УДК 517.95:419.86:539.3

*В.А. Стоян, С.Т. Даниш*

# О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ДИНАМИКИ ТРЕХМЕРНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ. ЧАСТЬ 1. ТЕЛА С НЕПРЕРЫВНО НАБЛЮДАЕМЫМ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫМ СОСТОЯНИЕМ

## Введение

Динамика большинства математически формализованных пространственно распределенных экономических, физико-химических и механических процессов описывается системами дифференциальных уравнений в частных производных. Исследование состояния таких процессов традиционно было задачей непростой, особенно, если эти процессы неопределенные по начально-краевым возмущениям. Для частного случая, когда математическая модель динамики процесса — одно дифференциальное уравнение, в [1] предложена методика построения функции состояния и управления [2, 3] этой функцией так, чтобы последняя, будучи решением дифференциального уравнения процесса, по среднеквадратическому критерию согласовывалась с начально-краевыми, текущими и желаемыми (для задач управления) значениями независимо от их количества и качества (дискретные или непрерывные). Основой для развитого в [2, 3] метода математического моделирования решений прямых и обратных задач динамики неполно наблюдаемых пространственно распределенных динамических систем был интегральный эквивалент дифференциальной модели процесса. Для распространения результатов работ [1–3] на исследование динамических процессов, описанных системами дифференциальных уравнений, ниже предложена методика перехода от дифференциальной формы модели динамических систем к ее интегральному представлению. С использованием полученных результатов будет решена сложная задача математической теории упругости — замена известных дифференциальных уравнений Ляме динамики пространственно неограниченной упругой среды [4] их интегральным эквивалентом. Будут построены интегральные математические модели установившейся динамики пространственно-ограниченных, изначально возмущенных и неограниченных пространственно упругих тел, а также начально-краевых задач для них.

## Дифференциальная математическая модель динамики трехмерной упругой среды

Рассмотрим динамику (по временной координате $t$) неограниченной по декартовым координатам $x_1, x_2, x_3$ среды, упругие свойства которой определяются константами Ляме $\lambda$ и $\mu$ [4]. Обозначив $f_1(x,t)$, $f_2(x,t)$, $f_3(x,t)$ массовые силы, которые могут иметь место в точке $x=(x_1, x_2, x_3)$, исследуем смещения $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, $u_3(x,t)$ этой точки в направлении координатных осей $Ox_1, Ox_2$, $Ox_3$ соответственно. При этом будем исходить из того, что [4]:

$$\begin{aligned}
&\mu\Delta u_1(x,t)+(\lambda+\mu)\partial_{x_1}\theta(x,t)-\rho\partial_t^2 u_1(x,t)=-f_1(x,t),\\
&\mu\Delta u_2(x,t)+(\lambda+\mu)\partial_{x_2}\theta(x,t)-\rho\partial_t^2 u_2(x,t)=-f_2(x,t),\\
&\mu\Delta u_3(x,t)+(\lambda+\mu)\partial_{x_3}\theta(x,t)-\rho\partial_t^2 u_3(x,t)=-f_3(x,t),
\end{aligned}\tag{1}$$

где $\rho$ — удельная плотность материала среды, $\partial_{x_i}$ $(i=\overline{1,3})$ и $\partial_t$ — производные по пространственным координатам $x_i$ $(i=\overline{1,3})$ и времени $t$,

$$\theta(x,t)=\sum_{i=1}^{3}\partial_{x_i}u_i(x,t),\ \ \Delta=\sum_{i=1}^{3}\partial_{x_i}^2 .$$

Введем в рассмотрение вектор-функции

$$u(x,t)=\operatorname{col}(u_i(x,t),\ i=\overline{1,3}),$$

$$f(x,t)=\operatorname{col}(f_i(x,t),\ i=\overline{1,3})$$

и матричный дифференциальный оператор

$$L(\partial_s)=\begin{pmatrix}
(\lambda+2\mu)\partial_{x_1}^2+\mu(\partial_{x_2}^2+\partial_{x_3}^2)-\rho\partial_t^2 & (\lambda+\mu)\partial_{x_1}\partial_{x_2} & (\lambda+\mu)\partial_{x_1}\partial_{x_3}\\
(\lambda+\mu)\partial_{x_2}\partial_{x_1} & (\lambda+2\mu)\partial_{x_2}^2+\mu(\partial_{x_1}^2+\partial_{x_3}^2)-\rho\partial_t^2 & (\lambda+\mu)\partial_{x_2}\partial_{x_3}\\
(\lambda+\mu)\partial_{x_3}\partial_{x_2} & (\lambda+\mu)\partial_{x_3}\partial_{x_2} & (\lambda+2\mu)\partial_{x_3}^2+\mu(\partial_{x_1}^2+\partial_{x_2}^2)-\rho\partial_t^2
\end{pmatrix},\tag{2}$$

