ отлично от $p = 0$. Значит, полагаем $p = 1$ и возвращаемся к шагу 8.

- $x^4 = (18; 15; 15; 2)$, $\Phi(x^4) = -\frac{125}{848} \in I(5)$, но $\bar{c}_{q_2}(a) = \bar{c}_2(a) = \frac{429}{848}$, поэтому полагаем $p = 2$.

- $x^5 = (18; 4; 15; 2)$, $\Phi(x^5) = -\frac{103}{661} \in I(5)$, $\bar{c}_{q_2}(a) = \bar{c}_2(a) = \frac{429}{661}$, $\bar{c}_{q_3}(a) = \bar{c}_3(a) = -\frac{232}{661}$. Таким образом, точка x^5 — минималь функции $\Phi(x)$ на $E_9^4(G)$.

Решением задачи (1) является пара $\left\langle -\frac{103}{661}; (18; 4; 15; 2) \right\rangle$.

Оценим количество операций предложенного алгоритма. При этом шаги, выполнение которых требует фиксированного времени, не зависящего от k, не рассматриваются. Количество операций для поиска элемента в массиве из n элементов и упорядочений такого массива зависит от выбранного алгоритма, но можно гарантировать асимптотическую верхнюю грань $O(n)$ и $O(n^2)$ [16, 17] (отметим, что при выборе соответствующих алгоритмов поиска и сортировки эти оценки могут быть улучшены).

Шаг 1. Необходимо вычислить $m = \frac{k(k-1)}{2}$ величин $A(i, j)$. Количество операций для их упорядочения $O(m^2)$, т.е. $O(k^4)$.

Шаг 3. Если определение количества элементов во множествах (7) осуществляется просмотром упорядоченной последовательности величин (5), то оно может быть осуществлено за $O(m)$, т.е. $O(k^2)$ операций.

Шаг 4. Упорядочение индексов q_t может быть оценено как $O(k^2)$.

Шаги 5–6. Поиск каждого из значений v и w оценивается как $O(k)$.

Шаг 8. Формирование точки (4) и вычисление соответствующего значения целевой функции требует времени $O(k)$.

Шаг 10. Проверка выполняется не более $w-v+1 \le k+1$ раз. Таким образом, действия шагов 8–10 повторяются не более $k+1$ раз и имеем оценку $O(k^2)$.

Шаг 11. Количество операций поиска наибольшего числа f такого, что $A(i_{h+f}, j_{h+f}) = A(i_{h+1}, j_{h+1})$, равно количеству итераций, которые не выполняются при решение задачи, поэтому можно считать, что действия шага 11 требуют фиксированного времени.

Действия шагов 3–11 повторяются не более $m+1$ раза. Таким образом, общая оценка циклического процесса составляет $O(k^4)$. Учитывая также оценку пп. 1, 2, имеем, что временная сложность предложенного алгоритма $O(k^4)$, т.е. алгоритм является полиномиальным.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Приведенный алгоритм решения безусловной дробно-линейной задачи комбинаторной оптимизации на размещениях (1) полиномиален.

Заключение

В настоящей статье обоснован метод решения задачи минимизации дробно-линейной целевой функции на общем множестве размещений. Решение исходной дробно-линейной задачи сводится к решению конечной последовательности линейных безусловных задач комбинаторной оптимизации на размещениях, что позволяет использовать критерий экстремали в таких задачах. Показано, что предложенный алгоритм полиномиален.

О.О. Ємець, Т.М. Барболіна

ПОЛІНОМІАЛЬНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ БЕЗУМОВНОЇ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА РОЗМІЩЕННЯХ

Розглянуто розв'язування дробово-лінійної задачі комбінаторної оптимізації на загальній множині розміщень. Запропоновано й обгрунтовано метод, який передбачає розв'язування скінченної послідовності лінійних безумовних задач комбінаторної оптимізації на розміщеннях. Отримано теоретичні оцінки сформульованого алгоритму, доведено його поліноміальність.

O.A. Iemets, T.N. Barbolina

POLYNOMIAL METHOD OF SOLVING UNCONDITIONAL LINEAR FRACTIONAL PROBLEM OF COMBINATORIAL OPTIMIZATION ON ARRANGEMENTS

The article deals with the solving of a linear fractional problem of combinatorial optimization on the general set of arrangements. Authors propose and substantiate the method which provides solving of finite sequence of linear unconditional problems of combinatorial optimization on arrangements. Theoretical estimates of the formulated algorithm are received, its polynomiality is proved.

1. *Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф.* Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — Киев : Наук. думка, 1981. — 288 с.
2. *Згуровский М.З., Павлов А.А.* Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами. — Киев : Наук. думка, 2010. — 573 с.
3. *Донець Г.П., Колєчкіна Л.М.* Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. — Полтава : РВВ ПУЕТ, 2011. — 309 с. — http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/560.
4. *Сергиенко И.В., Гуляницкий Л.Ф., Сиренко С.И.* Классификация прикладных методов комбинаторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 5. — С. 71–83.
5. *Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н.* Об одном подходе к решению векторных задач с дробно-линейными функциями критериев на комбинаторном множестве размещений // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2010. — № 1. — С. 131–144.
6. *Стоян Ю.Г., Ємець О.О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — Київ : Інститут системних досліджень освіти, 1993. — 188 с. — http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/487
7. *Гребенник И.В., Баранов А.В.* Оптимизация линейных функций с линейными ограничениями на комбинаторных множествах на основе случайного поиска // Искусственный интеллект. — 2007. — № 1. — С. 132–137.
8. *Емец О.А., Барболина Т.Н.* Решение задач евклидовой комбинаторной оптимизации методом построения лексикографической эквивалентности // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 5. — С. 115–125.
9. *Емец О.А., Емец Е.М., Чиликина Т.В.* Математическая модель задачи оптимизации одной многопроцессорной вычислительной системы и ее решение // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2011. — № 1. — С. 63–68.
10. *Емец О.А., Черненко О.А.* Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях. — Киев : Наук. думка, 2011. — 154 с. — http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/467.
11. *Емец О.А., Барболина Т.Н., Черненко О.А.* Решение задач оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями и дополнительными ограничениями // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 5. — С. 79–85.
12. *Емец О.А., Черненко О.А.* Решение дискретных задач оптимизации с дробно-линейной целевой функцией методом ветвей и границ // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2013. — № 5. — С. 64–69.
13. *Емец О.А., Барболина Т.Н.* Лексикографическая комбинаторная оптимизация дробно-линейной функции на размещениях // Матеріали XVIII Міжнародного науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування» (Кіровоград, 15–16 квітня 2016 р.). — Кіровоград, 2016. — С. 67–77.
14. *Барболіна Т.М.* Властивості лінійних безумовних задач оптимізації на розміщеннях // Збірник наукових праць викладачів, аспірантів, магістрантів і студентів фізико-математичного факультету. — Полтава : Астрая, 2015. — С. 12–14.
15. *Соломон Д.И.* Дробное программирование и недифференцируемая оптимизация. — Кишинэу : Эврика, 2010. — 554 с.
16. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.* Алгоритмы: построение и анализ. — М. : Вильямс, 2005.— 1296 с.
17. *Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов. — М. : Мир, 1979. — 534 с.

Получено 08.08.2016