в котором $s=(x,t)$, $\partial_s=(\partial_x,\partial_t)=(\partial_{x_1},\partial_{x_2},\partial_{x_3},\partial_t)$. После этого систему уравнений (1) запишем в виде

$$L(\partial_s)u(s)=-f(s).\tag{3}$$

## Интегральная математическая модель динамики трехмерной упругой среды

Рассмотрим задачу перехода от дифференциальной модели (3) к ее интегральному эквиваленту:

$$u(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(s-s')f(s')ds'.\tag{4}$$

Здесь $G(s-s')\in R^{3\times 3}$ — матричная функция такая, что

$$L(\partial_s)G(s-s')=\Delta(s-s'),\tag{5}$$

где $\Delta(s-s')=\operatorname{diag}(\delta(s-s'),\ l=\overline{1,3})$, а $\delta(s-s')$ — $\delta$-функция Дирака.

Для решения матричного уравнения (5), как и в [3], будем исходить из того, что для данного случая [3]

$$\delta(s-s') = \frac{1}{16\pi^4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(x-x')+i\eta(t-t')}d\xi d\eta \qquad (6)$$

при $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $d\xi = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$, $\xi(x-x') = \sum\limits_{j=1}^{3}\xi_j(x_j - x'_j)$ и мнимом $i$. Заметим, что представление (6) можно заменить следующим:

$$\delta(s-s') = \frac{1}{\pi^4}\int\limits_{0}^{+\infty}\prod_{j=1}^{3}\cos\xi_j(x_j - x'_j)\cos\eta(t-t')d\xi d\eta.$$

С учетом (6) решение уравнения (5) представим в виде

$$G(s-s') = \frac{1}{16\pi^4}\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A^{-1}(i\xi, i\eta)e^{i\xi(x-x')+i\eta(t-t')}d\xi d\eta\,, \qquad (7)$$

где символ Re означает действительную часть следующего после него интеграла, а с учетом (2)

$$A(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)\xi_1^2 + \mu(\xi_2^2+\xi_3^2) - \rho\eta^2 & (\lambda+\mu)\xi_1\xi_2 & (\lambda+\mu)\xi_1\xi_3 \\ (\lambda+\mu)\xi_2\xi_1 & (\lambda+2\mu)\xi_2^2 + \mu(\xi_1^2+\xi_3^2) - \rho\eta^2 & (\lambda+\mu)\xi_2\xi_3 \\ (\lambda+\mu)\xi_3\xi_2 & (\lambda+\mu)\xi_3\xi_2 & (\lambda+2\mu)\xi_3^2 + \mu(\xi_1^2+\xi_2^2) - \rho\eta^2 \end{pmatrix}.$$

В общем случае при работе с представлением (7) функции $G(s-s')$ могут возникнуть проблемы с ограниченностью интеграла в (7). Заменив $i\xi_1 = p_1$, $i\xi_2 = p_2$, $i\xi_3 = p_3$, $i\eta = q$, последний, однако, можно свести к контурным интегралам, хорошо изученным в теории функций комплексной переменной. При этом

$$G(s-s') = \frac{1}{(2\pi i)^4}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} A^{-1}(p,q)D(p,q,s-s')dpdq = \sum_{k=1}^{K}\mathrm{Re}\,s(\Phi(\overline{p}), \overline{p_k})\,, \qquad (8)$$

где $\overline{p} = (p,q) = (p_1, p_2, p_3, q)$, $dp = dp_1 dp_2 dp_3$, $\overline{p_k} = (p_k, q_k)(k = \overline{1,K})$ — полюса матричной функции $\Phi(\overline{p}) = A^{-1}(p,q)D(p,q,s-s')$ при

$$D(p,q,s-s') = \mathrm{diag}(e^{p(x-x')+q(t-t')},\ l = \overline{1,3}),$$

а $\mathrm{Re}\,s(\Phi(\overline{p}), \overline{p_k})$ — интегральный вычет матричной функции $\Phi(\overline{p})$ в точке $\overline{p_k}$.

Заметим, что особенности реализации представления (8) подробно рассмотрены в [3]. Остается напомнить, что в соотношении (4) вычисленная согласно (8) функция $G(s-s')$ должна быть [3] непрерывной, симметричной относительно точки $s'$ и удовлетворять условиям затухания на бесконечности.

Учитывая структуру (2) оператора $L(\partial_s)$, а следовательно, и матричной функции $A(\xi, \eta)$, обозначая

$$\overline{D}(\xi, \eta, s-s') = \mathrm{diag}\left( \prod_{j=1}^{3} \cos\xi_j (x_j - x'_j) \cos\eta(t-t'),\ l = \overline{1,3} \right),$$

функцию $G(s-s')$ уравнения (4), определенную согласно (7), в данном случае запишем в виде

$$G(s-s') = -\frac{1}{\pi^4} \int_0^{\infty} A^{-1}(\xi, \eta) \overline{D}(\xi, \eta, s-s') d\xi d\eta \tag{9}$$

(здесь, как и выше, $d\xi = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$), что вполне доступно для численно-аналитического использования.

Предполагая использовать полученное выше интегральное представление (4) математической модели динамики упругой среды к решению задачи эластодинамики упругих пластин, плит и оболочек, где доминирующими являются смещения $u_3(x, t)$, исследованы особенности практического применения соотношения (9) к решению задачи вычисления элементов $G_{3j}(s-s')(j = \overline{1,3})$ матричной функции $G(s-s')$. При этом исходили из соотношения (9), матричную функцию $A^{-1}(\xi, \eta)$ в котором определяли алгебраическими дополнениями $(j3)$-элементов $(j = \overline{1,3})$ последней. Вычисления элементов матричной функции $G(s-s')$, определенной согласно (9), упрощаются также, если учесть четность подынтегральной функции и то, что координаты $x_1, x_2, x_3$ при каждом $j = \overline{1,3}$ равноценны.

Результаты численной проверки предложенной интегральной модели динамики упругой среды (4) оказались удовлетворительными, что позволяет представления (4), (7) в дальнейшем (по методике, предложенной в [2, 3]) использовать для решения неполно определенных по начально-краевым наблюдениям начально-краевых задач эластодинамики пространственно распределенных упругих тел и конструкций.

## Интегральная математическая модель установившейся динамики трехмерного упругого тела

Остановимся на особенностях построения интегральной математической модели упругого тела, пространственная область $S_0$ которого $\Gamma$-поверхностью выделена из рассматриваемой упругой среды.

Будем исходить из того, что кроме введенных выше к рассмотрению массовых сил $f_i(x, t)(x \in S_0,\ \ t \in (-\infty, +\infty),\ \ i = \overline{1,3})$ на вектор-функцию $u(s)$ состояния рассматриваемого тела влияют и контурные внешнединамические возмущения, эффект действия которых на динамику внутренних точек тела определим соотношением

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x) u(s) = U_\rho^\Gamma(s) (\rho = \overline{1, R_\Gamma}), \tag{10}$$

где $s = (x, t) \in \Gamma \times (-\infty, +\infty)$, $L_\rho^\Gamma(\partial_x)$ — $(3 \times 3)$-мерный матричный диференциальный оператор, а $U_\rho^\Gamma(s) \in R^3$ — заданные вектор-функции.

С учетом (10) вектор-функцию $u(s)$ смещений точек рассматриваемого тела представим [3] в виде

$$u(s) = u_\infty(s) + u_\Gamma(s), \tag{11}$$

 ISSN 0572-2691

где при определенной в (8), (9) матричной функции $G(s-s')$

$$u_{\infty}=\int_{S_0}dx'\int_{-\infty}^{+\infty}G(s-s')f(s')dt', \tag{12}$$

$$u_{\Gamma}(s)=\sum_{m=1}^{M_{\Gamma}}G(s-s_m^{\Gamma})f_{\Gamma m}$$

при $s_m^{\Gamma}\in(R^3\setminus S_0)\times(-\infty,+\infty)(m=\overline{1,M_{\Gamma}})$.

Заметим, что вектор-функция (11) будет удовлетворять [3] дифференциальному уравнению (3) точно при любых $f_{\Gamma m}\in R^3$ $(m=\overline{1,M_{\Gamma}})$. Поэтому вектор $f_{\Gamma}=\mathrm{col}(f_{\Gamma m},\, m=\overline{1,M_{\Gamma}})$ определим из условия среднеквадратического выполнения граничного наблюдения (10) за динамикой рассматриваемого тела, которое запишем в виде

$$\Phi_{\Gamma}=\sum_{\rho=1}^{R_{\Gamma}}\int_{\Gamma}dx\int_{-\infty}^{+\infty}(L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_x)u(s)-U_{\rho}^{\Gamma}(s))^2dt\to\min_{u(s)}. \tag{13}$$

Согласно [3] решением задачи (13), или (что эквивалентно) задачи

$$\Phi_{\Gamma}\to\min_{f_{\Gamma}} \tag{14}$$

будет

$$f_{\Gamma}=P_{\Gamma}^{+}A_{\Gamma U}+v_{\Gamma}-P_{\Gamma}^{+}P_{\Gamma}v_{\Gamma}\,, \tag{15}$$

где при произвольном $v_{\Gamma}\in R^{3M_{\Gamma}}$ и матрице $P_{\Gamma}^{+}$, псевдообратной к

$$P_{\Gamma}=\int_{\Gamma}dx\int_{-\infty}^{+\infty}A_{\Gamma}^{T}(s)A_{\Gamma}(s)dt\,,$$

имеем

$$A_{\Gamma U}=\int_{\Gamma}dx\int_{-\infty}^{+\infty}A_{\Gamma}^{T}(s)U_{\Gamma}(s)dt\,,$$

$$A_{\Gamma}(s)=\mathrm{col}(\mathrm{str}(L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_x)G(s-s_m^{\Gamma}),\ m=\overline{1,M_{\Gamma}}),\ \rho=\overline{1,R_{\Gamma}})\,,$$

$$U_{\Gamma}(s)=\mathrm{col}(U_{\rho}^{\Gamma}(s),\ \rho=\overline{1,R_{\Gamma}})\,.$$

При этом $v_{\Gamma}\equiv 0,$ если $\det P_{\Gamma}>0,$ а

$$\varepsilon_{\Gamma}^2=\min_{u(s)}\Phi_{\Gamma}=\min_{f_{\Gamma}}\Phi_{\Gamma}=\int_{\Gamma}dx\int_{-\infty}^{+\infty}U_{\Gamma}^{T}(s)U_{\Gamma}(s)dt-A_{\Gamma U}^{\mathrm{T}}P_{\Gamma}^{+}A_{\Gamma U}\,,$$

а это значит, что интегральной математической моделью рассматриваемого тела будет соотношение

$$\int_{S_0}dx'\int_{-\infty}^{+\infty}G(s-s')f(s')dt'+\sum_{m=1}^{M_{\Gamma}}G(s-s_m^{\Gamma})f_{\Gamma m}=u(s) \tag{16}$$

при определенных согласно (8), (9), (14), (15) матричной функции $G(s-s')$ и векторе $f_{\Gamma}$ соответственно.

## Интегральная математическая модель динамики начально-возмущенной трехмерной упругой среды

Аналогично (16) построим интегральную математическую модель динамики рассматриваемой упругой среды при условии, что динамика эта начинается так, что

$$L_r^0(\partial_t)u(s)\Big|_{t=0} = U_r^0(x)\ (r=\overline{1, R_0}) \qquad (17)$$

при $x \in R^3$, заданных $(3\times3)$-мерном матричном дифференциальном операторе $L_r^0(\partial_t)$ и 3-мерной вектор-функции $U_r^0(x)$.

Как и выше, будем исходить из того, что начальные возмущения $U_r^0(x)\ (x\in R^3,\ r=\overline{1, R_0})$ моделируются [3] значениями $f_{0m} = f_0(s_m^0)\ (m=\overline{1, M_0})$ моделирующей функции $f_0(s)\ (s\in R^3\times(-\infty, 0])$ такими, что

$$\Phi_0 = \sum_{r=1}^{R_0}\int_{-\infty}^{+\infty}(L_r^0(\partial_t)u(s)\Big|_{t=0} - U_r^0(x))^2\,dx \to \min_{f_0} \qquad (18)$$

при

$$u(s) = \int_{-\infty}^{+\infty}dx'\int_0^{+\infty}G(s-s')f(s')dt' + \sum_{m=1}^{M_0}G(s-s_m^0)f_{0m}\ , \qquad (19)$$

$s_m^0 = (x_m^0, t_m^0) \in R^3\times(-\infty, 0]\ (m=\overline{1, M_0})$ и $f_0 = \mathrm{col}(f_{0m},\ m=\overline{1, M_0})$.

Заметим, что решением задачи (18), как и выше, будет вектор

$$f_0 = P_0^+ A_{0U} + v_0 - P_0^+P_0v_0\ , \qquad (20)$$

где при произвольном $3M_0$-мерном векторе $v_0$ и матрице $P_0^+$, псевдообратной к

$$P_0 = \int_{-\infty}^{+\infty}A_0^{\mathrm{T}}(x)A_0(x)dx,$$

имеем

$$A_{0U} = \int_{-\infty}^{+\infty}A_0^{\mathrm{T}}(x)U_0(x)dx\ ,$$

$$A_0(x) = \mathrm{col}(\mathrm{str}(L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^0)\Big|_{t=0},\ m=\overline{1, M_0}),\ r=\overline{1, R_0})\ ,$$

$$U_0(x) = \mathrm{col}(U_r^0(x),\ r=(\overline{1, R_0})\ .$$

Точность решения задачи (18) будет определяться величиной

$$\varepsilon^2 = \min_{f_0}\Phi_0 = \int_{-\infty}^{+\infty}U_0^{\mathrm{T}}(x)U_0(x)dx - A_{0U}^{\mathrm{T}}P_0^+A_{0U}\ .$$

Решение (20) задачи (18) будет однозначным $(v_0\equiv 0)$, если $\det P_0 > 0$. Последнее означает, что при любых начальных условиях (17) динамика рассматриваемой упругой среды описывается интегральной математической моделью (19).

## Интегральная математическая модель начально-краевой задачи динамики упругого тела

В заключение рассмотрим интегральную математическую модель динамики упругого тела, ограниченного поверхностью Г, для которого имеют место начально-краевые условия (10), (17), а $t\in[0, \mathrm{T}]$.

Согласно [3] интегральным эквивалентом дифференциальной модели (3), (10), (17) будет следующая:

$$u(s)=\int_{S_0} dx'\int_0^{\mathrm{T}} G(s-s')f(s')dt'+\sum_{m=1}^{M_0} G(s-s_m^0)f_{0m}+\sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(s-s_m^\Gamma)f_{\Gamma m}. \qquad (21)$$

Здесь, как и выше, $G(s-s')$ — матричная функция, определенная в (8), (9), $s_m^0\in R^3\times(-\infty, 0]$ $(m=\overline{1, M_0})$, $s_m^\Gamma\in(R^3\setminus S_0)\times[0, \mathrm{T}]$, а векторы $f_0=\mathrm{col}(f_{0m}$, $m=\overline{1, M_0})$ и $f_\Gamma=\mathrm{col}(f_{\Gamma m}$, $m=\overline{1, M_\Gamma})$ такие, что при заданной согласно (21) вектор-функции $u(s)$

$$\Phi=\Phi_0+\Phi_\Gamma\to\min_{f_0,\, f_\Gamma}.$$

При этом

$$f_0=(Q_{11}, Q_{12})A_U+v_0-(Q_{11}, Q_{12})Pv,$$

$$f_\Gamma=(Q_{21}, Q_{22})A_U+v_\Gamma-(Q_{21}, Q_{22})Pv.$$

Здесь при произвольных $3M_0$- и $3M_\Gamma$-мерных векторах $v_0$ и $v_\Gamma$

$$v=\mathrm{col}(v_0, v_\Gamma),\ [Q_{ij}]_{i,\, j=1}^{i,\, j=2}=P^+,$$

$$P=\int_{(\cdot)} A^{\mathrm{T}}(s)A(s)ds,\ A_U=\int_{(\cdot)} A^{\mathrm{T}}(s)U(s)ds,$$

$(\cdot)$ обозначает интегрирование по области изменения аргумента следующих матричной и векторной функций:

$$A(s)=\begin{pmatrix}(A_{11}(x)(x\in S_0)) & (A_{12}(x)(x\in S_0))\\ (A_{21}(s)(s\in\Gamma\times[0, T])) & (A_{22}(s)(s\in\Gamma\times[0, T]))\end{pmatrix},$$

$$U(s)=\begin{pmatrix}(U_0(x) & (x\in S_0))\\ (U_\Gamma(s) & (s\in\Gamma\times[0, T]))\end{pmatrix}.$$

Здесь

$$A_{11}(x)=\mathrm{col}\,(\mathrm{str}\,(L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^0)\Big|_{t=0},\ m=\overline{1, M_0}),\ r=\overline{1, R_0}),$$

$$A_{12}(x)=\mathrm{col}\,(\mathrm{str}\,(L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^\Gamma)\Big|_{t=0},\ m=\overline{1, M_\Gamma}),\ r=\overline{1, R_0}),$$

$$A_{21}(x)=\mathrm{col}(\mathrm{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m^0),\ m=\overline{1, M_0}),\ \rho=\overline{1, R_\Gamma}),$$

$$A_{22}(x)=\mathrm{col}(\mathrm{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m^\Gamma),\ m=\overline{1, M_\Gamma}),\ \rho=\overline{1, R_\Gamma}),$$

а вектор-функции $U_0(x)$ и $U_\Gamma(s)$ определены ранее.

Как и выше, однозначность $(v\equiv 0)$ математической модели (21) динамики рассматриваемого упругого тела будет определяться условием $\det P>0$, а точность интегральной модели по отношению к дифференциальной модели — величиной

$$\varepsilon^2=\min_{u(s)}(\Phi_0+\Phi_\Gamma)=\min_{f_0,\, f_\Gamma}(\Phi_0+\Phi_\Gamma)=\int_{(\cdot)} U^{\mathrm{T}}(s)U(s)ds-A_U^{\mathrm{T}}\mathrm{P}^+A_U.$$

**Заключение**

Таким образом, сформулирована и решена сложная задача трехмерной теории упругости — задача исследования поля упругих динамических смещений точек упругого тела с произвольной геометрией его поверхности при условии, что имеется информация о непрерывно определенном состоянии точек этой поверхности, и начальном состоянии внутренних точек всего тела на заданном временном интервале. Построены математические модели динамики рассматриваемого тела, которые, точно удовлетворяя классически известным уравнениям Ляме трехмерной теории упругости, по среднеквадратическим критериям согласуются с имеющимися начально-краевыми наблюдениями за исследуемым телом. Рассмотрены случаи пространственной неограниченности тела и его установившейся динамики. С учетом возможных неоднозначностей в описании поля упругих динамических смещений рассматриваемых упругих тел, которые могут иметь место в силу неполноты и неопределенности информации о начально-краевом состоянии исследуемого тела, в работе формулируются условия однозначности построенных математических моделей. Оценивается степень согласованности каждой из названых математических моделей с системой непрерывно определенных начально-краевых наблюдений за состоянием исследуемых упруго-динамических тел.

*В.А. Стоян, С.Т. Даниш*

## ПРО МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ ТРИВИМІРНИХ ПРУЖНИХ ТІЛ. ЧАСТИНА 1. ТІЛА З НЕПЕРЕРВНО СПОСТЕРЕЖУВАНИМ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИМ СТАНОМ

Побудовано інтегральні математичні моделі динаміки необмеженого тривимірного пружного середовища та просторово-обмеженого пружного тіла з довільною геометрією його зовнішньої поверхні. Розглянуто питання усталеної динаміки тіла з неперервно спостережуваною поверхнею. Досліджено динаміку необмеженого пружного середовища за його неперервно визначеним початковим станом. Побудовано математичні моделі, які аналітично точно узгоджені з класично відомою диференціальною моделлю Ляме динаміки пружного середовища та за середньоквадратичним критерієм — з наявними спостереженнями за початково-крайовим станом досліджуваних об'єктів. Оцінюється точність такого узгодження і формулюються умови його однозначності.

*V.A. Stoyan, S.T. Danysh*

## ON MATHEMATICAL MODELS OF DYNAMICS OF THREE-DIMENSIONAL ELASTIC BODIES. PART 1. BODIES WITH INFINITE OBSERVABLE INITIAL BOUNDARY CONDITION

Integrated mathematical models of the dynamics of unlimited three-dimensional elastic medium and spatially limited elastic body of arbitrary geometry of its outer surface are built. The questions of the established dynamics of the body with continuously observable surface are considered. We investigated the dynamics of infinite elastic medium, continuously determined by its initial state. Constructed mathematical models are in accurate agrement with classically known Lame differential models of elastic medium dynamics and according to the root meen-square criterion with available observations of the initial boundary condition of the investigated objects. The accuracy of this agreement is evaluated and conditions of its uniqueness are formulated.

1. *Стоян В.А.* Об одном подходе к исследованию начально-краевых задач матфизики // Проблемы управления и информатики. — 1998. — № 1. — С. 79–86.
2. *Скопецький В.В., Стоян В.А., Кривонос Ю.Г.* Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. — Київ : Наук. думка, 2002. — 361 с.
3. *Стоян В.А.* Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем. — Київ. : ВПЦ «Київський університет», 2011. — 320 с.
4. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. — М. : Гостехиздат, 1955. — 492 с.

*Получено 21.12.2016*

Статья представлена к публикации членом редколлегии доктором техн. наук Ф.Г. Геращенко.